Univ. of
Toronto
Library

BINDING LIST AUG 1 1923

7330

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. HERMITE, *président*.

BERTRAND.

DARBOUX.

TISSERAND.

J. TANNERY.

PHILIPPON, *secrétaire*.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

12616 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

MATH
B

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

3

BULLETIN

DE

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL, GOURSAT, A. HARNACK, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. ET ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XI. — ANNÉE 1887.

(TOME XXII DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

179855
24/4/23

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Augustins, 55.

1887

QA
1
B8
v.22

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

WEIERSTRASS. — Abhandlungen aus der Functionenlehre. 1 vol. in-8°; 287 p. Berlin, Springer, 1886.

M. Weierstrass a réuni dans ce Volume les sept Mémoires dont voici les titres :

I. Sur la théorie des fonctions analytiques uniformes.

II. Sur un théorème de M. Mittag-Leffler relatif à la théorie des fonctions.

III. Sur la théorie des fonctions.

IV. Appendice au précédent Mémoire.

V. Quelques propositions sur la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables.

VI. Nouvelle démonstration d'un théorème fondamental de la théorie des fonctions doublement périodiques de plusieurs variables.

VII. Sur la théorie des facultés analytiques.

La plupart de ces Mémoires sont bien connus des lecteurs français, qui seront toutefois bien aises de les trouver réunis en un seul Volume. Il est inutile d'insister ici sur leur extrême importance; chacun sait que les découvertes de M. Weierstrass ont, sur plusieurs points essentiels, renouvelé l'enseignement de la

théorie des fonctions. Nous nous contenterons, en annonçant la publication de ce Volume, de rappeler que le Mémoire I a été traduit par M. Emile Picard dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure;* que la traduction des Mémoires II, III, IV a paru ici même (¹), que les principaux résultats du Mémoire V ont été l'objet d'un travail de M. Dautheville inséré dans les *Annales de l'École Normale*. Le Mémoire VI se trouve dans les *Monatsberichte* de l'Académie de Berlin, pour 1876. Enfin le dernier Mémoire est un des plus anciens titres de gloire de M. Weierstrass; il a été publié, en 1854, dans le *Journal de Crelle*. J. T.

SCHEEFFER (L.). — THEORIE DER MAXIMA UND MINIMA EINER FUNCTION VON ZWEI VARIABELN (²).

La recherche et la distinction des maxima et des minima d'une fonction de deux variables, même développable par la formule de Taylor, sont parfois délicates. Ce sujet est insuffisamment développé dans la plupart des Traités classiques de Calcul différentiel. M. Scheeffer fait ressortir l'insuffisance du procédé qui consiste, pour savoir si la fonction $f(x, y)$ admet un maximum ou un minimum en un point, par exemple au point $x = 0$, $y = 0$, à étudier la fonction $f(tx, ty)$ de la variable t; cette fonction peut très bien admettre un maximum pour $t = 0$ (ou un minimum), et cela quelles que soient les valeurs de x et y, sans que la fonction

$$f(0, 0) - f(x, y)$$

soit positive (ou négative) pour tous les points situés à l'intérieur d'un cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon arbi-

---

(¹) Je crois devoir signaler (*Bulletin*, 2e série, t. V; 1881) une note du Mémoire IV, où une formule que j'avais eu l'honneur de communiquer à l'illustre géomètre est restituée légitimement à M. Schröder, qui l'avait publiée dès 1876 dans le *Zeitschrift* de M. Schlömilch.

(²) Ce travail, inséré dans les *Berichte der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*, a été extrait par M. A. Mayer des papiers laissés par M. Scheeffer, que la mort a récemment enlevé aux espérances qu'il donnait à ses maîtres.

trairement petit. L'auteur cite à ce propos l'exemple

$$f(x, y) = (y - p^2x^2)(y - q^2x^2)$$

déjà signalé par M. Peano.

Pour caractériser nettement les différents cas, en supposant qu'il s'agisse d'une fonction $f(x, y)$ nulle pour le point $x = 0$, $y = 0$ et continue aux environs de ce point, M. Scheeffer imagine un petit cercle de rayon r décrit de l'origine comme centre; à cause de la continuité, la fonction $f(x, y)$ admet sur le cercle un maximum $f_1(r)$ et un minimum $f_2(r)$; si ces quantités $f_1(r)$, $f_2(r)$ sont, pour toutes les valeurs de r inférieures à un certain nombre fixe, toujours positives (ou toujours négatives), la fonction $f(x, y)$ présente un minimum (ou un maximum); dans le cas où, pour ces mêmes valeurs de r, l'une des quantités $f_1(r)$, $f_2(r)$ est positive et l'autre négative, il n'y a ni maximum ni minimum. Le cas que l'on doit regarder comme élémentaire est celui où il existe une certaine puissance positive n de r telle que, pour toutes les valeurs de r inférieures à une limite fixe g, les nombres $f_1(r)$, $f_2(r)$ soient, en valeur absolue, supérieurs à ar^n, en désignant par a un nombre positif fixe; dans ce cas le développement en série de Taylor permet de distinguer sûrement si l'on a affaire, ou non, à un maximum ou à un minimum; l'objet essentiel de M. Scheeffer est de montrer comment on peut effectuer cette distinction et reconnaître que la condition imposée est vérifiée en effet : dans ce cas on peut substituer à la fonction $f(x, y)$ une fonction entière $G_n(x, y)$, obtenue en prenant dans le développement en série un nombre limité de termes.

L'existence d'un maximum ou d'un minimum pour le point $x = 0, y = 0$ se manifeste alors d'une manière particulièrement simple quand l'ensemble homogène des termes par lesquels commence le développement constitue une forme *définie*, d'ordre pair par conséquent. Dans tous les cas, le problème revient à savoir si la courbe algébrique dont l'équation serait $G_n(x, y) = 0$ admet un point isolé à l'origine. L'auteur montre comment on peut diriger l'étude de cette courbe autour de ce point pour arriver sûrement au résultat par des calculs élémentaires. J. T.

LAMPE (E.). — Einige Zahlenbeispiele fuer die Anziehung, welche eine homogene Masse auf einen materiellen Punkt nach dem Newtonschen Gesetze ausuebt. 3 p. in-8°. Litterarische Bemerkung zu den Zahlenbeispielen ueber Attraction (1). 7 p. in-8°.

Supposons qu'une masse homogène M exerce une attraction A sur un point matériel m selon la loi de Newton; prenons pour unité de force l'attraction avec laquelle le point est attiré par la masse M réduite en sphère homogène lorsque m est placé à sa surface.

1° La masse M a la forme d'un ellipsoïde aplati de révolution; soit $\sin x$ l'excentricité de son ellipse méridienne. Le point m, placé sur un pôle de l'ellipsoïde, est attiré par ce corps avec l'intensité

$$A = 3\cos^{\frac{2}{3}} x \sin^{-2} x(1 - x \cot x),$$

expression qui devient un maximum quand on a

$$x(9 + 5\tang^2 x) = \tang x(9 + 2\tang^2 x),$$

c'est-à-dire pour $x_0 = 43°59'$. Alors on a $A_0 = 1,02213$, valeur très rapprochée de $\sqrt[3]{1,08} = 1,025986$ ou de la plus grande attraction que M puisse exercer sur m. Pour $x = 0$ on a $A = 1$, mais aussi, pour $x_1 = 59°4',2$, A devient $\frac{1}{2}$ pour $x_2 = 85°18'$.

2° La même masse, réduite en ellipsoïde allongé de révolution, exerce, sur le point m placé au pôle, l'attraction

$$A = 3\cos^{\frac{4}{3}} x \sin^{-2} x[-1 + \sin^{-1} x \, l\tang(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x)].$$

Cette expression diminue lorsque x augmente et prend la valeur $\frac{1}{2}$ pour $x = 78°6',76$.

3° Réduite en forme de cylindre droit à base circulaire, la masse M attire le point m placé dans le centre d'une de ses bases, avec l'intensité

$$A = \sqrt[3]{\frac{9}{2x^2}}(1 + x - \sqrt{1 + x^2}).$$

---

(1) Extrait des *Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft in Berlin*, 1884.

où l'on a mis $x = \frac{r}{h}$, $r =$ rayon de la base, $h =$ hauteur. A atteint son maximum $A_0 = 1,00682$ pour $x_0 = \frac{1}{8}(9 - \sqrt{17}) = 0,60961$; A égale l'attraction de la sphère à sa surface (l'unité) pour $x_1 = 0,75$ et pour $x_2 = \frac{2}{9}(-5 + \sqrt{52}) = 0,491356$.

4° En forme de cône droit à base circulaire, la masse M attire le point matériel m placé dans le sommet avec la force

$$A = 12.2^{-\frac{1}{3}} \sin^2 \tfrac{1}{2} x \cot^{\frac{2}{3}} x,$$

où x dénote l'angle compris entre la hauteur et une génératrice du cône. Le maximum $A_0 = 0,82941$ de A appartient à

$$x = \arccos\left(-\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{11}{12}}\right) = 62^\circ 46',7.$$

5° Si un cône droit à base circulaire attire le point m placé au centre de la base et au sommet avec la même intensité, on trouve l'angle x de l'équation

$$1 = \cos x - \sin x + \sin^2 x\, l\left[\cot\tfrac{1}{2} x \cot\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2} x\right)\right],$$

c'est-à-dire $x = 57^\circ 39' 7$.

6° Soit encore $\sin x$ l'excentricité de l'ellipse méridienne d'un ellipsoïde allongé de révolution, et faisons $\operatorname{tang} x = t$. L'attraction de cet ellipsoïde exercée sur le point m placé dans un point de l'équateur sera

$$A = \tfrac{3}{2} t^{-3} (1 + t^2)^{\frac{3}{2}} \left[t\sqrt{1 + t^2} - l\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right)\right].$$

Le maximum A_0 de A se calcule de

$$l\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right) = \frac{9 + t^2}{9 + 7t^2}\, t\sqrt{1 + t^2}.$$

On trouve $x_0 = 38^\circ 45',1$, $A_0 = 1,00825$. En mettant $A = 1$, on obtient (outre $t = 0$) $x_1 = 52^\circ 48',3$. A devient $\frac{1}{2}$ pour

$$x_2 = 87^\circ 51' 1'',76.$$

7° L'attraction de l'ellipsoïde aplati de révolution sur le point m de l'équateur a pour valeur

$$A = \tfrac{3}{2} \cos^{\frac{2}{3}} x \sin^2 x (x - \sin x \cos x).$$

Cette fonction va en diminuant lorsque x augmente; elle devient $\frac{1}{2}$ pour $x = 82^\circ 54' 53''$.

8° Réduisons la masse M en forme de parallélépipède droit de hauteur h sur une base carrée ayant le côté $2b$. Posons $\sin x = \frac{b^2}{b^2 + h^2}$; on aura l'attraction exercée sur m placé au centre de la base :

$$A = \sqrt[3]{\frac{9}{\pi^2}} \left(\frac{\sin x}{1 - \sin x}\right)^{\frac{1}{6}} \left(x\sqrt{\frac{1 - \sin x}{\sin x}} + 2l\,\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{1 + \sin x}}\right).$$

La valeur x_0 de x, pour laquelle A devient un maximum, se tire de

$$x\sqrt{\frac{1 - \sin x}{\sin x}} = l\,\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{1 + \sin x}}.$$

De là vient $x_0 = \arcsin 0,22624 = 13^\circ 4',55$; $h : b = 1,84395$, $A_0 = 1,00029$.

Les deux valeurs pour lesquelles A est aussi grande que pour la surface de la sphère (l'unité) sont

$$x_1 = \arcsin 0,24187 = 13^\circ 59',6; \qquad h : b = 1,77080,$$
$$x_2 = \arcsin 0,21122 = 12^\circ 11',64; \qquad h : b = 1,93247.$$

Le premier géomètre qui semble avoir traité ces sortes de questions est John Playfair; dans les *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, Vol. VI, IIe Partie (1809) il a publié le Mémoire : *Of the solids of greatest Attraction, or those which among all the solids that have certain properties, attract with the greatest force in a given direction.* Les questions relatives au maximum d'attraction pour le cylindre (3) et le cône (4) se trouvent déjà résolues dans ce travail. En cherchant le maximum pour l'ellipsoïde aplati sur le pôle, Playfair a commis une erreur. Ayant trouvé la même équation que ci-dessus (1), il s'est trompé en disant que cette équation transcendante n'admet que la solution exacte $x = 0$, et que toutes les valeurs entre 0 et $\frac{1}{4}\pi$ fournissent des solutions approchées. Le même Mémoire contient la découverte du corps d'attraction maxima, corps de révolution dont la courbe méridienne a pour équation, en coordonnées polaires r et φ, $r^2 = a^2 \cos\varphi$. Dans son Mémoire : *Principia generalia theoriæ figuræ fluidorum in statu æquilibrii* (1829),

Gauss a énoncé, dans une Note, cette proposition : *Constat, maximam attractionem, quam massa homogenea data in punctum datum secundum illam legem exercere potest, esse ad attractionem, quam eadem massa in figuram sphæricam redacta exercet in punctum in superficie positum, ut* 3 *ad* $\sqrt[3]{25}$. C'est pourquoi on a attribué longtemps la découverte du corps d'attraction maxima à l'illustre géomètre de Göttingue. Cette opinion est donc erronée; la Note de Gauss donne le résultat des recherches de Playfair.

J. CLERK MAXWELL. — Traité d'Électricité et de Magnétisme. Traduit de l'anglais sur la deuxième édition, par M. *G. Seligmann-Lui*, ingénieur des télégraphes; avec Notes et éclaircissements par MM. *Cornu*, de l'Institut, *Potier* et *Sarrau*, professeurs à l'École Polytechnique. 1er Volume, 1886. 2e Volume, 1er Fascicule, 1887. Paris, Gauthier-Villars.

La traduction française du *Traité d'Électricité et de Magnétisme* de J. Clerk Maxwell, dont le premier fascicule a paru en 1885, est parvenue déjà à son quatrième fascicule; les trois premiers fascicules parus forment le premier Volume de l'Ouvrage et embrassent l'ensemble de l'Électrostatique; le quatrième fascicule appartient au second Volume et renferme la partie de ce Volume qui traite du Magnétisme.

La renommée acquise par le Livre de Maxwell nous démontre l'utilité de l'œuvre entreprise par M. Seligmann-Lui. Le Traité de Maxwell nous représente fidèlement ce qu'est la Science électrique dans le pays de Green et de Faraday. Les idées fondamentales et la manière de les présenter s'écartent notablement de la doctrine et du mode d'exposition adoptés dans la patrie de Coulomb et d'Ampère comme dans la patrie de Gauss. Peut-être le lecteur du Livre de Maxwell regrettera-t-il la clarté des physiciens français et la rigueur des géomètres allemands; mais les méthodes du mathématicien anglais, en le contraignant à reprendre les principales théories de l'Électricité dans un ordre différent et parfois inverse de celui auquel il est habitué, l'aideront dans la découverte de conséquences nouvelles.

Par exemple, en lisant la théorie des fonctions sphériques, que

Maxwell expose suivant la méthode de Sir W. Thomson et de M. Tait, nous regretterons peut-être l'analyse si naturelle par laquelle Laplace a découvert les principales propriétés de ces fonctions; nous saurons gré à M. Potier d'avoir, dans une Note étendue, présenté l'exposé de cette analyse. Mais la voie suivie par Sir W. Thomson, par M. Tait et par Maxwell, en rattachant plus directement les propriétés des harmoniques sphériques à l'existence des singularités présentées par la fonction potentielle, fait mieux ressortir la nature analytique de cette fonction et les remarquables analogies, si bien étudiées par M. P. Appell, qui rapprochent les fonctions vérifiant l'équation $\Delta F = 0$ des fonctions d'une variable imaginaire.

La forme si anglaise du Traité de Maxwell en rendait la traduction fort difficile; M. Seligmann-Lui s'est acquitté de cette tâche de la façon la plus heureuse; il a rendu l'Ouvrage aussi aisé à lire qu'il se pouvait faire.

MM. Cornu, Potier et Sarrau ont joint au Traité de Maxwell des Notes nombreuses, destinées à combler les lacunes ou à corriger les inexactitudes qui avaient échappé à l'illustre physicien. Parmi les Notes les plus importantes, citons une Note de M. Cornu sur une construction géométrique tracée par Maxwell et dont les données n'étaient pas définies d'une manière suffisante; une Note de MM. Cornu et Potier relative au tracé des lignes de forces dans le cas où le champ électrique est symétrique autour d'un axe de révolution; enfin la Note déjà citée de M. Potier sur les sphériques harmoniques.

Souhaitons que les derniers fascicules de cette traduction ne se fassent pas trop longtemps attendre. P. Duhem.

Antonio FAVARO. — Carteggio inedito di Ticone Brahe, Giovanni Keplero, e di altri celebri astronomi e matematici dei secoli XVI e XVII con Giovanni Antonio Magini. Bologne, Zanichelli, 1886, gr. in-8°, XVI-522 p.

Magini, dont le nom reste attaché à l'une des taches de la Lune, n'est plus guère connu aujourd'hui; il n'en était pas moins considéré comme un des premiers astronomes de son temps. Né le

14 juin 1555 à Padoue, il publiait dès l'âge de vingt-sept ans des éphémérides pour 40 ans, en conformité avec les hypothèses de Copernic et en 1588 était nommé à une des deux chaires de Mathématiques de l'Université de Bologne, que lui disputait en vain Galilée, plus jeune que lui de neuf ans. Après vingt-neuf ans de professorat, Magini mourut, le 11 février 1617, en pleine activité de travail et laissant inachevé un grand Ouvrage sur la Géographie de l'Italie, dont il s'occupait depuis de longues années, et dont l'Atlas seul a été publié après sa mort.

Ce travail n'était d'ailleurs pour lui qu'un délassement des calculs qu'il ne cessait de poursuivre pour compléter et corriger ses éphémérides et les autres Tables qu'il leur avait ajoutées; car Magini, pour parler comme Tycho Brahe, était un astronome de cabinet. Calculateur exact et infatigable, il n'observait guère, et de là l'oubli qui attendait devant la postérité un homme qui, aux yeux de ses contemporains, balançait Kepler et Galilée.

Il n'est pas besoin d'insister sur l'intérêt que présente la correspondance d'un personnage en relation avec les principaux savants de son temps. Un manuscrit contenant soixante-deux lettres autographes adressées à Magini par Clavius, Tycho Brahe, le disciple préféré de ce dernier, Tengnagel, par Kepler, Adrien Romain, Scheiner, etc., avec cinq minutes de réponses de Magini, et actuellement conservé dans les archives de la famille des Malvezzi di Medici, à Bologne, forme le fonds du Volume dont nous avons reproduit le titre. Mais ce titre promet moins que ne donne le Livre; car M. Favaro, auquel le comte Nerio Malvezzo s'est adressé pour la publication de ce manuscrit, y a fait deux additions excessivement importantes.

Tout d'abord une Notice sur la vie, les œuvres et les correspondants de Magini; cette Notice, qui n'occupe pas moins de cent quatre-vingt-quatre pages, est un véritable Livre, et ce ne sera pas un des moins intéressants qu'aura publiés l'éminent professeur de Padoue. Toutes les qualités de l'historien jointes à la science du mathématicien, et surtout l'art d'intéresser à des questions qui n'attirent pas à première vue, il y a là de quoi décourager le critique, de quoi lui faire trop craindre que les quelques lignes qu'il peut consacrer à l'analyse de l'œuvre n'en donnent qu'une idée tout à fait insuffisante.

Signalons cependant rapidement des détails précieux sur l'enseignement dans les universités italiennes à cette époque; un résumé très clair des doctrines astrologiques nécessaires pour comprendre certains passages de la correspondance, car Magini croyait sérieusement, comme Kepler, à l'Astrologie, et ses prédictions étaient assez célèbres pour que son nom ait servi pendant longtemps d'enseigne à des almanachs publiés en France et dans les Pays-Bas (1); une histoire très attachante des rapports de Magini et Galilée, histoire qui n'est guère à l'honneur du premier : car, tout en affectant de rester en bons termes avec son ancien concurrent, Magini non seulement ne put s'empêcher de le jalouser après la découverte des satellites de Jupiter, mais il paraît avoir excité sous main les attaques de Horky et de Sizzi, et même leur avoir fourni des matériaux; les détails sur les travaux accessoires de Magini, et notamment sur les grands miroirs sphériques qu'il construisait et offrait aux princes de son temps, sans pouvoir toujours s'en faire rémunérer, comme cela lui arriva avec l'empereur Rodolphe II.

La seconde addition faite par M. Favaro a un autre caractère; il a cherché à compléter la correspondance publiée, soit au moyen de lettres déjà imprimées dans les Ouvrages de Magini et de Tycho Brahe (2), soit avec les autographes conservés dans les archives Gonzague à Mantoue, ou dans les Bibliothèques de Vienne et de Florence. Il a ainsi donné vingt-quatre lettres de Magini, cinq adressées à lui et, en outre, son testament tiré des Archives de Bologne.

Un second appendice donne, avant un index des noms propres, la bibliographie des Ouvrages de Magini, qui ne comprend pas moins de soixante-cinq numéros, correspondant à environ une vingtaine d'œuvres distinctes et la plupart considérables. Les autres numéros correspondent à des rééditions ou à des contrefa-

---

(1) Son épitaphe, à Bologne, affirme qu'il avait prédit l'année de sa mort, et cette assertion est confirmée d'ailleurs. La réputation de Magini comme astrologue fit d'ailleurs, après sa mort, séquestrer par le Saint-Office ses papiers et manuscrits, qui furent dès lors perdus, sauf de très rares exceptions, comme celle du Volume publié par M. Favaro.

(2) Comme l'étaient au reste, plus ou moins complètement, quelques-unes des Lettres du manuscrit des Malvezzi.

çons; mais le simple aperçu de cette bibliographie témoigne assez, d'une part, de l'activité singulière que déployait Magini, de l'autre, du succès de ses Livres.

Notre calculateur ne s'est au reste guère préoccupé des Mathématiques qu'au point de vue de leurs applications; mais ses efforts, pour abréger les tâches qu'il entreprenait, ont souvent été heureux. Il a notamment mérité d'être cité par Chasles dans son *Aperçu historique* (2e éd., p. 55) comme ayant un des premiers appliqué et élucidé les principes de Viète pour la résolution des triangles sphériques, mais il est inexact de dire, comme M. Marie (*Histoire des Sciences mathématiques et physiques*, t. III, p. 91), qu'il ait écrit un commentaire sur Viète. Malheureusement pour lui, l'emploi des logarithmes allait bientôt rendre inutile la plupart de ses artifices les plus ingénieux, de même que toutes les Tables qu'il avait construites.

Magini ne s'est pas seulement occupé de Trigonométrie sphérique, mais, sous les titres *De planis triangulis* et *De dimetiendi ratione,* il a écrit un Traité de Trigonométrie rectiligne appliquée le plus complet et le plus scientifique qui ait existé de son temps, avec des Tables très étendues de carrés, de sinus, tangentes et sécantes.

Il a inventé pour les opérations sur le terrain un quadrant assez ingénieux, qu'il a appelé *planisphère universel,* et qu'il se proposait de décrire, en même temps qu'un autre, le quadrant directeur universel, et en général tous les autres instruments mathématiques, dans un Ouvrage en douze Livres accompagné de planches. Il paraît avoir exécuté ce projet et son manuscrit aurait même échappé aux revendications du Saint-Office; mais il est aujourd'hui perdu et rien n'a été publié. Il n'y a cependant pas d'Ouvrage de Magini qui vaudrait celui-là, à nos yeux.

Ce qui a manqué surtout à notre astronome, c'est, comme le dit très bien M. Favaro, l'intuition des temps nouveaux. C'était l'époque où les découvertes de Neper, de Galilée, de Kepler préparaient une évolution décisive; Magini ne l'a pas soupçonnée ou s'est montré hostile; même pour Copernic, s'il a adopté ses hypothèses, c'est uniquement parce que les Tables de Rheinhold (*Prutenicæ*) étaient plus exactes que toutes les autres antérieures; mais il a rejeté le système pour s'en forger un particulier. D'autre

part, l'étude du ciel n'a pas pour but, à ses yeux, de découvrir les lois de la nature : c'est l'astrologie judiciaire qui est sa pensée de derrière la tête; c'est à en faciliter les pratiques qu'il s'applique surtout; c'est pour cet usage qu'il cherche à calculer des éphémérides aussi exactes que possibles. Ajoutons, pour être juste, que c'était alors l'Astrologie qui faisait vivre les savants et leurs éditeurs. P. T.

MÉLANGES.

THÉORÈME SUR UNE ÉQUATION LINÉAIRE DU SECOND ORDRE;

PAR M. ERNEST MALO,
Capitaine du Génie.

L'intégrale

$$\int [(x-a)(x-b)u'' + (\overline{\alpha'+\beta'+1}\,x - \gamma')u' + \alpha'\beta' u]y\,dx,$$

où u est une fonction quelconque, y la fonction définie par l'équation

$$(x-a)(x-b)y'' + [(\alpha+\beta+1)x - \gamma]y' + \alpha\beta y = 0,$$

et où l'on a posé

$$\alpha' = 1-\alpha, \qquad \beta' = 1-\beta, \qquad \gamma' = 2(a+b)-\gamma,$$

est toujours exprimable en termes finis, sa valeur étant

$$(x-a)(x-b)yu' - [(x-a)(x-b)y' + (\overline{\alpha+\beta-1}\,x - \gamma + a + b)y]u.$$

Ainsi, pour

$$\begin{array}{llll} \alpha = -n, & \beta = n+1, & \gamma = 0, & a = -b = 1; \\ \alpha' = n+1, & \beta = -n, & \gamma' = 0 & \text{et} \quad y = X_n, \end{array}$$

$$\int [(x^2-1)u'' + 2xu' - n(n+1)u]X_n\,dx = (x^2-1)(X_n u' - X'_n u),$$

d'où l'on peut assez facilement conclure, par exemple,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X_{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi\left(\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2.$$

Cette propriété a son analogue dans tous les ordres à l'égard des

solutions y de l'équation

$$\Sigma\Phi_i(x)\,D_x^i y = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

$\Phi_i(x)$ étant un polynôme entier en x du degré i.

LA TECHNOLOGIE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE;

PAR M. P. TANNERY.

1. Après avoir défini le sens des termes *éléments* et *élémentaire*, Proclus intercale dans son Prologue un éloge de l'œuvre d'Euclide. Ce morceau me paraît également emprunté à Geminus; je remarque notamment que l'on y parle de divers Traités élémentaires faisant concurrence à celui d'Euclide, tandis qu'au temps de Proclus, tous ces Traités, dont nous n'avons aucune trace, avaient, sans aucun doute, déjà disparu. Au reste, voici la traduction de ce fragment.

Proclus (p. 73,15-75,3).

« Il est difficile, dans chaque Science, de choisir et de disposer dans l'ordre convenable les éléments, d'où procède et où se ramène tout le reste. De ceux qui s'y sont essayés, les uns ont grossi leur Recueil, les autres l'ont diminué; les uns ont employé des démonstrations abrégées, les autres ont indéfiniment allongé leur exposition; les uns ont évité la réduction à l'impossible, ceux-ci les *proportions* (¹), ceux-là ont imaginé des développements préliminaires contre ceux qui rejettent les principes; en un mot, les divers auteurs d'*Éléments* ont inventé nombre de systèmes différents.

» Dans un pareil Traité, il faut éviter tout superflu, — c'est un embarras pour l'étudiant; — réunir tout ce qui se tient ensemble et embrasse le sujet, chose essentielle pour la Science; — viser principalement et en même temps à la clarté et à la concision, car leurs contraires troublent l'intelligence; — chercher à donner aux théorèmes la forme la plus générale, — car le détail de l'ensei-

(¹) Le sens est douteux; j'ai admis qu'ἀναλογία était employé avec sa signification technique.

gnement en cas particuliers ne fait que rendre la connaissance plus difficile à acquérir.

» A tous ces points de vue, on trouvera que le Traité élémentaire d'Euclide l'emporte sur tout autre; si l'on en considère l'utilité, il aboutit à la théorie des figures primordiales ([1]); la clarté et l'enchaînement régulier sont assurés par la marche du plus simple au plus composé et par le fondement de la théorie sur les notions communes ([2]), la généralité des démonstrations par le choix du point de départ pour les questions à traiter, dans les théorèmes qui donnent les premiers principes. Quant à ce qu'il semble avoir omis, ou bien il s'agit de choses faciles à connaître par les mêmes moyens, comme la construction du triangle scalène ou isoscèle ([3]), ou bien de choses étrangères à un recueil d'Éléments, parce qu'elles y introduiraient une complication infinie; telles sont les *irrationnelles non classées* qu'Apollonius a longuement étudiées ([4]). Ou bien encore il s'agit de conséquences des causes exposées; ainsi les diverses espèces des angles ([5]) et des lignes; pour toutes ces questions qu'Euclide a laissées de côté et que d'autres ont traitées avec ampleur, la connaissance dérive des simples éléments. »

2. Après ce morceau, Proclus consacre la fin de son Prologue ([6]) à exposer comment la Géométrie a d'abord à exposer des principes, sans avoir à en rendre raison, pas plus que toute autre Science

---

([1]) ἀρχικῶν σχημάτων; Proclus entend par là très probablement les figures des polyèdres réguliers, attribuées par Platon aux particules des éléments ou principes reconnus par les anciens.

([2]) Pour axiomes, qui est le terme préféré par Proclus.

([3]) Allusion au Commentaire sur la construction du triangle équilatéral, I, 1 d'Euclide.

([4]) Sur cette suite au Xe Livre d'Euclide, il reste quelques indications dans un manuscrit arabe analysé par Woepcke (*Mémoires présentés à l'Académie des Sciences*, XIV, p. 658-720). Ce manuscrit contient la traduction de Commentaires écrits sur le Livre X par Vettius Valens, suivant la conjecture de Woepcke; par Pappus, suivant celle, plus probable, de Heiberg.

([5]) Les anciens considéraient les angles formés par des lignes courbes; en réalité, c'est donc au fond de la théorie des tangentes qu'il s'agit ici, en même temps que de celle des courbes.

([6]) Je fais abstraction des dernières pages, où il définit le but du Livre I et en indique les grandes divisions.

particulière, puis à développer les conséquences avec les démonstrations convenables.

Il distingue les principes en trois sortes d'après la nomenclature et les définitions d'Aristote (*Analyt. post*, I, 50), et sur ce point s'écarte évidemment de Geminus.

Il a d'ailleurs soin de marquer que les stoïciens appellent en général *hypothèses* les principes de la Science, et qu'ils donnent simplement au mot *axiome* le sens général d'affirmation.

Mais en reprenant la tradition d'Aristote, Proclus ne la comprend plus guère. Ainsi, pour retrouver dans Euclide les distinctions du Stagirite en *hypothèses, axiomes* et *postulats*, il commence par confondre les définitions avec les hypothèses, quoique Aristote ait bien soin de faire une différence (1). En adoptant la distinction péripatéticienne entre l'axiome et le postulat suivant le degré d'évidence, Proclus ne s'écarte pas moins de la terminologie d'Euclide. On voit assez combien son guide ordinaire lui fait défaut.

Heureusement, il le retrouve en arrivant à la distinction de la double forme des propositions en théorèmes et en problèmes. J'ai déjà rapporté la discussion entre Speusippe et Ménechme qui ne reconnaissaient : le premier que des théorèmes, le second que des problèmes.

Il convient de remarquer qu'une des raisons de cette discussion était que les géomètres n'avaient plus (2) de terme général pour désigner la proposition, soit théorème, soit problème. Le mot πρότασις, auquel correspond celui de *proposition*, signifiait exclusivement l'énoncé, et c'est par abus qu'il s'est étendu plus loin. Au reste, dans les manuscrits géométriques grecs les plus anciens, les propositions sont simplement numérotées, et les inscriptions de

---

(1) Ce que dit Aristote de l'hypothèse doit s'entendre principalement des postulats propres aux applications de la Géométrie, accessoirement des hypothèses faites pour les démonstrations de la Géométrie pure, au même sens où nous l'entendons actuellement. Cette double signification a subsisté pendant toute l'antiquité, comme elle subsiste encore actuellement.

(2) Les pythagoriciens avaient employé le mot σχῆμα, dont le sens s'était dès lors restreint à celui de figure. C'est notamment ce mot qui se trouve dans le dicton de l'école, rapporté par Proclus (84, 17-17) : σχᾶμα καὶ βᾶμα, ἀλλ' οὐ σχᾶμα καὶ τριώβολον, et qui signifierait, d'après lui : « Un théorème et un pas en avant (un progrès dans la Science), non pas un théorème et le triobole (l'argent nécessaire à la vie journalière). »

πρότασις, θεώρημα ou πρόβλημα, quand elles existent, sont récentes et n'appartiennent certainement pas au texte primitif (¹).

Comme Euclide n'a d'ailleurs pas l'habitude de renvoyer à une proposition précédente, comme, au contraire, pour s'appuyer sur ce qui est déjà connu, il en répète l'énoncé, on dirait qu'il ignore les mots de θεώρημα et de πρόβλημα, ou qu'il n'a pas voulu trancher une dispute de mots qui peut-être durait encore. Mais, comme l'indique Proclus, il marquait expressément la différence des deux sortes de propositions par la différence des formules finales, ὅπερ ἔδει δεῖξαι (ce qu'il fallait démontrer), ou ὅπερ ἔδει ποιῆσαι (ce qu'il fallait faire).

3. Geminus (Proclus, p. 79, 2-81, 4) reconnaît d'ailleurs le théorème comme plus général, en ce sens que la démonstration lui appartient en propre, et comme pouvant être indépendant de tout problème.

On distinguait le théorème et le problème en disant que, dans le second, l'attribut (τὸ κατηγορούμενον) donné à la matière n'était pas seul possible, mais encore son contraire : que, dans le premier, il se trouvait seul possible ; c'était la manière de reconnaître un théorème déguisé sous forme de problème, ou un problème énoncé comme théorème.

Ainsi, proposer d'inscrire dans un demi-cercle un angle droit n'est pas parler en géomètre, puisque tous les angles inscrits dans un demi-cercle sont droits ; au contraire, inscrire dans un cercle un triangle équilatéral est bien un problème, puisqu'on y peut inscrire un triangle qui ne soit pas équilatéral, etc.

D'après Zénodote, qui appartenait à la succession d'Œnopide et aux disciples d'Andron, le théorème cherche quelle est la propriété (σύμπτωμα) qui s'énonce de la matière en question, le problème cherche à quelle chose appartient telle propriété.

D'où, d'après Posidonius, on a défini le problème une propo-

(¹) Celles d'ὅροι (définitions), αἰτήματα (postulats), κοιναὶ ἔννοιαι (notions communes, axiomes) peuvent également laisser prise à quelques doutes. Mais Euclide n'aurait certainement renié aucune des deux premières ; la troisième, au contraire (voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. VIII, mai 1884), est une formule de l'époque où dominent les stoïciens.

sition (1) où l'on cherche oui ou non, le théorème une proposition où l'on cherche ce qu'est ou comment est ceci; la proposition théorétique n'en doit pas moins se formuler en affirmation, la problématique comme en cherchant; ex : *S'il est possible de construire un triangle sur telle droite;* car il y a différence entre chercher simplement et sans détermination s'il y a une perpendiculaire à partir de tel point sur telle droite, ou contempler ce qu'est la perpendiculaire.

L'origine que j'attribue à ce passage de Proclus n'est pas seulement indiquée par les citations qu'il renferme : elle est confirmée par le rapprochement avec le fragment de Carpos inséré dans le Commentaire sur I, 4, fragment où l'opinion de Geminus était contredite.

Fragment de Carpos d'Antioche

(*Proclus,* p. 241,19-243,11).

« Carpos le mécanicien, dans son *Traité astrologique,* a soulevé la question des problèmes et théorèmes; je n'examinerai pas maintenant s'il le faisait ou non à propos : en tout cas, abordant leur distinction, il dit que le genre des problèmes précède dans l'ordre celui des théorèmes, car c'est par les premiers que l'on trouve les sujets auxquels se rapportent les propriétés à étudier. L'énoncé du problème est simple et n'a pas besoin d'une intelligence exercée; il y est clairement demandé de faire telle ou telle chose : construire un triangle équilatéral (*Eucl.,* I, 1) ou bien, étant données deux droites, retrancher de la plus grande une égale à la moindre (I, 3); là, rien d'obscur, aucun besoin d'une attention minutieuse. L'énoncé du théorème est au contraire pénible, il réclame une grande exactitude et une critique savante, pour n'être ni trop étendu, ni insuffisant par rapport à la vérité, et on peut le voir même sur ce premier de tous les théorèmes (2).

» D'autre part, pour les problèmes, il y a un procédé général, celui de l'analyse, grâce auquel on peut obtenir la solution et aborder les questions les plus obscures; pour les théorèmes, au contraire, il est difficile de reconnaître la façon de s'y prendre, et

---

(1) Le terme de πρότασις reçoit déjà son extension abusive. Le texte intervertit les deux définitions; il faut supprimer πρόβλημα introduit à tort, p. 80, l. 22.

(2) *Eucl.*, I, 4 : Égalité de deux triangles ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux.

jusqu'à nous, dit-il, personne n'a pu donner une méthode générale pour leur invention ; ainsi, comme facilité, le genre des problèmes est plus simple. Après ces distinctions, il ajoute :

» C'est la raison pour laquelle, dans les *Éléments*, les problèmes précèdent les théorèmes ; c'est par eux que débutent les *Éléments*, et le premier théorème n'est placé qu'au quatrième rang ; ce n'est pas parce que les problèmes servent à la démonstration du suivant, mais parce que, même quand il n'y a besoin d'aucune proposition précédente, le théorème doit céder le pas aux problèmes, parce qu'ils sont problèmes. En fait, pour ce premier théorème, il se sert exclusivement des notions communes, et prend en quelque sorte le même triangle dans différentes situations ; la coïncidence et l'égalité complète qu'elle sert à démontrer dépendent donc d'une conception sensible et immédiatement claire. Cependant le premier théorème, même avec une pareille démonstration, est justement relégué après les problèmes. Ainsi on peut dire qu'en général ceux-ci ont le premier rang. »

En essayant de réfuter l'opinion de Carpos et de montrer qu'il n'a pas compris la véritable raison de l'ordre d'Euclide, Proclus ajoute : « Il est donc frivole d'attaquer Geminus comme ayant dit que le théorème est plus parfait que le problème ; car si c'est d'après l'ordre que Carpos donne la prééminence aux problèmes, c'est d'après le degré de perfection que Geminus l'accorde aux théorèmes ([1]). »

4. Il me semble enfin que c'est également à Geminus que Proclus a emprunté la technologie des diverses parties de la proposition, technologie qu'il a insérée dans le Commentaire sur I, 1. A la vérité, il devait sans doute la trouver, par exemple dans le Commentaire de Porphyre-Pappus, mais Geminus ne l'avait certainement pas omise, et d'ailleurs, dans Proclus, elle suit une allusion à la distinction des trois lignes *homéomères* ([2]) (p. 201,21-202,1),

---

([1]) Il est difficile de reconnaître si ce passage est suffisant pour considérer Carpos comme postérieur à Geminus, et comme l'ayant pris à partie ; peut-être Proclus visait-il un Commentaire comme celui de Pappus, où l'opinion de Carpos aurait été rapportée et opposée à celle de Geminus. Mais cette conjecture me paraît moins probable.

([2]) La droite, la circonférence et l'hélice. *Voir* p. 112.

théorie favorite du stoïcien, et une citation expresse de ce dernier [1].

En tout cas, cette technologie doit remonter au temps d'Euclide lui-même; car il en suit les divisions avec une telle régularité qu'on doit supposer que c'était dès lors une tradition consacrée par un long usage ; les termes employés plus tard pour désigner les diverses parties de la proposition devaient donc être déjà adoptés.

La connaissance de cette technologie est indispensable pour l'étude de la Géométrie grecque, car c'est d'après la fidélité avec laquelle les règles en sont observées que l'on distingue immédiatement ce qui est classique et ce qui ne l'est pas.

Les anciens distinguaient dans un problème ou théorème en général six parties : la protase, l'ecthèse, la condition (διορισμός), la construction, la démonstration et la conclusion. De ces six parties, la première et les deux dernières sont seules essentielles, les trois autres peuvent manquer accidentellement.

La *protase* est l'énoncé; ex., I, 1 : *Sur une droite limitée donnée construire un triangle équilatéral.* Cet énoncé est toujours conçu en termes généraux et sans aucune référence à une figure déjà tracée.

Mais toujours les théorèmes, et aussi le plus souvent les problèmes, ont un énoncé qui contient des données; les géomètres répétaient donc l'énoncé en déterminant d'abord les données sur la figure et en marquant ensuite ce qu'il fallait démontrer ou trouver. Ex., I, 1 : *Soit* AB *la droite donnée limitée. — Il faut, sur cette droite* AB, *construire un triangle équilatéral.*

Cette répétition de l'énoncé n'est omise que quand il n'y a pas de données à déterminer, par exemple pour les problèmes : *Construire un triangle isoscèle dont les angles à la base soient doubles de l'angle au sommet* (IV, 10). — *Trouver deux droites commensurables en puissance seulement et dont le rectangle soit un moyen* [= une racine quatrième] (X, 29). Dans ce cas-là, il n'y a, en effet, qu'à passer à la construction.

Or, Proclus distingue dans cette répétition deux parties : la première, qui expose quelles sont les données et qu'il appelle

---

[1] *Voir* le premier fragment d'Amphinome, que j'ai déjà rapporté.

ecthèse; la seconde, celle qui énonce ce qu'il s'agit de démontrer ou de faire, et qu'il appelle διορισμός.

La distinction de ces deux parties est bien marquée dans l'exemple donné; Euclide commence d'ailleurs régulièrement la seconde par δεῖ δή (il faut, à savoir ...) pour les problèmes; par λέγω ὅτι (je dis que ...) pour les théorèmes.

Mais Proclus, ou plutôt son guide, paraît ici avoir abusivement employé, pour désigner la conclusion de l'ecthèse, un terme qui devait s'appliquer à toute autre chose. Au moins, dans le langage de Pappus, le διορισμός est exclusivement l'énoncé de la condition nécessaire pour qu'un problème soit possible. Ce διορισμός, dont on regardait le platonicien Léon comme l'inventeur, devait, dans tous les cas où il y avait lieu de le considérer, suivre immédiatement la *protase*. Ex., I, 22 : (Protase) *Avec trois droites, respectivement égales à trois droites données, former un triangle.* — (Condition ou διορισμός) *Il faut que la somme de deux quelconques de ces droites données soit supérieure à la troisième.* Naturellement, dans l'*ecthèse* qui suit, on marque que la condition est satisfaite par les données (1).

Après la répétition de l'énoncé, vient régulièrement la construction (κατασκεύη) qui achève l'explication de la figure, commencée dans l'*ecthèse*, et indique le tracé des diverses lignes nécessaires pour la solution du problème ou la démonstration du théorème. Cette partie peut manquer, lorsque la figure est déjà complètement décrite dans l'*ecthèse*.

La construction peut offrir différents cas, lorsque les déterminations des données par l'ecthèse sont susceptibles de certaines variations. Tantôt les géomètres anciens traitaient explicitement ces cas, lorsqu'ils donnent lieu à des démonstrations différentes; tantôt ils se contentaient de tracer les différentes figures auxquelles s'appliquaient la même construction et la même démonstration.

Sur la démonstration proprement dite, Proclus fait une distinction entre le cas où elle est faite d'après la cause même (nous disons quand nous apercevons la véritable raison de la chose) et le cas où elle s'appuie sur ce qu'il appelle τεκμήρια, c'est-à-dire des

(1) L'énoncé du διορισμός commence par δεῖ δή de même que la conclusion de l'ecthèse dans les problèmes; cette ressemblance grammaticale a pu être l'origine de la dénomination abusive adoptée par Geminus.

preuves plus ou moins indirectes ([1]). Il cite comme exemple du second la démonstration de l'égalité à deux droits de la somme des angles d'un triangle, où l'on a recours à la considération d'un angle extérieur.

La conclusion (συμπέρασμα) consistait, après l'achèvement complet de la démonstration, à répéter l'énoncé en y ajoutant *donc* (ἄρα). Pour les théorèmes, la répétition porte sur la *protase* qui reparaît intégralement, si longue qu'elle soit, après quoi vient la formule consacrée : *ce qu'il fallait démontrer*. Pour les problèmes, c'est l'*ecthèse* qui est retournée. *Ex.* : pour I, 1, après la fin de la démonstration, « donc les trois droites CA, AB, BC sont égales entre elles », vient la conclusion :

« Donc le triangle ABC est équilatéral et il est construit sur la droite limitée donnée AB; ce qu'il fallait faire. »

A tout le moins, c'est là l'usage d'Euclide; Proclus indique que l'habitude s'était introduite de faire en outre une seconde répétition sur la *protase*.

Il est à peine utile de remarquer combien ces répétitions successives de la conclusion, de l'ecthèse et de la protase alourdissent la forme euclidienne. La dernière est particulièrement fastidieuse, et elle a déjà disparu dans Archimède et Apollonius; elle ne se trouve même pas dans les textes d'Antolycus et d'Aristarque de Samos, qui, à la vérité, ont pu être refondus lors de la rédaction de la collection du *Petit astronome*. Mais, à part cette simplification, la forme euclidienne est restée absolument classique pendant toute l'antiquité.

5. Proclus définit ensuite divers termes techniques dont l'usage doit, en général, être considéré comme relativement récent, ou dont, au moins, nous ne sommes pas suffisamment autorisés à regarder les définitions comme empruntées à Geminus.

Il y a déjà, à la vérité, des *lemmes* dans les derniers Livres d'Euclide; mais l'inscription du mot dans les manuscrits ne nous est pas une garantie suffisante que l'auteur des *Éléments* les ait distingués comme tels; l'existence des lemmes est d'ailleurs, par

---

([1]) Cette distinction correspond à une formule aristotélique, mais détournée de son vrai sens, car elle s'applique proprement à la rhétorique. Rien n'empêche d'attribuer à Geminus ce que dit ici Proclus; cf. p. 69,11 et 365,1.

elle-même, une infraction à la règle d'après laquelle toute proposition invoquée doit avoir été préalablement démontrée.

Dans le cours d'une démonstration, on a besoin d'une relation dont la vérité n'apparaît pas comme douteuse, mais dont la preuve romprait le fil que l'on suit; on aurait dû l'établir auparavant, on la rejette plus loin « ὡς ἑξῆς δειχθήσεται » (comme il sera démontré ensuite). Voilà, dans une imperfection de la méthode suivie, l'origine du lemme; comme forme, et en raison de sa destination particulière, il apparaîtra donc le plus souvent comme un théorème sans protase et sans conclusion (1).

Plus tard, surtout sous la période gréco-romaine, c'est-à-dire après Geminus, alors que l'essor de la Géométrie fut arrêté et que l'on se mit, au lieu de pousser en avant, à étudier et à éplucher les écrits des grands mathématiciens de l'âge précédent, on s'occupa tout d'abord de rechercher les propositions invoquées expressément ou tacitement admises dans les démonstrations. Cette recherche était, d'ailleurs, d'autant plus utile qu'ils n'avaient pas eu l'habitude des renvois.

Naturellement, on trouva nombre de propositions de la sorte qui restaient à démontrer, soit que les auteurs les eussent négligées comme trop faciles, soit qu'on ne retrouvât pas les écrits du temps où elles avaient été démontrées. On se mit donc à compléter les démonstrations anciennes et ces compléments, qui furent appelés *lemmes* (2), servirent de point de départ aux Commentaires postérieurs, comme ceux d'Eutocius. On sait aussi que Pappus a fait un Recueil des lemmes composés sur les traités d'Analyse et que ce précieux Recueil forme le VIIe Livre de sa *Collection mathématique*. Enfin, un certain nombre de pareils lemmes, la plupart inédits, subsistent encore au milieu des scolies marginales sur les traités du *Petit Astronome*, ainsi que Hultsch l'a fait remarquer (3).

(1) La question des *lemmes* dans Euclide ne peut, au reste, être traitée à fond avant l'achèvement de l'édition critique entreprise par Heiberg.

(2) Dans le fragment relatif à Ménechme (p. 73,4) Geminus paraît entendre λῆμμα dans le sens général de proposition employée pour une démonstration, pour un synonyme de λαμβανόμενον, tandis qu'ici Proclus spécifie que ce mot ne doit se dire que des propositions non démontrées d'avance.

(3) Un certain nombre des *lemmes* qui figurent dans le texte actuel d'Euclide ne doit pas avoir une origine plus ancienne. Ce qu'ajoute Proclus sur cette question des *lemmes* (p. 211,12-212,4) semble bien montrer, d'une part, qu'il ne suit

Après les lemmes, Proclus cite encore le *cas* (πτῶσις), le *porisme*, l'*objection* (ἔνστασις) et la *réduction* (ἀπαγωγή).

La subdivision d'un théorème ou problème en plusieurs *cas* est étrangère à la forme vraiment classique; les anciens géomètres préféraient multiplier les énoncés quand il le fallait, mais il leur arrivait de faire des omissions; les auteurs de lemmes ont donc eu aussi à ajouter des cas qui, parfois, sont passés dans les textes eux-mêmes.

L'*objection* est une forme particulière de lemme et correspond également à une imperfection de la démonstration. En général, l'*objection*, qui donne son nom à la réfutation qui en est faite, tend à faire regarder la démonstration comme ne s'appliquant pas dans tous les cas; il s'agit de prouver contre elle que tel cas supposé ne peut avoir lieu, ou que néanmoins la démonstration reste valable.

L'ἀπαγωγή, par laquelle on ramène une question à une autre qui ne sera traitée qu'ensuite, est plutôt une imperfection de la Science; en tout cas, quoique bien connue avant Euclide, ainsi que le montre l'histoire du problème de la duplication du cube, elle est aussi étrangère à la Géométrie classique que les deux formes précédentes.

Il en est autrement du porisme. « On appelle ainsi, dit Proclus (p. 212, 12-17), certains problèmes tels que les *Porismes* écrits par Euclide. On emploie également ce terme dans un sens particulier lorsque, de ce qui a été démontré, résulte un théorème qui n'a pas été proposé et qui apparaît donc comme un surcroît de bénéfice de la démonstration scientifique. »

Au sujet du premier porisme [1], sur I, 15, Proclus revient, en d'autres termes, sur la même distinction; la seconde signification, qui correspond à celle de corollaire, ne souffre aucune difficulté, mais l'emploi du mot *porisme* dans ce sens par Euclide n'est pas plus assuré que celui du mot *lemme*.

Il y a, dans le texte des *Éléments*, nombre de corollaires accolés

---

plus Geminus, de l'autre, que, de son temps, la grande affaire des géomètres était l'invention (démonstration) de ces propositions auxiliaires. On l'avait même réduite en méthode, en y appliquant l'analyse, la division des cas et la réduction à l'impossible. Proclus cite en revanche un de ses contemporains, Kratistos, comme n'employant que sa perspicacité naturelle.

[1] Ce porisme paraît d'ailleurs ne pas appartenir à Euclide.

à la conclusion de diverses propositions et débutant par la formule : ἐκ δὴ τούτου φανερόν (il est clair par là); mais il faut ajouter que l'authenticité d'une bonne partie de ces corollaires est au moins douteuse, et que, pour la plupart des autres, loin de chercher à les distinguer de la conclusion, Euclide les intercale avant la formule de clôture « ce qu'il fallait démontrer (faire) ». En somme, chez lui, le porisme-corollaire apparaît plutôt comme une modification de la conclusion régulière que comme une proposition détachée (¹).

Quant au porisme-proposition, c'est un sujet qui appartient à la Géométrie supérieure, et que j'aurai l'occasion de traiter ultérieurement. Il me suffira donc, pour le moment, de rappeler ce que j'ai dit, à propos de la discussion entre Ménechme et Speusippe, de la nouveauté du mot au temps d'Euclide et de mentionner la signification que lui donne Proclus.

Il s'agit dans le porisme, non pas de démontrer, comme dans le théorème; non pas de construire, comme dans le problème, mais de trouver. Proclus donne comme exemple : « Trouver le centre d'un cercle donné », ou « Trouver la plus grande commune mesure de deux grandeurs commensurables données ». Logiquement, dès lors, le porisme, ainsi que l'a remarqué Heiberg, devait donc être un problème où εὑρεῖν figurait dans l'énoncé et dont ὅπερ ἐστὶν εὑρεῖν (ce qu'il fallait trouver) terminait la conclusion. S'il est vrai de dire que les problèmes de ce genre se transforment plus facilement en théorèmes, il faut néanmoins avouer que la distinction est passablement subtile, qu'elle est probablement postérieure à Euclide, et qu'elle ne détermine nullement la nature spéciale des propositions qu'il avait réunies dans ses trois Livres de *Porismes* (²).

Quoi qu'il en soit, ce que dit Proclus des porismes peut bien, exceptionnellement, remonter à Geminus, car il avait dû s'expliquer sur ce terme; et, d'autre part, Pappus, dans son Commentaire, devait sans doute s'exprimer comme dans sa *Collection mathématique*, c'est-à-dire en des termes tout différents.

(¹) Jamais, en tout cas, le corollaire classique ne doit être suivi d'une démonstration, si brève qu'elle soit.

(²) Ce serait donc une explication après coup d'un titre peut-être choisi parce que le sens en était plus ou moins vague; celui d'*Éléments* ne l'est guère moins en fait

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HALPHEN. — Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. *Première Partie.* Théorie des fonctions elliptiques et de leurs développements en séries. 1 vol. in-8°; VIII-492 p. Paris, Gauthier-Villars, 1886.

En ouvrant le Volume que M. Halphen vient de faire paraître, plus d'un lecteur a dû s'écrier : Enfin! voilà un Traité des fonctions elliptiques qui n'est pas une théorie des fonctions d'une variable imaginaire, voilà un Livre où la vieille Analyse reprend ses droits, et que Lagrange aurait lu avec plaisir.

Tous les géomètres, aujourd'hui, reconnaissent la fécondité des doctrines, la puissance des instruments que Cauchy a créés, que ses successeurs ont développés et perfectionnés; mais, si j'ose le dire, ces outils sont parfois trop puissants et les transformations qu'ils permettent d'opérer, trop rapides; on ne peut nier l'identité entre les conclusions et les prémisses, mais on n'en a pas conscience. Or c'est la conscience de se mouvoir dans l'identique qui fait la joie de l'algébriste et qui lui ôte toute inquiétude dans la possession d'une doctrine.

Il faut bien reconnaître aussi que, à contempler des vérités très générales, l'esprit ne s'habitue pas aux applications particulières et tend à s'énerver dans une sorte de jouissance et d'engourdissement métaphysiques.

Sans doute, on peut échapper à ce danger (les exemples illustres ne manquent pas) : il n'en est pas moins réel et ne se manifeste que trop chez les étudiants; ceux-ci éprouvent quelque ennui à redescendre des hauteurs où on les a fait monter, et leurs yeux se troublent à regarder de près les richesses du domaine qu'ils croyaient posséder, parce qu'ils pouvaient en embrasser d'un coup d'œil l'immense étendue : ces richesses, ils ne savent point en tirer parti; ils sont inhabiles à les manier. Qu'ils prennent M. Halphen pour guide, et ils apprendront à travailler véritablement une terre dont la fécondité est assurée et qui, sans doute, nous réserve encore bien des récoltes inattendues. Son Livre, en effet, est éminemment pratique; l'étude des formules est poussée jusqu'au bout; on connaît vraiment l'outil que l'on a en main et l'on est assuré de

l'usage qu'on peut en faire; on voit comment, dans les différents cas possibles, on devra réduire les formules en nombres, comment on obtiendra telle approximation que l'on voudra, comment, étant donné un problème dans la solution duquel apparaissent les fonctions elliptiques, on pourra discuter entièrement cette solution. A ces détails souvent minutieux, mais nécessaires, la théorie ne perd rien; elle reprend, dans les derniers Chapitres du Volume, toute son élévation; après avoir fait connaître au lecteur ces éléments analytiques dont quelques propriétés contiennent, pour ainsi dire, toute la théorie des fonctions elliptiques, M. Halphen montre comment on aurait pu partir de la considération de ces mêmes éléments et en déduire, en quelque sorte tout d'un coup, les théorèmes démontrés pas à pas dans les Chapitres précédents, assurément, il serait très légitime d'adopter un tel mode d'exposition, au lieu de l'indiquer; quelques lecteurs regretteront que M. Halphen ne l'ait pas fait et l'accuseront d'avoir poussé trop loin l'esprit de réaction; voici comment, dans sa Préface, il répond d'avance à cette critique attendue : « Les détails qu'exige l'unique considération des intégrales réelles sont, de toute façon, nécessaires; si, en se servant d'abord des intégrales imaginaires, on les évite dans la théorie générale, on est tenu de les aborder ensuite pour certaines applications. Sur ce point donc, je demande aux mathématiciens leur indulgence provisoire, jusqu'à la publication du second Volume. Ils pourront alors juger si le mode d'exposition, adopté spécialement pour rendre les applications faciles, répond, autant que je le crois, au but proposé. »

Je viens aux matières contenues dans le Livre et à l'ordre suivi par l'auteur.

M. Halphen a adopté, sauf des changements insignifiants, les notations de M. Weierstrass. Je crois bien qu'on doit accorder qu'il a eu raison, et que ce système de notations introduit une plus grande symétrie dans l'exposition et dans les formules.

On sait que l'illustre géomètre allemand a cru devoir consacrer une partie de ses forces à l'établissement de ce système : il a été rendu compte dans le *Bulletin* de la belle et utile publication que M. Schwarz a entreprise. Espérons que les *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Functionen* et le *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications* fixeront défi-

nitivement ces notations, qu'aucun progrès ultérieur n'amènera quelque nouvelle modification et ne forcera les mathématiciens à changer encore des habitudes parfois péniblement acquises.

L'Ouvrage contient quatorze Chapitres : je vais essayer d'indiquer rapidement les matières qu'ils contiennent.

Chapitre I. — M. Halphen a pris pour point de départ la considération de la courbe obtenue en menant par un point fixe C intérieur à un cercle fixe des cordes variables et en prenant, sur chacune d'elles, à partir du point C, des longueurs inversement proportionnelles aux racines carrées de ces cordes; à chaque point du cercle correspond une corde passant par ce point et, sur cette corde, le point obtenu par la construction précédente, situé entre le point C et le point du cercle; à un arc du cercle correspond l'aire d'un secteur de la courbe et inversement; si l'on prend cette aire pour l'argument u, l'arc correspondant du cercle est, à un facteur constant près, l'amplitude correspondante; de là se déduisent immédiatement les quantités $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, k, K, qui, toutes, s'interprètent géométriquement; les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ sont définies pour toutes les valeurs réelles de l'argument; la période réelle $4\mathrm{K}$ est mise en évidence, k^2 est positif et plus petit que un.

De cette définition résultent géométriquement les propriétés relatives aux dérivées, à l'addition de K à l'argument et les formules relatives à l'addition des arguments pour les fonctions sn, cn, dn. L'auteur introduit ensuite la fonction pu de M. Weierstrass par la formule

$$pu = -\frac{1+k^2}{3\lambda} + \frac{1}{\lambda \operatorname{sn}^2 \frac{u}{\sqrt{\lambda}}},$$

où λ est une constante positive; cette fonction vérifie l'équation différentielle

$$y'^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3;$$

les racines du polynôme du troisième degré qui figure dans le second membre sont réelles, on les désignera dans ce qui suit par e_1, e_2, e_3, en supposant

$$e_1 > e_2 > e_3.$$

Inversement, si l'on se donne les quantités g_2, g_3 satisfaisant à la condition de réalité des racines, on peut déterminer les quantités k, λ, et la fonction $\wp$ [ou plus explicitement $\wp(u; g_2, g_3)$] peut être regardée comme définie dans ce cas; la période 2ω est donnée par la formule $\omega = K\sqrt{\lambda}$, les propriétés relatives soit à l'addition de ω, soit à l'addition des arguments, se déduisent pour la fonction $\wp$ des formules relatives aux fonctions sn, cn, dn. Le théorème d'addition de la fonction $\wp$ est donné sous la forme suivante. La relation

$$u + u_1 + u_2 = 0$$

est traduite par ce fait que u_1, u_2, u_3 sont solutions de l'équation

$$a\wp u + b = \wp' u:$$

c'est l'énoncé même qui résulterait du théorème d'Abel.

Dès ce Chapitre, l'auteur insiste avec soin sur la *dégénérescence des fonctions elliptiques,* c'est-à-dire sur ce qu'elles deviennent quand on suppose que k^2 tend vers zéro ou vers un, ou bien que g_3 tend vers zéro.

Chapitre II. — Il résulte de la définition de la fonction $\wp$ qu'elle satisfait à l'*équation d'homogénéité*

$$\wp(u\sqrt{\mu}, g_2, g_3) = \frac{1}{\mu}\wp(u; g_2\mu^2, g_3\mu^3);$$

cette équation n'a jusqu'à présent de sens que si μ est positif, mais elle conduit à prendre la fonction

$$-\wp(u, g_2, -g_3)$$

comme étant la définition de la fonction

$$\wp(ui; g_2, g_3),$$

ou la définition de la fonction $\wp$ pour les valeurs purement imaginaires de l'argument; par le changement de g_3 en $-g_3$ dans les formules précédemment établies, k^2 se change en $k'^2 = 1 - k^2$, λ reste inaltéré; en désignant par K' l'analogue de K, on introduit la demi-période ω' par la relation

$$\frac{1}{i}\omega' = K'\sqrt{\lambda},$$

et l'on a

$$\wp(\omega;\, g_2,\, g_3) = e_1, \qquad \wp(\omega';\, g_2,\, g_3) = e_3.$$

Le théorème d'addition, regardé comme vrai quand l'un des arguments est réel et l'autre purement imaginaire, permet maintenant de définir la fonction $\wp$ pour un argument quelconque, en supposant toujours positif le discriminant

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2;$$

il est ensuite facile d'étendre à cette fonction les formules relatives à l'homogénéité, aux dérivées, à l'addition des arguments, à l'addition des demi-périodes ω, ω', $\omega + \omega'$; enfin la notion de double périodicité est acquise. On prouve par une analyse directe que la fonction $\wp$ passe par toutes les valeurs réelles ou imaginaires; la définition complétée de la fonction $\wp$ conduit maintenant à la définition des fonctions sn, cn, dn pour les valeurs imaginaires de l'argument, à la considération des six modules conjugués et aux formules qui les concernent. Le Chapitre se termine par une étude détaillée de la façon dont varient g_2 et g_3 quand on fait varier k^2, et de la façon dont varient les périodes ω et ω' avec g_2, g_3, étude que complètent les expressions asymptotiques des périodes quand le discriminant devient nul.

Chapitre III. — Les propriétés élémentaires de la fonction $\wp$ sont maintenant établies dans le cas où le discriminant du polynôme

$$f(y) = 4y^3 - g_2 y - g_3$$

est positif; pour épuiser le cas où les invariants g_2, g_3 sont réels, il reste à considérer le cas où les racines du polynôme $f(y)$ sont l'une réelle, les deux autres imaginaires conjuguées; on convient alors de désigner par e_2 la racine réelle, par e_1, e_3 les racines imaginaires, et l'on suppose que, dans e_1, le coefficient de la partie imaginaire est positif; si l'on pose

$$\omega_2 = \int_{e_2}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{f(y)}},$$

la fonction $\wp u$ est alors définie, pour toutes les valeurs de u com-

prises dans l'intervalle $(0, \omega_2)$ par la formule

$$u = \int_{\wp u}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{f(y)}},$$

puis, pour toutes les valeurs réelles de u, par l'équation

$$\wp(2m\omega_2 \pm u) = \wp u,$$

où m désigne un nombre entier quelconque, positif ou négatif. L'équation d'homogénéité subsiste encore, en sorte que, si l'on pose

$$\bar{\wp} u = \wp(u, g_2, -g_3),$$
$$f_1(y) = 4y - g_2 y + g_3,$$
$$\omega'_2 = i\int_{-e_2}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{f_1(y)}},$$

on est amené à définir la fonction $\wp$, pour les valeurs purement imaginaires de la variable, par la relation

$$\wp(iu) = -\bar{\wp} u.$$

Le théorème d'addition subsistant pour la fonction $\wp$ (à discriminant négatif), dans le cas des variables réelles, permet, au moyen de la même convention que dans le Chapitre précédent, de définir la fonction $\wp$ pour une valeur imaginaire quelconque de l'argument; toutes les questions traitées dans le Chapitre II sont alors reprises à nouveau; il suffira de signaler la différence essentielle entre les deux cas : les quantités qui jouent le même rôle dans le second cas que les quantités ω, ω', $\omega'' = \frac{\omega + \omega'}{2}$ dans le premier, sont

$$\omega_1 = \frac{\omega_2 - \omega'_2}{2}, \quad \omega_2, \quad \omega_3 = \frac{\omega_2 + \omega'_2}{2},$$

en sorte que, dans le cas du discriminant négatif, les infinis de la fonction $\wp$ sont donnés par la formule

$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2,$$

où m_1, m_2 sont des nombres entiers, comme dans le cas du déterminant positif, par la formule

$$u = 2m\omega + 2m'\omega';$$

on a, dans l'un des cas,

$$\wp\omega_1 = e_1, \qquad \wp\omega_2 = e_2, \qquad \wp\omega_3 = e_3$$

et, dans l'autre,

$$\wp\omega = e_1, \qquad \wp\omega' = e_2, \qquad \wp\omega'' = e_3,$$

en sorte que, pour une demi-période quelconque ω_1, ω_2, ω_3, ou ω, ω', ω'', la dérivée $\wp' u$ de la fonction $\wp u$ est nulle.

Chapitre IV. — Ce Chapitre traite de propriétés où il n'y a pas lieu, en général, de s'occuper du signe du discriminant; ω, ω', ω'' y désignent en général trois demi-périodes quelconques. On s'y occupe d'abord de la multiplication de l'argument pour un nombre entier n; après avoir établi l'existence d'une fonction $\psi_n(u)$ qui s'annule quand on prend pour u la $n^{\text{ième}}$ partie d'une période et qui est un polynôme entier en $\wp u$ si n est impair, un tel polynôme multiplié par $\wp' u$ si n est pair, l'auteur établit la formule

$$\wp(nu) - \wp u = -\frac{\psi_{n+1}(u)\,\psi_{n-1}(u)}{\psi_n^2(u)},$$

et donne divers procédés pour le calcul des fonctions ψ_n.

La partie la plus intéressante de ce Chapitre concerne le problème de l'inversion. M. Halphen a exposé d'une façon magistrale la belle méthode dont on doit le principe à M. Bruns et qui permet de ne pas résoudre le polynôme du quatrième degré dont on veut exprimer la racine carrée au moyen des fonctions elliptiques : cette méthode repose sur ce fait que l'on vérifie l'équation

$$Y^2 = y^4 - 6y^2\wp v + 4y\wp' v + g_2 - 3\wp^2 v,$$

en posant

$$Y = \wp u - \wp(u+v),$$

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}.$$

M. Halphen montre comment cette méthode permet d'obtenir l'expression des quatre racines d'un polynôme quelconque du quatrième degré, comment se manifeste la réalité ou la non-réalité de ces racines, comment enfin on peut, sur les expressions des racines, reconnaître leur ordre de grandeur.

Chapitre V. — Ce Chapitre est consacré à la fonction que M. Halphen désigne par ζu, sans doute en raison de la liaison étroite qu'elle présente avec la fonction $Z(u)$ de Jacobi; elle est d'abord définie comme ayant pour dérivée $-\wp u$ et comme s'annulant pour $u = 0$, quand on en a préalablement retranché $\frac{1}{u}$.

L'extension au cas où la variable est imaginaire est ensuite obtenue par la voie précédemment décrite pour la fonction $\wp u$. A cette nouvelle fonction se rattachent les deux constantes η, η', définies par les égalités

$$\eta = \zeta\omega, \qquad \eta' = \zeta\omega'$$

et liées par la relation

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{i\pi}{2}.$$

M. Halphen s'occupe ensuite de la recherche d'une fonction de la variable réelle u qui admette pour dérivée $\wp(u - v)$, v étant une constante. La quantité que l'on a à intégrer, pour répondre à la question, est différente suivant les valeurs de v et les limites de l'intégration, car il ne faut pas que la quantité sous le signe $\int$ devienne infinie; cette étude, faite avec le plus grand soin, permettra d'éviter toute ambiguïté dans les applications; l'auteur porte en particulier son attention sur la combinaison

$$\Phi(a, \alpha) = \int_0^\alpha [\zeta(a + i\alpha) + \zeta(a - i\alpha)]\, d\alpha,$$

où a et α sont des nombres réels; cette combinaison se rencontre continuellement quand on a à considérer des intégrales elliptiques de troisième espèce; à ce titre, elle méritait qu'on s'y arrêtât; mais, en outre, son étude est indispensable, du point de vue où s'est placé M. Halphen, pour étendre aux variables imaginaires la notion de la fonction σu.

Chapitre VI. — Cette fonction σu joue, comme on sait, un rôle central dans la doctrine de M. Weierstrass; M. Halphen la définit pour les variables réelles par l'équation différentielle

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \zeta u$$

et par la condition $\sigma 0 = 1$; la propriété

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v} = \wp v - \wp u$$

résulte alors immédiatement du théorème d'addition pour la fonction $\wp$; la définition de la fonction σ pour les valeurs purement imaginaires de la variable résulte encore de l'équation d'homogénéité; mais l'extension de cette définition aux variables imaginaires quelconques est un peu plus compliquée : on y arrive au moyen des deux équations

$$\sigma(a+i\alpha)\sigma(a-i\alpha) = \sigma^2 a\,\sigma i\alpha(\wp i\alpha - \wp a),$$
$$\frac{\sigma(a+i\alpha)}{\sigma(a-i\alpha)} = e^{\Phi(a,\alpha)},$$

où a, α sont des nombres réels, et l'étude antérieure de la fonction $\Phi(a, \alpha)$ permet d'établir l'extension des théorèmes démontrés pour les arguments réels ou purement imaginaires, ainsi que les formules relatives à l'addition d'une demi-période.

Jetant ensuite un coup d'œil en arrière, M. Halphen montre comment les propriétés de la fonction σ engendrent en quelque sorte les propriétés de la fonction $\wp$: la façon dont la fonction σ se comporte par rapport aux périodes, la possibilité de développer cette fonction en une série procédant suivant les puissances entières de u, le théorème

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v} = \frac{d^2 \log \sigma u}{du^2} - \frac{d^2 \log \sigma v}{dv^2}$$

et l'équation

$$\wp u = -\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2}$$

interviennent seuls et permettent d'établir en particulier la relation entre $\wp u$ et $\wp' u$. D'un autre côté, l'avant-dernière équation conduit à l'identité suivante, dite équation à trois termes,

$$\begin{aligned}&\sigma(a-b)\sigma(a+b)\sigma(c-d)\sigma(c+d)\\ &+\sigma(b-c)\sigma(b+c)\sigma(a-d)\sigma(a+d)\\ &+\sigma(c-a)\sigma(c+a)\sigma(b-d)\sigma(b+d) = 0,\end{aligned}$$

et cette équation, jointe à la condition $\sigma'(0) = 1$, caractérise entièrement la fonction σ.

Les formules relatives à l'addition d'une demi-période conduisent à adjoindre à la fonction impaire σ les trois fonctions paires

$$\sigma_1 u = \frac{\sigma(\omega + u)}{\sigma\omega} e^{-\eta u},$$

$$\sigma_2 u = \frac{\sigma(\omega + \omega' + u)}{\sigma(\omega + \omega')} e^{-(\eta + \eta')u},$$

$$\sigma_3 u = \frac{\sigma(\omega' + u)}{\sigma\omega'} e^{-\eta' u},$$

les quantités $\sqrt{\wp u - e_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ s'obtiennent en divisant $\sigma_\alpha u$ par σu.

Chapitre VII. — Ce Chapitre se rapporte à la décomposition en éléments simples et en facteurs. L'auteur établit tout d'abord les deux formes fondamentales sous lesquelles on peut mettre une fonction rationnelle de $\wp u$ et de $\wp' u$:

1° Une telle fonction peut être mise sous la forme d'une somme de termes L + P, à savoir :

$$\mathrm{L} = l_1 \zeta(u - v_1) + l_2 \zeta(u - v_2) + l_3 \zeta(u - v_3) + \ldots,$$
$$\mathrm{P} = c + \Sigma m_i p^{(i)}(u - v);$$

les coefficients l, m, c sont des constantes, et l'on doit avoir

$$l_1 + l_2 + l_3 + \ldots = 0.$$

2° On peut aussi mettre une telle fonction sous la forme

$$(\sigma) \qquad \mathrm{A} \frac{\sigma(u - v_1)\sigma(u - v_2)\ldots\sigma(u - v_n)}{\sigma(u - v'_1)\sigma(u - v'_2)\ldots\sigma(u - v'_n)},$$

en supposant

$$(v) \qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_n = v'_1 + v'_2 + \ldots + v'_n;$$

réciproquement, l'expression précédente, sous la condition qu'on vient d'écrire, est une fonction rationnelle de $\wp u$ et de $\wp' u$. On déduit de là, en écrivant que la somme des résidus de l'expression (σ) est nulle, une relation très générale, entre $2n$ arguments $v_1, v_2, \ldots, v_n; v'_1, v'_2, \ldots, v'_n$ liés par l'équation (v) : c'est de cette relation que M. Halphen déduit la formule de décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, fonctions dont l'étude termine le Chapitre.

Chapitre VIII. — Ce Chapitre se rapporte aux séries $\mathfrak{S}$; voici comment elles sont introduites : Si l'on cherche un mode de développement qui mette en évidence, pour une fonction σu, les propriétés que définissent les équations suivantes :

$$\sigma(u+2\omega) = -\sigma u e^{2\eta(u+\omega)},$$
$$\sigma(u+2\omega') = -\sigma u e^{2\eta'(u+\omega')},$$

on voit sans peine que, en posant

$$q = e^{-\frac{\pi\omega}{i\omega}},$$

le problème revient à déterminer une fonction impaire de z qui jouisse de la propriété

$$\varphi(qz) = -\frac{1}{qz^2}\varphi(z);$$

cette équation suggère l'idée d'un développement en une série procédant suivant les puissances entières positives et négatives de z, développement que la méthode des coefficients indéterminés permet de réaliser aisément et qui est convergent pour toute valeur de z, si la valeur absolue de q est plus petite que un. On est amené ainsi à considérer la série

$$F(u) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^m x^{(2m+1)^2} y^{(2m+1)u},$$

en posant

$$x = q^{\frac{1}{4}}, \qquad y = e^{\frac{i\pi}{2\omega}}, \qquad z = y^u;$$

sous cette forme, l'identité

$$\begin{aligned} &F(a-b)F(a+b)F(c-d)F(c+d) \\ &+F(b-c)F(b+c)F(a-d)F(a+d) \\ &+F(c-a)F(c+a)F(b-d)F(b+d) = 0 \end{aligned}$$

apparaît assez facilement par la simple multiplication des séries; dès lors, si l'on définit la fonction σu par la relation

$$\sigma u = e^{\frac{1}{2}\frac{\eta u^2}{\omega}} \times 2icq^{-\frac{1}{4}}F(u),$$

et, si l'on choisit les constantes η, c de manière que le développement de σu suivant les puissances ascendantes de u commence

par le terme u et manque de terme en u^3, on aura une fonction qui jouira des propriétés essentielles de la fonction σ et pourra être identifiée avec elles : ces résultats acquis, l'introduction des quatre fonctions ϑ et l'établissement de leurs relations avec les fonctions σ ne souffrent aucune difficulté. Les notations adoptées sont, ici encore, celles de M. Weierstrass, c'est-à-dire que, en posant $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$, les quatre fonctions sont représentées par les symboles

$$\vartheta_\alpha v, \quad \vartheta_\alpha(v, q), \quad \vartheta_\alpha(v \mid \tau) \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 0),$$

dont chacun doit être employé selon les variables que l'on veut mettre en évidence, et que l'on a

$$\begin{aligned}
\vartheta_1 v &= 2\Sigma(-1)^{m-1} q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2} \sin(2m-1)\pi v = \mathrm{H}_1(2\mathrm{K}v),\\
\vartheta_2 v &= 2\Sigma q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2} \cos(2m-1)\pi v \qquad\qquad = \mathrm{H}(2\mathrm{K}v),\\
\vartheta_3 v &= 1 + 2\Sigma q^{m^2} \cos 2m\pi v \qquad\qquad = \Theta_1(2\mathrm{K}v),\\
\vartheta_0 v &= 1 + 2\Sigma(-1)^m q^{m^2} \cos 2m\pi v = \Theta(2\mathrm{K}v);
\end{aligned}$$

$$\lambda\sigma u = 2\omega\frac{\vartheta_1 v}{\vartheta_1'}, \qquad \lambda\sigma_1 u = \frac{\vartheta_2 v}{\vartheta_2},$$

$$\lambda\sigma_2 u = \frac{\vartheta_3 v}{\vartheta_3}, \qquad \lambda\sigma_3 u = \frac{\vartheta_0 v}{\vartheta_0};$$

dans ces dernières formules, on a fait, pour abréger,

$$\lambda = e^{-\frac{1}{2}\frac{\pi u^2}{\omega}}, \qquad v = \frac{u}{2\omega},$$

et l'on a désigné par ϑ_1', ϑ_2, ϑ_3, ϑ_0 ce que deviennent, pour $v = 0$, les fonctions

$$\frac{d\vartheta_1 v}{dv}, \ \vartheta_2 v, \ \vartheta_3 v, \ \vartheta_0 v.$$

On trouvera dans ce même Chapitre les formules relatives à l'addition des périodes et demi-périodes dans les fonctions $\vartheta_\alpha v$, et toutes les relations élémentaires qui relient entre elles les diverses fonctions et quantités précédemment introduites. La théorie de la transformation est touchée pour ce qui concerne le changement des périodes ω, ω' en ω, $\omega + \omega'$, ou en ω' et $-\omega$, ce qui fournit le tableau des formules relatives au changement de τ en $\tau + 1$, ou de v et τ, en $\frac{v}{\tau}$ et $-\frac{1}{\tau}$, formules si essentielles pour la théorie et si

importantes pour le calcul numérique. De même que dans les *Formeln und Lehrsätze*, tous les détails qui concernent les applications numériques, pour le cas où les invariants g_2, g_3 sont réels, sont donnés avec le plus grand soin, en sorte que le lecteur est véritablement en mesure de traiter ces applications par la voie la plus courte. Enfin M. Halphen signale, en terminant, l'extension des résultats théoriques précédemment obtenus au cas où les invariants g_2, g_3 sont imaginaires. Arrivé là, le lecteur peut se regarder comme étant vraiment en possession des éléments de la théorie des fonctions elliptiques.

Chapitre IX. — M. Halphen y donne d'abord l'expression des dérivées partielles de la fonction $\wp u$ par rapport aux invariants g_2, g_3 : il est aisé d'en déduire les dérivées de ζu et de σu par rapport à g_2, g_3; on arrive ainsi en particulier à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \sigma u}{\partial u^2} - 12 g_3 \frac{\partial \sigma u}{\partial g_2} - \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial \sigma u}{\partial g_3} + \frac{1}{12} g_2 u^2 \sigma u = 0,$$

qui permet de calculer facilement les coefficients du développement de σu suivant les puissances entières et positives de u. Les questions analogues sont traitées pour les autres fonctions σ; puis viennent les expressions

$$\begin{aligned}
\Delta \frac{\partial \omega}{\partial g_3} &= \frac{9}{2} g_3 \omega - 3 g_2 \eta, \\
\Delta \frac{\partial \omega}{\partial g_2} &= -\frac{1}{4} g_2^2 \omega + \frac{9}{2} g_3 \eta, \\
\Delta \frac{\partial \eta}{\partial g_3} &= \frac{1}{4} g_2^2 \omega - \frac{9}{2} g_3 \eta, \\
\Delta \frac{\partial \eta}{\partial g_2} &= -\frac{3}{8} g_2 g_3 \omega + \frac{1}{4} g_2^2 \eta
\end{aligned}$$

des dérivées des quantités ω, η; les équations hypergéométriques

$$\begin{aligned}
J(1-J)\frac{d^2 x}{dJ^2} + \frac{1}{6}(4 - 7J)\frac{dx}{dJ} - \frac{1}{144} x &= 0, \\
J(1-J)\frac{d^2 y}{dJ^2} + \frac{1}{6}(5 - 19J)\frac{dy}{dJ} - \frac{53}{48} y &= 0,
\end{aligned}$$

où J désigne l'invariant absolu,

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta},$$

et que vérifient les quantités

$$x = \omega \Delta^{\frac{1}{12}}, \qquad y = \eta \Delta^{-\frac{1}{12}}.$$

La première de ces équations a été donnée par M. Bruns. Les formules qui précèdent permettent d'obtenir les dérivées par rapport aux périodes ω, ω'; puis, pour les fonctions homogènes et de degré zéro par rapport à u, ω, ω', les dérivées par rapport à $\log q$, et l'on retombe ainsi sur l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + 4\pi^2 \frac{\partial z}{\partial \log q} = 0,$$

que vérifient les fonctions $\mathfrak{S}$, et qui, inversement, permet de retrouver le développement en série trigonométrique de la fonction σu et pourrait, ainsi, être prise comme le chemin qui conduit de la fonction σ à la fonction $\mathfrak{S}$. Notons encore dans le même Chapitre un paragraphe concernant une équation aux dérivées partielles, signalée par M. Kiepert et par M. Klein, qui permet de calculer les fonctions $\psi_n(u)$ qui se rencontrent dans la théorie de la multiplication, et un autre paragraphe relatif aux équations

$$\frac{d(x_2 + x_3)}{dt} = x_2 x_3,$$

$$\frac{d(x_3 + x_1)}{dt} = x_3 x_1,$$

$$\frac{d(x_1 + x_2)}{dt} = x_1 x_2,$$

vérifiées en posant

$$x_\alpha = \eta\omega + c_\alpha \omega^2 \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

$$t = \frac{4}{\pi^2} \log q.$$

Chapitre X. — Les équations du type hypergéométrique signalées plus haut fournissent à M. Halphen l'occasion d'indiquer à grands traits la théorie de ces équations. Il étudie ensuite avec détail les développements des périodes en fonction de l'invariant absolu J, dans le cas du discriminant positif et dans celui du discriminant négatif.

Chapitre XI. — C'est seulement dans ce Chapitre que M. Halphen établit les formes qui mettent en évidence la vraie nature des fonctions pu, ζu, σu; la formule fondamentale

$$pu = \frac{1}{u^2} + \sum_{w}\left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right],$$

où w doit prendre toutes les valeurs qu'on obtient en donnant dans $2m\omega + 2m'\omega'$ toutes les valeurs entières positives et négatives à m et à m' (sauf toutefois la combinaison $m = m' = 0$), est obtenue en décomposant en éléments simples l'expression $p(nu)$, qui, pour n entier, est une fraction rationnelle en pu, puis en faisant croître n indéfiniment. Cette formule permet ensuite d'obtenir les suivantes :

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \sum_{w}\left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right),$$

$$\sigma u = u\prod_{w}\left(1 - \frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}.$$

M. Halphen montre alors comment on peut prendre ces formules pour point de départ de la théorie, et comment elles manifestent les propriétés relatives à la périodicité; puis, considérant la fonction

$$\Phi(u) = \frac{\sigma(u-a')\sigma(u-b')\ldots\sigma(u-t')}{\sigma(u-a)\sigma(u-b)\ldots\sigma(u-t)},$$

où l'on suppose

$$a' + b' + \ldots + t' = a + b + \ldots + t,$$

il remarque que, en vertu de la nouvelle définition de la fonction σ, elle s'écrit

$$\Phi(u) = \frac{(u-a')(u-b')\ldots(u-t')}{(u-a)(u-b)\ldots(u-t)}$$
$$\times\prod_{w}\frac{(w-u+a')(w-u+b')\ldots(w-u+t')}{(w-u+a)(w-u+b)\ldots(w-u+t)}\,e^{\frac{v}{w^2}},$$

où l'on suppose

$$2v = a'^2 + b'^2 + \ldots + t'^2 - (a^2 + b^2 + \ldots + t^2):$$

si on limite les valeurs de

$$w = 2m\omega + 2m'\omega',$$

on a, dans le second membre, une fraction rationnelle en u; si l'on effectue la décomposition en éléments simples, et que l'on fasse croître indéfiniment m et m', on retombe sur la formule générale de décomposition en éléments simples de la fonction $\Phi(u)$ obtenue dans un Chapitre précédent : on obtient ainsi, comme cas particulier, la formule

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v} = \mathrm{p}v - \mathrm{p}u;$$

et l'on a maintenant tous les éléments nécessaires pour reconstruire à nouveau la théorie.

Chapitre XII. — Les expressions obtenues précédemment pour les fonctions σ permettent, en groupant les facteurs et en tenant compte des formules relatives à la décomposition des fonctions circulaires en produit infini, d'obtenir les expressions de ces fonctions sous formes de produits infinis simples; l'étude du polynôme limité

$$\varphi(z) = \Pi(q^p z + q^{-p} z^{-p})$$

$(p = \mu,\ \mu - 1,\ \mu - 2,\ \ldots,\ -\mu + 1,\ -\mu)$ conduit, en faisant croître p indéfiniment, aux séries ϑ.

Chapitre XIII. — Ce Chapitre se rapporte aux développements en séries trigonométriques. Le point de départ est la formule suivante, obtenue d'une façon très élémentaire,

$$\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u\,\sigma v} e^{\eta\frac{uv}{\omega}} = \frac{i\pi}{\omega}\left(\frac{1}{2}\,\frac{z+z^{-1}}{z-z^{-1}} + \frac{1}{2}\,\frac{t+t^{-1}}{1-t^{-1}}\right) - \Sigma q^{2nm}(z^{2n}t^{2m} - z^{-2n}t^{-2m}),$$

où n, m doivent prendre les valeurs $1, 2, 3, \ldots$, où l'on a posé, pour abréger,

$$z = e^{\frac{i\pi u}{2\omega}}, \qquad t = e^{\frac{i\pi v}{2\omega}},$$

et où, enfin, on suppose que les valeurs absolues de z et de t sont

comprises entre les valeurs absolues de q et de $\frac{1}{q}$; de cette formule s'en déduisent beaucoup d'autres, en particulier les développements trigonométriques de ζu, $\wp u$, $\log \sigma u$, des douze quotients

$$\sigma_\alpha u : \sigma_\beta u : \ldots.$$

Chapitre XIV. — Enfin on peut encore faire reposer la théorie des fonctions elliptiques sur la notion de double périodicité et la théorie des fonctions d'une variable imaginaire; sans développer cette méthode, M. Halphen a voulu en indiquer les points principaux.

L'intégration d'une fonction doublement périodique le long des côtés du parallélogramme des périodes montre que la somme des résidus est nulle; et ce résultat, une fois qu'on est en possession de l'élément simple, conduit immédiatement à la formule de décomposition due à M. Hermite.

L'auteur, dans le cours de son Ouvrage, avait montré trop de fois le rôle essentiel que cette formule doit jouer dans toute exposition de la théorie des fonctions elliptiques pour négliger de la tirer de sa vraie origine : il ne pouvait manquer non plus de signaler le parti qu'on peut tirer, pour une telle exposition, de ce théorème de Liouville : *Toute fonction transcendante entière doublement périodique est une constante;* il indique en particulier comment ce théorème pouvait conduire à la formule de M. Hermite.

Enfin, ce dernier Chapitre se termine par l'exposé des beaux résultats dus à M. Appell dans la théorie des fonctions de troisième espèce.

J'ai essayé, en suivant pas à pas l'auteur, de donner une idée de l'ordre qu'il a adopté dans son Livre et des riches matières qu'il a traitées; je ne puis que signaler la perfection et le fini des détails : c'est une œuvre achevée, dans toutes ses parties.

J. T.

MÉLANGES.

EXEMPLE D'UNE FONCTION QUI N'EXISTE QU'A L'INTÉRIEUR D'UN CERCLE;

PAR T.-J. STIELTJES.

La notion d'une fonction d'une variable imaginaire pour laquelle le domaine de la variable est nécessairement restreint par la nature même de la fonction est d'une si grande importance qu'il ne semble pas inutile de donner un exemple d'une telle fonction, même dans un Cours où il serait impossible d'exposer les recherches de MM. Weierstrass, Mittag-Leffler, Poincaré sur ce sujet.

Peut-être trouvera-t-on l'exemple suivant assez simple pour remplir ce but.

1. Soit a une quantité dont le module est égal à l'unité. On a

$$\frac{z}{a-z} = \frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2} + \frac{z^3}{a^3} + \cdots.$$

La série est convergente sous la condition $\operatorname{mod} z = \rho < 1$, et le cercle de convergence est un cercle C décrit de l'origine comme centre avec un rayon égal à l'unité.

En remplaçant chaque terme de la série par son module, on voit que

$$\operatorname{mod} \frac{z}{a-z} \leqq \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Prenons maintenant une suite infinie de quantités

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_n,$$

dont le module est égal à l'unité, et posons

$$f(z) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^3}\left(\frac{z}{a_n - z}\right). \tag{1}$$

En supposant $\operatorname{mod} z = \rho < 1$, la série est évidemment convergente et l'on a

$$\operatorname{mod} f(z) < \frac{\rho}{1-\rho} \sum_1^\infty \frac{1}{n^3}.$$

Développons $\frac{z}{a_k - z}$ suivant les puissances croissantes de z, il vient

$$\begin{aligned} f(z) = \quad & \frac{z}{a_1} + \frac{z^2}{a_1^2} + \frac{z^3}{a_1^3} + \cdots \\ & + \frac{1}{2^3}\left(\frac{z}{a_2} + \frac{z^2}{a_2^2} + \frac{z^3}{a_2^3} + \cdots\right) \\ & + \frac{1}{3^3}\left(\frac{z}{a_3} + \frac{z^2}{a_3^2} + \frac{z^3}{a_3^3} + \cdots\right) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

La série double restant convergente quand on remplace chaque terme par son module, on peut prendre les termes dans un ordre quelconque. En particulier, il est permis d'ordonner suivant les puissances de z; la fonction $f(z)$ peut se mettre sous la forme

$$(2) \qquad f(z) = \sum_1^\infty c_n z^n,$$

et le rayon de convergence de cette série est égal à l'unité. Il est clair aussi que le module d'un coefficient quelconque c_k ne peut surpasser la constante $\sum \frac{1}{n^3} = 1,202$.

2. Nous allons étudier maintenant la manière dont varie la valeur de $f(z)$ lorsque z s'approche d'une certaine manière de la circonférence du cercle de convergence C.

Mais il faut d'abord préciser les valeurs des constantes

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n.$$

Si l'on représente ces quantités dans le plan par des points

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_n.$$

ces points se trouvent sur la circonférence du cercle C.

Nous prenons a_1, a_2 de manière que P_1 et P_2 se trouvent aux extrémités d'un diamètre du cercle.

Nous choisissons ensuite a_3, a_4 de manière que la circonférence se trouve divisée en quatre parties égales par les points P_1, P_2, P_3, P_4.

En continuant ainsi, on choisira a_5, a_6, a_7, a_8, de manière que les points P_1, P_2, ..., P_8 sont les sommets d'un polygone régulier de huit côtés inscrits dans le cercle.

Généralement, pour $k = 2^{n-1}$, on devra prendre

$$a_{k+1}, \quad a_{k+2}, \quad \ldots \quad a_{2k}.$$

de manière que la circonférence C se trouve divisée en $2k$ parties égales par les points P_1, P_2, ..., P_{2k}.

Ayant défini de cette manière la suite infinie

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

il est clair qu'on trouvera toujours un nombre infini de points P_k sur un arc quelconque de la circonférence, si petit qu'on voudra le choisir.

Il importe de trouver une limite inférieure de

$$\operatorname{mod}(a_r - a_s) \qquad (r > s).$$

Le nombre a_r doit se trouver dans une des suites

$$a_{k+1}, \quad a_{k+2}, \quad \ldots, \quad a_{2k}, \qquad (k = 2^{n-1}),$$

et il est évident qu'on peut prendre alors pour cette limite inférieure le côté du polygone régulier de $2k$ côtés inscrits dans le cercle,

$$\operatorname{mod}(a_r - a_s) \geq 2 \sin \frac{\pi}{2k}$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{mod}(a_r - a_s) > 2 \sin \frac{\pi}{2r}.$$

Pour simplifier, nous remarquons que l'on a

$$2 \sin x > x,$$

tant que x ne surpasse pas $\frac{\pi}{2}$; donc

$$(3) \qquad \operatorname{mod}(a_r - a_s) > \frac{\pi}{2r} \qquad (r > s).$$

3. Envisageons maintenant un nombre a_k quelconque et posons

$$z = a_k u,$$

u étant réelle et positive. Le point P qui représente z se trouve alors sur le rayon OP_k. En faisant tendre u vers l'unité, en croissant continuellement, le point P s'approchera indéfiniment du point P_k de la circonférence C.

On a, d'après (1),

$$f(z) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^3}\left(\frac{a_k u}{a_n - a_k u}\right)$$

ou bien

$$(4) \qquad f(a_k u) - \frac{1}{k^3}\left(\frac{u}{1-u}\right) = F_1(u) + F_2(u),$$

en posant

$$F_1(u) = \sum_1^{k-1} \frac{1}{n^3}\left(\frac{a_k u}{a_n - a_k u}\right),$$

$$F_2(u) = \sum_{k+1}^\infty \frac{1}{n^3}\left(\frac{a_k u}{a_n - a_k u}\right).$$

Dans l'intervalle $0 \leqq u \leqq 1$, la fonction $F_1(u)$ est évidemment finie et continue; nous allons voir qu'il en est de même de $F_2(u)$. Remarquons pour cela d'abord que

$$\operatorname{mod}\left(\frac{a_k u}{a_n - a_k u}\right) \leqq \frac{1}{\operatorname{mod}(a_n - a_k)}.$$

Pour le mettre en évidence, joignons par des droites le point P_n qui représente a_n avec O, P et P_k et posons $\widehat{P_k O P_n} = \varphi$.

A cause de $u \leqq 1$, on a

$$4u^2 \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 \leqq (1+u)^2 \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 + (1-u)^2 \cos\tfrac{1}{2}\varphi^2 = 1 - 2u\cos\varphi + u^2;$$

donc

$$\frac{u}{\sqrt{1 - 2u\cos\varphi + u^2}} \leqq \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

Mais cela revient à la limitation indiquée, car

$$\begin{aligned} \operatorname{mod} a_k u &= \mathrm{OP} = u; \\ \operatorname{mod}(a_n - a_k u) &= \mathrm{PP}_n = \sqrt{1 - 2u\cos\varphi + u^2}, \\ \operatorname{mod}(a_n - a_k) &= \mathrm{P}_n\mathrm{P}_k = 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi. \end{aligned}$$

Dans la série $F_2(u)$, l'indice n est plus grand que k, et, à l'aide de (3), on trouve, par conséquent,

$$\operatorname{mod}\frac{1}{n^3}\left(\frac{a_k u}{a_n - a_k u}\right) < \frac{2}{\pi n^2},$$

et cela dans tout l'intervalle $0 \leqq u \leqq 1$. La série $\sum \frac{2}{\pi n^2}$ étant convergente, on en conclut, d'après un théorème de M. Weierstrass (*voir* Tannery, *Théorie des fonctions d'une variable*, p. 135), que la série

$$\sum_{k+1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(\frac{a_k u}{a_n - a_k u}\right)$$

est absolument et uniformément convergente dans l'intervalle $0 \leqq u \leqq 1$.

La fonction $F_2(u)$ est donc finie et continue dans le même intervalle, et lorsque u tend vers l'unité, $F_1(u)$ et $F_2(u)$ tendent vers les valeurs finies $F_1(1)$ et $F_2(1)$. En posant $F_1(1) + F_2(1) = A$, l'équation (4) nous montre donc que

$$\lim\left[f(a_k u) - \frac{1}{k^3}\left(\frac{u}{1-u}\right)\right]_{u=1} = A.$$

On voit par là que, lorsque la variable z s'approche indéfiniment de la valeur a_k en conservant constamment le même argument que a_k, alors la partie réelle de

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} c_n z^n$$

est positive et croît au delà de toute limite. Au contraire, la partie purement imaginaire de $f(z)$ tend vers une limite fixe.

4. Soit maintenant (z_0, P_0) un point quelconque à l'intérieur de C; on a

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{1.2}(z - z_0)^2 + \ldots,$$

et le domaine de convergence est un cercle C_0 décrit de P_0 comme centre avec un rayon au moins égal à $1 - \operatorname{mod} z_0$.

Mais il est impossible maintenant que ce rayon soit plus grand que $1 - \operatorname{mod} z_0$, de manière que l'intérieur de C_0 tomberait en partie en dehors du cercle C.

En effet, dans cette supposition une partie de la circonférence de C se trouverait à l'intérieur de C_0. Prenons un point (a_k, P_k) sur cette partie de la circonférence C (il y en a une infinité). La valeur de $f(z)$ devrait être finie pour $z = a_k$ et, lorsque le point z s'approche de P_k suivant le rayon vecteur, la valeur de $f(z)$ devrait tendre vers cette valeur finie de $f(a_k)$.

Mais nous savons que cela n'a pas lieu, la valeur de $f(z)$ ne tend *pas* vers une limite finie, parce que sa partie réelle croît au delà de toute limite.

En considérant la fonction $f(z)$, le cercle C forme donc bien la limite naturelle pour le domaine de la variable z. Il est impossible de continuer cette fonction en dehors de ce cercle.

SUR LES LOGARITHMES A UN GRAND NOMBRE DE DÉCIMALES ET EN PARTICULIER SUR LES TABLES DE M. STEINHAUSER [1];

PAR M. J. PEROTT.

Il y a deux systèmes principaux de logarithmes en usage : les logarithmes naturels et les logarithmes vulgaires. Les premiers se

[1] *Voir* un compte rendu de cet Ouvrage au *Bulletin*, VIII, p. 113.

présentent naturellement dans les recherches théoriques, les seconds sont plus commodes comme auxiliaires pour les calculs numériques. Comme les Tables de M. Steinhauser servent au calcul des logarithmes *vulgaires* à 20 décimales, il est clair que c'est à des usages pratiques que l'auteur les destine. S'il s'agit d'une simple multiplication de deux nombres de vingt chiffres, on aura tort d'avoir recours aux Tables de M. Steinhauser. En effet, pour effectuer cette opération, il faudrait trouver deux logarithmes et le nombre correspondant à la somme de ces logarithmes : nous dirons qu'il y aurait trois recherches de logarithme ou nombre à faire, et le travail serait beaucoup plus long qu'une multiplication abrégée pure et simple. Mais ce n'est pas toujours sous cet aspect défavorable aux logarithmes à 20 décimales que se présente la question.

Supposons que l'on connaisse à 20 décimales les sept racines réelles d'une équation du septième degré, et que l'on veuille calculer la troisième fonction symétrique élémentaire de ces racines, c'est-à-dire la fonction symétrique qui est égale à la somme des produits des racines de trois à trois. Pour calculer cette fonction sans logarithmes, il y a, comme on le voit facilement, cinquante-six multiplications à faire. Pour effectuer le même calcul à l'aide de logarithmes, il faut d'abord chercher les logarithmes des sept racines, puis les nombres correspondant aux logarithmes des trente-cinq produits : il y a donc en tout quarante-deux recherches de logarithme ou nombre à faire. On voit que, tandis que, dans le premier exemple, il correspondait à chaque multiplication trois recherches de logarithme ou nombre, ici il n'y a que trois recherches semblables pour quatre multiplications. Dans le dernier exemple nous croyons qu'il y aurait lieu de recourir aux logarithmes de M. Steinhauser. Il en serait de même, s'il s'agissait d'une élévation à une puissance.

Voici maintenant comment, à l'aide des Tables de M. Steinhauser, on obtient le logarithme vulgaire à 20 décimales d'un nombre quelconque. On divise le nombre donné par le nombre formé par ses quatre premiers chiffres significatifs et l'on obtient ainsi le premier quotient ; ce premier quotient, divisé par le nombre formé par ses huit premiers chiffres significatifs, donne le second quotient ; ce second quotient, divisé par le nombre formé par ses

douze premiers chiffres significatifs, donne le troisième quotient; enfin, en divisant le troisième quotient par ses seize premiers chiffres significatifs, on obtient le quatrième quotient.

Ajoutons qu'il n'y a que les deux premières divisions à faire effectivement, les autres se font à vue. La seconde division peut aussi se faire à l'aide de logarithmes à 10 décimales, si l'on se sert d'une petite transformation qu'il est facile d'imaginer.

Le nombre donné se trouve ainsi décomposé en cinq facteurs dont les logarithmes sont donnés *immédiatement* (sans interpolation) par les Tables de M. Steinhauser. M. Steinhauser a donc tabulé les logarithmes des nombres de la forme suivante. Soient, d'une manière générale, a' un nombre entier à quatre chiffres et a un nombre entier de quatre chiffres tout au plus. On trouve dans les Tables de M. Steinhauser à 21 décimales

$\log a'$, donné par la Table A;

$\log\left(1+\frac{a}{10^7}\right)$, donné par la Table B;

$\log\left(1+\frac{a}{10^{11}}\right)$, donné par la Table C;

$\log\left(1+\frac{a}{10^{15}}\right)$, donné par la Table D.

Avec une approximation suffisante, on peut poser

$$\log\left(1+\frac{a}{10^{19}}\right)=\frac{1}{10000}\log\left(1+\frac{a}{10^{15}}\right).$$

On voit bien qu'il y avait là de quoi remplir un volume de trois cents pages, tel que celui de M. Steinhauser.

Avant l'apparition du Recueil de ce savant, il existait déjà des Tables construites sur un principe analogue, dues à Briggs, Flower, Leonelli, etc.; mais, dans les Tables antérieures, les facteurs étaient soit un nombre d'un ou de deux chiffres, soit un nombre commençant par 1, suivi de plusieurs zéros, et se terminant par un ou deux chiffres significatifs [1].

Il est vrai que, dans les Tables antérieures, on avait l'habitude

---

[1] *Voir*, par exemple, la *Table V* du Recueil du regretté M. Hoüel.

de remplacer la division par la multiplication, ce qui est un grand soulagement; mais, malgré cela, nous n'hésitons pas à dire que l'emploi des Tables de M. Steinhauser présente un avantage incontestable. Toutefois, si nous attribuons cette supériorité aux Tables de M. Steinhauser, c'est en leur supposant une grande exactitude.

Les Tables antérieures étaient renfermées dans une seule page et leur vérification était facile, ce qui n'est pas le cas du volume de trois cents pages que nous avons sous les yeux.

Nous avons surtout examiné la Table A, la plus importante du Recueil, qui peut d'ailleurs servir aussi à des usages différents de celui auquel l'auteur la destine. Voici d'abord quelques erreurs que nous avons rencontrées : le neuvième chiffre de log 1153 doit être un 7 et non un 9; log 1088 doit terminer par 26 et non par 23; les arguments de la page 54 doivent tous commencer par un 6 et non par un 3, comme cela est indiqué en différents endroits par erreur. De plus, en dehors de ces erreurs isolées, une circonstance nous révéla bientôt l'existence d'autres erreurs d'un caractère plus *chronique*. Dans l'intention de nous rendre compte de l'exactitude du *Thesaurus logarithmorum,* qui est à 10 décimales, comme on sait, nous nous étions mis à collationner les logarithmes du *Thesaurus,* de dix en dix naturellement, sur ceux de M. Steinhauser, et comme nous avions rencontré des divergences fréquentes dans la *dixième* décimale, nous étions disposé à les attribuer à Vega, mais, vérification faite, c'était toujours M. Steinhauser qui était en défaut. Par exemple, log 3748, log 3886, log 4187 doivent avoir respectivement 2, 2, 8 comme dixième décimale et non 1, 1, 6.

Quelle peut être la source de ces erreurs, assez fréquentes d'ailleurs? Que, dans une Table des logarithmes à 10 décimales, l'erreur porte plutôt sur la dixième décimale, cela n'a rien que de très naturel. Mais que le même fait se présente dans une Table à 21 décimales, cela semble déjà extraordinaire.

Voici sans doute quelle est la source de telles erreurs.

L'auteur a obtenu les logarithmes des nombres à quatre chiffres décomposables en facteurs premiers inférieurs à 1100 par une simple addition des logarithmes de Sharp, qui sont les logarithmes vulgaires à 61 décimales de tous les nombres premiers inférieurs à 1100. Quand il s'agissait d'un nombre premier supérieur à 1100,

il fallait avoir recours aux logarithmes de Wolfram, qui sont les logarithmes naturels à 48 décimales de tous les nombres premiers jusqu'à 10009 inclusivement. Pour convertir les logarithmes naturels de Wolfram en logarithmes vulgaires, l'auteur avait fait construire par M. Slawik une Table des multiples du module par tous les nombres jusqu'à 10000.

Or, toutes les fois que nous rencontrions une divergence entre M. Steinhauser et Vega, l'erreur portait sur des logarithmes de nombres décomposables en facteurs premiers inférieurs à 1100. C'est donc soit en additionnant, soit en transcrivant les logarithmes de Sharp que M. Steinhauser commettait l'erreur. Or, l'auteur semble avoir pris les logarithmes de Sharp dans Callet. L'espace ayant manqué à Callet pour imprimer dans une seule ligne un logarithme à 61 décimales, il supprime les dix premières décimales, qu'il faut chercher dans les logarithmes à 20 décimales qui précèdent.

M. Steinhauser semble avoir pris d'abord les dix premières décimales dans la Table à 20 décimales, puis, tout en écrivant les dix premières décimales, il feuilletait son Callet à la recherche des décimales suivantes. Mais, pendant cette opération, la mémoire a dû lui faire défaut quelquefois, et il est facile de voir pourquoi l'erreur portait plutôt sur la dixième décimale que sur les autres.

Il y a d'ailleurs à cet égard moins de différence dans les facultés mnémoniques de différentes personnes qu'on ne le pense d'habitude. Tout le monde retient sans peine un logarithme à 7 décimales, bieu peu le feront facilement pour un logarithme à 10 décimales.

Il en est de même d'une faculté analogue, celle de *voir* le nombre des objets sans les compter effectivement. Gauss semble avoir possédé cette faculté à un degré plus qu'ordinaire.

C'est ainsi qu'on trouve chez lui des notations comme $a^{''''''}$, tandis que la plupart des personnes seront obligées de *compter* les indices [1].

Nous ouvrons encore une fois au hasard le Recueil de M. Steinhauser et nous nous trouvons à la page 78. Nous collationnons les

---

[1] *Voir* à ce sujet un intéressant article sur le célèbre calculateur allemand *Dase*, dans le premier numéro de la *Gartenlaube* de cette année (1886).

logarithmes de cette page sur ceux du *Thesaurus :* log8600, log8601, log8602, log8603, log8604, log8605, log8606, log8607, log8608. Voici déjà un désaccord. M. Steinhauser donne (¹)

$$\log 8608 = 3{,}9349022582223139561 56-,$$

tandis qu'on lit dans Vega

$$\log 8608 = 5{,}9349022583.$$

Vérification faite, on trouve

$$\log 8608 = 3{,}9349022583223139561 56-.$$

C'est donc M. Steinhauser qui se trompe dans la dixième décimale.

Mais, quoi qu'il en soit de notre hypothèse, nous conseillons à l'auteur un collationnement sur le *Thesaurus*. Ce qui vaudrait encore mieux, ce serait un collationnement sur des Tables analogues à celles de M. Steinhauser, et il semble qu'il en existe deux en manuscrit; celle du Cadastre (²) et celle que M. Sang (³) a construite à son propre usage. Ces deux dernières Tables ont d'ailleurs l'avantage d'être indépendantes, tant des logarithmes de Sharp que de ceux de Wolfram.

Mais, en dehors d'un collationnement, il existe un autre moyen de vérifier au moins les dix-neuf premières décimales des logarithmes de la Table A de M. Steinhauser.

C'est de sommer les logarithmes d'une page, par exemple, et de calculer, d'autre part, cette même somme par les méthodes connues. En effet, si la page qu'on veut examiner contient les logarithmes de tous les nombres depuis x jusqu'à y, la somme des logarithmes de cette page sera égale à

$$\log y! - \log(x-1)!$$

(¹) Le signe — veut dire que le vingt et unième chiffre a été forcé.

(²) M. Lefort, *Sur les grandes Tables du Cadastre* (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. IV, p. 10 du tirage à part).

(³) *Table of logarithms*, p. VI. London; 1883.

et l'on a, avec une approximation suffisante,

$$\log z! = \left(z + \frac{1}{2}\right)\log z + \log\sqrt{2\pi} - Mz + \frac{M}{12z} - \frac{M}{360z^3} + \frac{M}{1260z^5},$$

où M est le module des logarithmes vulgaires. Nous avons ainsi examiné la page 64 qui contient les logarithmes de tous les nombres depuis 7200 jusqu'à 7299. Le calcul a donné

$$\log 7299! - \log 7199! = 386,03046113316844941 9098,$$

tandis que la somme des logarithmes de la page 64 est égale à

$$386,03046153316844941 90995.$$

Voilà donc un désaccord dans le septième chiffre. Un collationnement sur les premières Tables venues à 7 décimales a montré que le septième chiffre de log 7249 doit être un 0 et non un 4, comme M. Steinhauser l'a imprimé à tort. Il est à regretter que l'auteur n'ait pas pris des précautions pour éviter des erreurs qu'un simple collationnement sur des Tables à 7 décimales aurait fait disparaître. Voici enfin quelques erreurs que nous avons rencontrées dans les autres Tables du Recueil : la dix-septième décimale de log 1000000000004291 doit être un 5 et non un 2; dans le log 1000000000008790, le groupe 817 doit remplacer le groupe 178; page 263, l'en-tête $\overset{(3)}{10}, \overset{(11)}{10}, \overset{(7)}{10}$ doit être remplacé par $\overset{(3)}{10}, \overset{(7)}{10}, \overset{(11)}{10}$; l'en-tête ɢ de la page 285 est retourné. Mais, si nous nous sommes appesanti sur les erreurs de l'Ouvrage, nous n'avions aucunement l'intention d'en atténuer le mérite. Bien au contraire, nous nous plaisons à reconnaître que l'auteur a fait une œuvre

---

(1) Nous avons tenu compte de ce fait que M. Steinhauser fait suivre ses logarithmes du signe — quand la vingt et unième décimale a été forcée. Nous avons donc ajouté autant de fois $\frac{1}{4.10^{21}}$ qu'il y a de logarithmes qui ne sont suivis d'aucun signe et nous avons retranché autant de fois $\frac{1}{4.10^{21}}$ qu'il y a de logarithmes suivis du signe —. C'est à tort, selon nous, que M. Steinhauser fait un autre usage de son signe dans un exemple à la page VIII.

très utile et qu'il a rendu possibles les calculs *suivis* à 20 décimales.

Mais, tout en reconnaissant l'utilité des Tables de M. Steinhauser, nous dirons franchement qu'il ne nous semble nullement utile d'aller au delà, c'est-à-dire de construire des Tables auxiliaires analogues pour le calcul des logarithmes *vulgaires* à plus de 20 décimales.

La question change tout à fait de face quand il s'agit des logarithmes naturels. Ici, il n'est guère possible de poser une limite. La fonction e^x et son inverse jouent un rôle capital dans la théorie des nombres, et il est à désirer qu'on calcule des Tables de cette fonction aussi étendues que possible, à 100 décimales par exemple. Ce qu'il faudrait comme Table auxiliaire, c'est une Table des logarithmes naturels à 100 décimales de tous les nombres premiers jusqu'à une certaine limite qu'on choisirait aussi grande que possible. Une fois qu'on possède une telle Table, la méthode dont on se sert pour le calcul des logarithmes naturels à un grand nombre de décimales est très simple en théorie et même, au point de vue pratique, elle l'emporte sur toutes les autres quand le nombre des décimales est très grand.

Supposons donc qu'on possède une Table des logarithmes [1] de tous les nombres premiers inférieurs à T et soit A le nombre dont on veut le logarithme. On cherche un nombre a différant peu de A et décomposable en facteurs premiers inférieurs à T. Le logarithme de a s'obtient alors par une simple addition, et $\log \frac{A}{a}$ par une série très convergente. Les Tables des facteurs que nous possédons aujourd'hui vont jusqu'à neuf millions; on peut donc d'habitude prendre pour a le nombre formé par les sept premiers chiffres significatifs de A. Si le nombre a ainsi choisi n'était pas décomposable en facteurs premiers inférieurs à T, il faudrait le modifier de manière à obtenir un nombre qui le fût. Après quelques essais, on parvient toujours à trouver un nombre a con-

[1] La Table de Wolfram donne les logarithmes naturels à 48 décimales de tous les nombres premiers jusqu'à 10009 inclusivement. On ne possède pas de Table donnant les logarithmes naturels à un plus grand nombre de décimales.

venable. Les méthodes enseignées dans la sixième Section des *Disquisitiones arithmeticæ* permettent d'aller beaucoup plus loin et de décomposer les dix premiers chiffres significatifs du nombre A, par exemple. Nous reviendrons un jour sur ce sujet. Le lecteur curieux trouvera des exemples de calculs de ce genre aux pages 426-432 du troisième Volume des *Œuvres de Gauss*.

Voici comment on pourrait s'y prendre afin de calculer une Table des logarithmes naturels de tous les nombres premiers inférieurs à 100 (¹).

On calculerait d'abord (²)

$$a = \log \frac{729}{728},$$

$$b = \log \frac{2401}{2400},$$

$$c = \log \frac{4375}{4374},$$

$$d = \log \frac{6656}{6655},$$

$$e = \log \frac{10648}{10647},$$

$$f = \log \frac{123201}{123200},$$

et l'on en tirerait

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 270a + 224b + 472c + 414d + 585e + 513f,\\
\log 3 &= 428a + 355b + 748c + 656d + 927e + 813f,\\
\log 5 &= 627a + 520b + 1096c + 961d + 1358e + 1191f,\\
\log 7 &= 758a + 629b + 1325c + 1162d + 1642e + 1440f,\\
\log 11 &= 934a + 775b + 1633c + 1432d + 2024e + 1775f,\\
\log 13 &= 999a + 829b + 1747c + 1532d + 2165e + 1899f.
\end{aligned}$$

(¹) M. Parkhurst a calculé une Table des logarithmes *vulgaires* à 100 décimales de tous les nombres premiers jusqu'à 109 (*Astronomical Tables*. New-York; 1881). Nous ignorons l'usage *effectif* auquel cette Table pourrait servir.

(²) L'idée de transformations de ce genre appartient, croyons-nous, au grand géomètre néerlandais qui semble avoir laissé l'empreinte de son puissant génie sur toutes les parties des Mathématiques (*Opera varia*, p. 457. Lugd.; 1724).

Une fois en possession des logarithmes des nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, on calculerait les logarithmes des nombres premiers suivants à l'aide des nombres qui se trouvent aux pages 502 et 503 du deuxième Volume des *Œuvres de Gauss*.

JOSEPH PEROTT.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

БУГАЕВЪ. — Общія основанія исчисленія $E[\varphi(x)]$ съ однимъ независимымъ перемѣннымъ. — Bougaïeff. *Principes généraux du calcul* $E[\varphi(x)]$ *avec une seule variable indépendante;* Moscou, 1885. Gr. in-8°, 258 p. Dédié à la mémoire de Leibnitz. Extrait du *Mathématischesky Sbornik,* t. XII et XIII.

L'auteur propose de donner le nom du calcul $E(\varphi x)$ à l'exposition systématique des propriétés et des applications du symbole E, dans le cas où $E(\varphi x)$ désigne la partie entière de la fonction $\varphi(x)$.

Il propose aussi de donner le nom du calcul $E(x)$ à l'exposition systématique des propriétés et des applications du symbole E dans le cas où $E(x)$ représente le plus grand nombre entier non supérieur à x.

Autant le calcul $E(x)$ est nécessaire pour l'étude des propriétés des fonctions discontinues, autant le calcul $E(\varphi x)$ est utile pour l'étude des fonctions analytiques.

En désignant par $O(\varphi x)$ la partie fractionnaire de la fonction $\varphi(x)$, nous avons

$$\varphi(x) = E(\varphi x) + O[\varphi(x)], \tag{1}$$

ou l'équation symbolique

$$1 = E + O.$$

Les formules des deux calculs $E(\varphi x)$ et $O(\varphi x)$ se trouvent dans une complète correspondance.

L'Ouvrage se compose de quatre Mémoires.

Premier Mémoire. — *Théorèmes fondamentaux du calcul* $E(\varphi x)$, 66 p. — Les propriétés principales du calcul $E(\varphi x)$ sont

exprimées par les égalités

$$(2)\qquad \mathrm{E}(\varphi x \pm \psi x) = \mathrm{E}(\varphi x) \pm \mathrm{E}(\psi x),$$

$$(3)\qquad \mathrm{E}(a\varphi x) = a\,\mathrm{E}(\varphi x),$$

$$(4)\qquad \mathrm{E}(\mathrm{E}\varphi x) = \mathrm{E}(\varphi x),\quad \mathrm{O}(\mathrm{O}\varphi x) = \mathrm{O}(\varphi x),\quad \mathrm{E}(\mathrm{O}\varphi x) = 0,\quad \mathrm{O}(\mathrm{E}\varphi x) = 0.$$

$$(5)\qquad \mathrm{E}[\varphi(x)\psi(x)] = \mathrm{E}(\varphi\mathrm{E}\psi) - \mathrm{E}(\psi\,\mathrm{E}\varphi) - \mathrm{E}(\varphi)\,\mathrm{E}(\psi),$$

$$(6)\qquad \mathrm{E}(\varphi^n) - n\,\mathrm{E}(\varphi^{n-1}\mathrm{E}\varphi) + \frac{n(n-1)}{1.2}\mathrm{E}(\varphi^{n-2}\mathrm{E}^2\varphi) - \ldots + (-1)^n\,\mathrm{E}^n(\varphi) = 0,$$

où $\mathrm{E}^n(\varphi) = (\mathrm{E}\varphi)^n$.

L'auteur détermine aussi les expressions $\mathrm{E}\frac{\varphi}{\psi}$, $\mathrm{E}\sqrt[n]{\varphi}$, $\frac{d}{dx}\left(\mathrm{E}\varphi x\right)\ldots$.

L'auteur déduit, comme une conséquence immédiate de ces théorèmes, les égalités analogues à

$$(7)\qquad \mathrm{E}^2(\varphi) = 3\,\mathrm{E}(\varphi^2) - 2\,\mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{E}(\varphi^3)}{\mathrm{E}\varphi}\right].$$

L'auteur donne le moyen de calculer les expressions $\mathrm{E}(\varphi x)$, $\mathrm{E}(x\,\varphi x)$, ..., $\mathrm{E}[x^m\,\varphi(x)]$ en connaissant l'expression

$$\mathrm{E}[(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)\varphi x]$$

et traite en passant la question de la transformation des variables dans le calcul $\mathrm{E}(\varphi x)$.

Dans le cas où la fonction $\varphi(x)$ peut être exprimée par la série

$$\varphi(x) = \mathrm{E}(\varphi x) + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots + \frac{\alpha^n}{x^n} + \ldots,$$

le coefficient α_n peut être déterminé par les égalités

$$(8)\qquad \alpha_n = \mathrm{E}(x^n\varphi) - x\,\mathrm{E}(x^{n-1}\varphi),$$

$$(9)\qquad \alpha_n = \Big/^{x=0}\ \mathrm{E}(x^n\varphi),$$

où $\Big/$ est le signe connu de la substitution.

Les théorèmes du calcul $\mathrm{E}(\varphi x)$ se rapportent aux fonctions algébriques ou holomorphes.

L'auteur déduit les expressions

$$\mathrm{E}\frac{\varphi x}{x-a},\quad \mathrm{E}\frac{\varphi x}{(x-a)^\mu},\quad \mathrm{E}\frac{\varphi x}{(x-a)(x-b)},\quad \mathrm{E}\frac{\varphi x}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\mu)},$$

$$\mathrm{E}\frac{\varphi x}{(x-a)^\lambda(x-b)^\mu},\quad \mathrm{E}\frac{(\varphi x)^n}{(x-a)},\quad \mathrm{E}\frac{\varphi^2}{(x-a)(x-b)},\quad \mathrm{E}\frac{\varphi(x)\psi(x)}{(x-a)(x-b)},\ \ldots.$$

Voici quelques-unes de ces expressions :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{E}\frac{\varphi x}{x-a} &= \mathrm{E}\frac{\varphi x}{x} + a\,\mathrm{E}\frac{\varphi x}{x^2} + \ldots \\ &= \mathrm{E}\frac{\varphi a}{a} + x\,\mathrm{E}\frac{\varphi a}{a^2} + x^2\,\mathrm{E}\frac{\varphi a}{a^3} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

$$(11)\quad \mathrm{E}\frac{\varphi x}{(x-a)^\mu} = \mathrm{E}\frac{\varphi x}{x^\mu} + \mu_1 a\,\mathrm{E}\frac{\varphi x}{x^{\mu+1}} + (\mu+1)_2\,\mathrm{E}\frac{\varphi x}{x^{\mu+2}} + \ldots.$$

où $\mu_n = \dfrac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2\ldots n}$,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{E}\frac{\varphi(x)\psi(x)\chi(x)}{(x-a)} &= \varphi(a)\psi(a)\,\mathrm{E}\frac{\chi(x)}{x-a} \\ &\quad + \varphi(a)\chi(x)\,\mathrm{E}\frac{\psi x}{x-a} + \psi(x)\chi(x)\,\mathrm{E}\frac{\varphi(x)}{x-a}, \end{aligned}\right.$$

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{E}\frac{\varphi(x)\psi(x)}{(x-a)(x-b)} &= \varphi(a)\,\mathrm{E}\frac{\psi(x)}{(x-a)(x-b)} \\ &\quad + \psi(b)\,\mathrm{E}\frac{\varphi x}{(x-a)(x-b)} + \mathrm{E}\frac{\varphi(x)}{x-a}\cdot\mathrm{E}\frac{\psi(x)}{x-b} \\ &= \varphi(b)\,\mathrm{E}\frac{\psi(x)}{(x-a)(x-b)} \\ &\quad + \psi(a)\,\mathrm{E}\frac{\varphi x}{(x-a)(x-b)} + \mathrm{E}\frac{\varphi x}{x-b}\cdot\mathrm{E}\frac{\psi(x)}{x-a}. \end{aligned}\right.$$

Les formules les plus importantes qui représentent les propriétés de la fonction $\mathrm{O}(\varphi x)$ sont les suivantes :

$$(14)\quad \mathbf{O}\frac{\varphi(x)}{(x-a)^\mu} = \frac{1}{\Pi(\mu-1)}\frac{d^{\mu-1}}{da^{\mu-1}}\left(\frac{\varphi x}{x-a}\right),$$

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \mathbf{O}\frac{\varphi x}{(x-a)^\lambda(x-b)^\mu} &= \frac{1}{\Pi(\mu-1)}\frac{d^{\mu-1}}{db^{\mu-1}}\left[\frac{1}{(b-a)^\lambda}\,\frac{\varphi b}{x-b}\right] \\ &\quad + \frac{1}{\Pi(\lambda-1)}\frac{d^{\lambda-1}}{da^{\lambda-1}}\left[\frac{\varphi a}{x-a}\,\frac{1}{(a-b)^\mu}\right], \end{aligned}\right.$$

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \mathbf{O}\frac{\varphi x}{(x-a)^\lambda(x-b)^\mu} &= \frac{1}{\Pi(\mu-1)}\frac{d^{\mu-1}}{db^{\mu-1}}\,\mathrm{E}_b\frac{\varphi b}{(b-a)^\lambda} \\ &\quad + \frac{1}{\Pi(\lambda-1)}\frac{d^{\lambda-1}}{da^{\lambda-1}}\left[\frac{\varphi(b)}{(x-a)(x-b)^\mu}\right], \end{aligned}\right.$$

.....

Toutes ces formules peuvent être déduites de deux égalités

générales,

$$\text{(I)}\quad E[F(\varphi_1 - E\varphi_1, \varphi_2 - E\varphi_2, \ldots, \varphi_\mu - E\varphi_\mu)] = E[F(O\varphi_1, O\varphi_2, \ldots, O\varphi_\mu)],$$
$$\text{(II)}\quad O[F(\varphi_1 - O\varphi_1, \varphi_2 - O\varphi_2, \ldots, \varphi_\mu - O\varphi_\mu)] = O[F(E\varphi_1, E\varphi_2, \ldots, E\varphi_\mu)].$$

L'auteur déduit seulement les conséquences des formules (I) et (II). Il a laissé encore sans investigation quatre formules générales, analogues à la formule (I) et à la (II).

Deuxième Mémoire. — *Les plus simples applications du calcul* $E(\varphi x)$, (67-98 p.). — L'auteur déduit deux expressions de la formule $E\dfrac{\varphi x}{x^2 - ax - b}$ et fait une application de ces expressions à la déduction des formules connues de $\dfrac{\cos n\varphi}{\cos\varphi}$ et $\dfrac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$ suivant les puissances de $\cos\varphi$.

En passant il reçoit une égalité assez générale :

$$(17)\quad \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos n\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\cos(n-1)\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{\cos(n-2)\varphi}{\cos^3\varphi} + \ldots + \frac{\cos\varphi}{\cos^n\varphi}.$$

En appliquant le calcul $E(\varphi x)$ au développement de la fraction

$$fx = \frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{F_1(x)}{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda},$$

il reçoit la relation générale

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) = E\,fx &+ \int^{y=\frac{1}{x-a}} y\,E\left[\frac{1}{y} f\left(a + \frac{1}{y}\right)\right] \\ &+ \int^{y=\frac{1}{x-b}} y\,E\left[\frac{1}{y} f\left(b + \frac{1}{y}\right)\right] + \ldots \\ &+ \int^{y=\frac{1}{x-l}} y\,E\left[\frac{1}{y} f\left(l + \frac{1}{y}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

L'auteur fait application de la formule (18) aux fractions

$$\frac{1}{(x^2-1)^\alpha}, \quad \frac{1}{(x-a)^{\alpha+1}(x-b)^{\beta+1}},$$

qui se rencontrent dans l'Ouvrage de Hermite.

Le résidu de la fraction (18) s'exprime par la formule

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{E}f(x) = \int^{y=0} \mathrm{E}\Big[&\frac{1}{y} f\left(a + \frac{1}{y}\right) \\ &+ \frac{1}{y} f\left(b + \frac{1}{y}\right) + \ldots + \frac{1}{y} f\left(l + \frac{1}{y}\right)\Big], \end{aligned}\right.$$

En désignant par V la série

$$\mathrm{V} = \frac{f(1)}{x} + \frac{f(2)}{x^2} + \ldots + \frac{f(n)}{x^n} + \ldots,$$

on a

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{Q}_i &= \int^{x=0} \mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=\infty} \mathrm{E}[\psi(u)\mathrm{V}^u x^i] \\ &= \mathrm{S}\frac{\psi(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i)\Pi(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i)}{\Pi(\lambda_1)\Pi(\lambda_2)\ldots\Pi(\lambda_i)} f(1)^{\lambda_1} f(2)^{\lambda_2} \ldots (fi)^{\lambda_i}. \end{aligned}\right.$$

De même, en désignant par $\mathrm{K}_i(fx)$ le coefficient de x^i dans le développement de la fonction $f(x)$ suivant les puissances de x, pour la série

$$\mathrm{W} = f(1)x + f(2)x^2 + \ldots,$$

on a la formule

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{K}_i\left[\mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=\infty} \psi(u)\mathrm{W}^u\right] \\ &= \mathrm{S}\frac{\psi(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i)\Pi(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i)}{\Pi(\lambda_1)\Pi(\lambda_2)\ldots\Pi(\lambda_i)} f(1)^{\lambda_1} f(2)^{\lambda_2} \ldots (fi)^{\lambda_i}. \end{aligned}\right.$$

Dans les formules (20) et (21)

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + i\lambda_i = i,$$

$$\Pi(n) = 1.2\ldots n, \qquad \Pi(0) = 1, \qquad \Pi(1) = 1.$$

L'auteur fait application des formules (20) et (21) à l'expression de la somme s_n des puissances de degré de toutes les racines de l'équation

$$(a)\qquad x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n = 0,$$

à l'expression de p_n suivant s_n, à la détermination de Σ_μ somme de toutes les fonctions symétriques de l'ordre μ de toutes les racines de l'équation (a), à l'expression de la dérivée de l'ordre μ de la fonction composée, etc.

Troisième Mémoire. — *Rapport entre le calcul* $\mathrm{E}(\varphi x)$ *et le*

calcul différentiel et le calcul de dérivation. (98-196 p.). — L'auteur montre que le théorème de Taylor est une simple conséquence de la formule (14).

L'introduction d'un symbole particulier J a une grande signification pour l'exposition ultérieure.

Le rapport des symboles J et E peut être représenté par l'équation symbolique

$$\mathbf{J} = \Big/^{\omega = x} \mathrm{E} = \Big/^{\delta = 0} \mathrm{E}, \tag{22}$$

où les grandeurs ω et δ sont liées par l'équation

$$x = \omega + \delta. \tag{22'}$$

Les grandeurs ω et δ jouent un rôle analogue aux clefs algébriques de Cauchy.

L'équation (22') montre que, pour $\omega = x$, on a

$$\delta = 0.$$

L'auteur montre que les propriétés du symbole J peuvent être exprimées par les égalités

$$\mathrm{J}[\psi(\omega)] = \psi(x), \tag{23}$$

$$\mathrm{J}[\varphi(\omega)\psi x] = \varphi(x)\psi(x), \tag{24}$$

$$\mathbf{J}\frac{\varphi x}{x-\omega} = \mathbf{J}\frac{\varphi(x)}{\delta} = \varphi'(x), \tag{25}$$

$$\mathbf{J}\frac{\varphi(x)}{(x-\omega)^2} = \mathbf{J}\frac{\varphi x}{\delta^2} = \frac{1}{2}\varphi''(x) = \frac{1}{2}\frac{d^2\varphi x}{dx^2}, \tag{26}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\mathbf{J}\frac{\varphi(x)}{(x-\omega)^\mu} = \mathbf{J}\frac{\varphi x}{\delta^\mu} = \frac{1}{\Pi(\mu)}\varphi^{(\mu)}(x) = \frac{1}{\Pi(\mu)}\frac{d^\mu\varphi x}{dx^\mu}, \tag{27}$$

$$\mathrm{J}[\varphi x(x-\omega)^\mu] = \mathrm{J}[\varphi x\delta^\mu] = 0, \tag{28}$$

$$\mathrm{J}\varphi(\omega)\frac{\psi x}{(x-\omega)^\mu} = \mathrm{J}\varphi(\omega)\frac{\psi x}{\delta^\mu} = \frac{\varphi(x)\psi^{(\mu)}(x)}{\Pi(\mu)}, \tag{29}$$

$$\mathbf{J}\frac{\varphi(\omega)}{\delta^\mu} = \mathbf{J}\frac{\varphi\omega}{(x-\omega)^\mu} = 0. \tag{30}$$

En introduisant les quantités

$$\left\{\begin{aligned} a_0 &= \varphi(\omega), \\ a_1 &= \varphi'(\omega), \\ a_2 &= \frac{\varphi''(\omega)}{1.2}, \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ a_\mu &= \frac{\varphi^{(\mu)}(\omega)}{1.2\dots\mu} \end{aligned}\right. \tag{31}$$

et

$$(32)\quad \begin{cases} A_0 = J a_0 = \varphi(x), \\ A_1 = J a_1 = \varphi'(x), \\ A_2 = J a_2 = \dfrac{\varphi''(x)}{1.2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_\mu = J a_\mu = \dfrac{\varphi^{(\mu)}(x)}{1.2\dots\mu}, \end{cases}$$

on peut représenter le théorème de Taylor par les formules

$$(33)\quad \begin{cases} \varphi(x) = a_0 + a_1(x-\omega) + a_2(x-\omega)^2 + \dots + a_\mu(x-\omega)^\mu + \dots \\ \qquad = a_0 + a_1\delta + a_2\delta^2 + \dots, \\ \psi(x) = b_0 + b_1(x-\omega) + \dots = b_0 + b_1\delta + b_2\delta^2 + \dots, \end{cases}$$

et les relations entre les quantités A_0, A_1, ..., A_μ par les égalités

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{dA_0}{dx} = A_1, \\ \dfrac{dA_1}{dx} = 2A_2, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{dA_\mu}{dx} = (\mu+1)A_{\mu+1}. \end{cases}$$

Les propriétés du symbole J représentées par les équations (23, 24, ..., 34) avec les formules (20) et (21) peuvent résoudre beaucoup de questions du Calcul différentiel.

Comme exemple de cette application, l'auteur déduit la formule de Leibnitz.

On trouve immédiatement

$$\begin{aligned} \frac{d^\mu \varphi\psi}{dx^\mu} &= \Pi(\mu)\, \mathbf{J}\, \frac{\varphi x \psi x}{\delta^\mu} \\ &= \Pi(\mu)\, \mathbf{J}\left[\frac{\psi(x)}{\delta^\mu}\left(\varphi\omega + \delta\varphi'\omega + \frac{\delta^2}{1.2}\varphi''\omega + \dots\right)\right] \\ &= \Pi(\mu)\left[\frac{\varphi(x)}{\Pi(\mu)}\frac{d^\mu\psi x}{dx^\mu} + \frac{1}{\Pi(\mu-1)}\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^{\mu-1}\psi x}{dx^\mu} + \dots\right]. \end{aligned}$$

L'auteur déduit immédiatement les formules qui représentent

$$\frac{d^n(\varphi^\mu)}{dx^n}, \quad \frac{d^\mu}{dx^\mu}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right), \quad \frac{d^\mu}{dx^\mu}(F\varphi x), \quad \dots.$$

Il déduit aussi l'expression de la fonction sphérique

$$(35)\qquad X_\mu = \mathop{\mathrm{S}}_{u=0}^{u=\mathrm{E}\frac{\mu}{2}} \frac{1}{2^{2u}} \frac{\Pi(\mu)}{[\Pi(u)]^2\,\Pi(\mu-2u)} (x^2-1)^u x^{\mu-2u}.$$

Pour montrer l'application du symbole J au développement des fonctions en séries, il trouve le développement de la fonction $\mathrm{E}\frac{\varphi(x)}{x}$.

En effet,

$$(36)\qquad \mathrm{E}\frac{\varphi x}{x} = \mathrm{J}\frac{\varphi x}{x} = \mathrm{J}\frac{\varphi x}{\omega+\delta} = \mathrm{J}\frac{\varphi x}{\delta} - \mathrm{J}\frac{\omega\varphi x}{\delta^2} + \mathrm{J}\frac{\omega^2\varphi x}{\delta^3} - \ldots.$$

Suivant la formule (29) on a

$$(37)\qquad \mathrm{E}\frac{\varphi x}{x} = \frac{d\varphi}{dx} - \frac{x}{1.2}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{x^2}{1.2.3}\frac{d^3\varphi}{dx^3} - \ldots,$$

d'où l'on trouve la formule de Bernoulli.

L'auteur donne le développement des fonctions

$$\mathrm{E}\frac{\varphi x}{x^2},\quad \mathrm{E}\frac{\varphi x}{x^\mu},\quad \mathrm{E}\frac{\varphi x}{x^2-ax-b},\quad \mathrm{E}\frac{\varphi x}{\psi x},\quad \ldots.$$

Le développement de la fonction sphérique par les méthodes du calcul $\mathrm{E}\varphi x$ donne

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} 2^\mu X_\mu = {} & \mathrm{E}\left(x-\frac{1}{x}\right)^\mu + \mu x\,\mathrm{E}\left[\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)^\mu\right] \\ & + (\mu+1)_2 x^2\,\mathrm{E}\left[\frac{1}{x^2}\left(x-\frac{1}{x}\right)^\mu\right] \\ & + (\mu+2)_3 x^3\,\mathrm{E}\frac{1}{x^3}\left(x-\frac{1}{x}\right)^\mu + \ldots; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on a le développement

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} 2^\mu X_\mu = {} & [1+\mu+(\mu+1)_2+(\mu+2)_3+\ldots+(2\mu-1)_\mu]\,x^\mu \\ & -\mu\,[1+\mu+(\mu+1)_2+\ldots+(2\mu-3)_{\mu-2}]\,x^{\mu-2} \\ & +\mu_2[1+\mu+\ldots+(2\mu-5)_{\mu-4}]\,x^{\mu-4}-\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

La fonction sphérique satisfait aussi à l'équation

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} X_n &= x\,\mathrm{E}\frac{X_n}{x} + (2x^2-1)\,\mathrm{E}\frac{X_n}{x^2} + \ldots \\ &\quad + [\mu x^n - (\mu-1)x^{\mu-1}]\,\mathrm{E}\frac{X_n}{x^\mu} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Pour toutes les fonctions holomorphes la formule (27) donne aussi les relations

$$(41)\quad \frac{d}{dx}\mathrm{E}\,\varphi x = \mathrm{E}\left(\frac{d}{dx}\varphi x\right) = \mathrm{E}\frac{\varphi x}{x} + x\,\mathrm{E}\frac{\varphi x}{x^2} + x^2\,\mathrm{E}\frac{\varphi x}{x^3} + \ldots,$$

$$(42)\quad \frac{d^2}{dx^2}\mathrm{E}\,\varphi x = \mathrm{E}\left(\frac{d^2}{dx^2}\varphi x\right) = \mathrm{E}\frac{\varphi x}{x^2} + 2x\,\mathrm{E}\frac{\varphi x}{x^3} + \ldots.$$

.....

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^\mu}{dx^\mu}\mathrm{E}\,\varphi x &= \mathrm{E}\left(\frac{d^\mu}{dx^\mu}\varphi x\right) \\ &= \mathrm{E}\frac{\varphi x}{x^\mu} + \mu x\,\mathrm{E}\frac{\varphi}{x^{\mu+1}} + (\mu+1)_2 x^2\,\mathrm{E}\frac{\varphi}{x^{\mu+2}} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

L'auteur indique aussi le rapport entre le calcul $\mathrm{E}(\varphi x)$ et le calcul des dérivations d'Arbogast.

Ayant donné les séries

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_\mu x^\mu + \ldots, \\ \psi_2(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_\mu x^\mu + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et en désignant par Д l'opération de la dérivation qui satisfait aux relations

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} &\text{Д}\,a_0 = a_1, && \text{Д}\,b_0 = b_1, \\ &\text{Д}\,a_1 = 2a_2, && \text{Д}\,b_1 = 2b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots \\ &\text{Д}\,a_\mu = (\mu+1)a_{\mu+1}, && \text{Д}\,b_\mu = (\mu+1)b_{\mu+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

l'auteur donne la formule générale suivante du développement des fonctions composées en séries

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{F}[\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)] &= \mathrm{F}(a_0, b_0, c_0) + x\,\text{Д}\,\mathrm{F}(a_0, b_0, c_0) + \ldots \\ &\quad + \frac{x^\mu}{1.2\ldots\mu}\text{Д}^\mu\mathrm{F}(a_0, b_0, c_0) + \ldots. \end{aligned}\right.$$

où, en faisant l'opération Д, il faut suivre les règles de la différentiation et prendre en même temps en considération les équations

(44). La formule (45) peut être représentée symboliquement par l'équation

$$(46)\qquad F[\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)] = e^{x\Delta} F(a_0, b_0, c_0).$$

De même a lieu une formule plus générale

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned} &F\left[\psi_1(x), \frac{d\psi_1}{dx}, \frac{d^2\psi_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^\mu\psi_1}{dx^\mu}, \psi_2(x), \frac{d\psi_2}{dx}, \ldots, \frac{d^\nu\psi_2}{dx^\nu}\right] \\ &= e^{x\Delta} F[a_0, a_1, \Pi(2)a_2, \ldots, \Pi(\mu)a_\mu, b_0, b_1, \ldots, \Pi(\nu)b_\nu]. \end{aligned}\right.$$

L'auteur démontre les relations générales suivantes entre les fonctions symétriques des racines de l'équation

$$(48)\qquad p_0x^m + p_1x^{m-1} + \ldots + p_m = 0,$$

$$(49)\qquad \Delta s_\mu = \mu s_{\mu+1},$$

$$(50)\qquad s_\mu = -\frac{1}{\Pi(\mu-1)}\Delta^{(\mu)}\log p_0,$$

où s_μ représente la somme des degrés μ des racines de l'équation (48).

L'équation (49) donne immédiatement le moyen de déterminer $s_{\mu+1}$ suivant s_μ.

L'auteur détermine aussi l'expression de $\Delta\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma$ et trouve les différentes relations générales différentielles.

Comme exemple de ces relations générales peut être donnée la relation

$$(51)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varphi\frac{d^\mu}{dx^\mu}\left(\frac{1}{\varphi}\right) + \mu\frac{d^{\mu-1}}{dx^{\mu-1}}\left(\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dx}\right) - \mu_2\frac{d^{\mu-2}}{dx^{\mu-2}}\left(\frac{1}{\varphi}\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) \\ &\qquad + \mu_3\frac{d^{\mu-3}}{dx^{\mu-3}}\left(\frac{1}{\varphi}\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right) - \ldots + (-1)^{\mu+1}\frac{1}{\varphi}\frac{d^\mu\varphi}{dx^\mu} = 0\ (^1). \end{aligned}\right.$$

A la fin de ce Mémoire l'auteur indique la loi de dualité, suivant laquelle chaque loi générale entre les fonctions symétriques peut être transformée en une loi générale, qui exprime la relation différentielle entre les fonctions et inversement.

---

(1) A présent cette identité a été démontrée directement par Posse, professeur de Mathématiques à l'Université de Saint-Pétersbourg.

Quatrième Mémoire. — *Rapport du calcul* $E(\varphi x)$ *au calcul des différences finies et à la théorie des résidus* (197-258 p.). — L'auteur déduit les relations suivantes :

$$(52)\quad \begin{cases} E\Delta(\varphi x) = \mathbf{J}\dfrac{\varphi x}{\delta - 1} = \mathbf{J}\dfrac{\varphi x}{x - \omega - 1}, \\ E\dfrac{\Delta^2\varphi}{1.2} = \mathbf{J}\dfrac{\varphi}{(\delta-1)(\delta-2)} = \mathbf{J}\dfrac{\varphi}{[x-(\omega+1)][x-(\omega+2)]}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E\dfrac{\Delta^n\varphi}{\Pi(n)} = \mathbf{J}\dfrac{\varphi}{(\delta-1)(\delta-2)(\delta-3)\ldots(\delta-n)} \\ \qquad = \mathbf{J}\dfrac{\varphi}{[x-(\omega+1)]\ldots[x-(\omega+n)]}. \end{cases}$$

On peut pour les fonctions holomorphes remplacer l'expression $E\Delta^\mu\varphi$ par l'expression $\Delta^n\varphi$.

Les expressions (52) donnent les relations

$$(53)\qquad \Delta\varphi = E\frac{\varphi}{x} + (x+1)E\frac{\varphi}{x^2} + (x+1)^2 E\frac{\varphi}{x^3} + \ldots,$$

$$(54)\quad \begin{cases} \dfrac{\Delta^2\varphi}{1.2} = E\dfrac{\varphi}{x^2} + (2x+3)E\dfrac{\varphi}{x^3} + (3x^2+9x+7)E\dfrac{\varphi}{x^4} + \ldots \\ \qquad + [(x+2)^{\mu-1} - (x+1)^{\mu-1}]E\dfrac{\varphi}{x^\mu}. \end{cases}$$

L'auteur donne l'expression $\dfrac{\Delta^n\varphi}{1.2\ldots n}$ sous la forme

$$(55)\qquad \frac{\Delta^n\varphi}{1.2\ldots n} = E\frac{\varphi}{x^n} + \Sigma_1 E\frac{\varphi}{x^{n+1}} + \ldots + \Sigma_\mu E\frac{\varphi}{x^{n+\mu}} + \ldots,$$

où Σ_μ peut être déterminée par l'équation

$$(56)\qquad \mu\Sigma_\mu = s_1\Sigma_{\mu-1} + s_2\Sigma_{\mu-2} + \ldots + (\mu-1)\Sigma_1 + s_\mu$$

et où

$$(57)\qquad s_\mu = nx^\mu + \mu x^{\mu-1}\mathop{\mathbf{S}}_{u=1}^{u=n} u + \mu_2 x^{\mu-2}\mathop{\mathbf{S}}_{u=1}^{u=n} u^2 + \ldots + \mathop{\mathbf{S}}_{u=1}^{u=n} u^\mu.$$

Une autre forme de l'expression $\Delta^n\varphi$ dépend des nombres de Morgan et a la forme

$$(58)\quad \begin{cases} \Delta^n\varphi = \Delta^n 0^n E\dfrac{\varphi}{x^n} + \Delta^n[0(0+x)^n]E\dfrac{\varphi}{x^{n+1}} \\ \qquad + \Delta^n[0(0+x)^{n+1}]E\dfrac{\varphi}{x^{n+2}} + \Delta^n[0(0+x)^{n+2}]E\dfrac{\varphi}{x^{n+3}} + \ldots. \end{cases}$$

Les coefficients de cette formule sont les expressions symboliques qu'on peut trouver par la formule

$$(59)\quad \begin{cases} \Delta^n[\mathrm{o}(\mathrm{o}+x)^{n+2}] = \Delta^n \mathrm{o}^{n+3} + (n+2)\Delta^n \mathrm{o}^{n+2} x \\ \qquad + (n+2)_2 \Delta^n \mathrm{o}^{n+1} x^2 + (n+2)_3 \Delta^n \mathrm{o}^n x^3, \end{cases}$$

et où $\Delta^n \mathrm{o}^m$ est le nombre connu de Morgan.

L'auteur déduit les développements des fonctions $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots, \frac{1}{x^\mu}$ suivant les fonctions factorielles de degré négatif et résout le problème général du développement de la fonction $\mathrm{O}(\varphi x)$ suivant ces fonctions.

Comme résultats les plus simples de ces développements peuvent être données les formules

$$(60)\quad \mathrm{E}\frac{d\varphi}{dx} = \mathrm{E}\frac{\varphi}{x} + x\mathrm{E}\frac{\varphi}{x(x+1)} + x(x+1)\mathrm{E}\frac{\varphi}{x(x+1)(x+2)} + \ldots,$$

$$(61)\quad \begin{cases} \mathrm{E}\frac{\varphi}{x} = \Delta\varphi - \frac{x+1}{2}\Delta^2\varphi \\ \qquad + \frac{(x+1)(x+2)}{1.2.3}\Delta^3\varphi - \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3.4}\Delta^4\varphi + \ldots, \end{cases}$$

$$(62)\quad \mathrm{E}\frac{\varphi}{x^\mu} = \frac{1}{\Pi(\mu)}\Delta^\mu\varphi - \frac{\mathrm{C}(\mu,1)}{\Pi(\mu+1)}\Delta^{\mu+1}\varphi + \frac{\mathrm{C}(\mu+1,2)}{\Pi(\mu+2)}\Delta^{\mu+2}\varphi - \ldots$$

où $\mathrm{C}(\mu, k)$ désigne la somme des produits de toutes les combinaisons de μ nombres naturels, où chaque produit est composé de k nombres. L'auteur applique aussi la méthode des fonctions indéterminées au calcul $\mathrm{E}(\varphi x)$.

Comme résultat de cette méthode peut être donnée la formule

$$(63)\quad \begin{cases} \Delta\varphi = \mathrm{E}\frac{\varphi}{x} + (x+1)\mathrm{E}\frac{\varphi}{x(x+1)} \\ \qquad + (x+1)(x+2)\mathrm{E}\frac{\varphi}{x(x+1)(x+2)} + \ldots \end{cases}$$

L'auteur finit son Ouvrage en indiquant le rapport du calcul $\mathrm{E}(\varphi x)$ avec la théorie des résidus de Cauchy.

Comme exemple d'une des formules de ce genre peut être donnée la formule

$$(64)\quad \mathrm{E}[\psi z \mathrm{E}(\varphi z)] = \mathop{\mathfrak{L}}_{u'=0} \frac{\psi\left(\frac{1}{u'}\right)}{1-zu'} \left\{ \mathop{\mathfrak{L}}_{u=0} \frac{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{u(u'-u)} \right\}.$$

L'auteur laisse de côté l'application du calcul $E(\varphi x)$ à la théorie des fonctions algébriques, des fractions continues, le rapport du calcul $E(\varphi x)$ avec le calcul $E(x)$ et le Calcul intégral. Il n'a pas aussi étudié l'application du calcul $E(\varphi x)$ aux fonctions avec deux variables indépendantes.

L'auteur consacre son Ouvrage à la mémoire de Leibnitz en commémoration de l'anniversaire des deux cents ans écoulés depuis l'invention du Calcul infinitésimal par Leibnitz.

REINHOLD VON LILIENTHAL. — UNTERSUCHUNGEN ZUR ALLGEMEINEN THEORIE DER KRUMMEN OBERFLÄCHEN UND GERADLINIGEN STRAHLENSYSTEME. Bonn, 1886.

La courbure d'un élément régulier d'une surface est déterminée quand on connaît les rayons de courbure principaux, ainsi que la situation des lignes de courbure, laquelle peut être fixée par un angle convenablement choisi. On peut se demander s'il existe une surface telle que ces deux rayons et cet angle aient des valeurs arbitrairement données.

M. Lipschitz [1] a résolu cette question; M. Reinhold von Lilienthal la reprend en donnant à la solution une forme plus générale; c'est l'objet de la première Partie de son travail. Dans la seconde Partie, il traitera la question analogue pour les systèmes de droites.

Considérons une surface non développable. Soient X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale au point (x, y, z); ρ_1, ρ_2 les rayons de courbure principaux; A_1, B_1, C_1 les cosinus directeurs de la tangente à la ligne de courbure à laquelle correspond ρ_1; A_2, B_2, C_2 les quantités analogues pour la seconde ligne de courbure; regardons toutes ces quantités comme des fonctions de deux paramètres p, q et introduisons les angles σ, φ définis par les formules

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie de Berlin*, 14 décembre 1882, 8 février 1883.

suivantes, que le lecteur interprétera sans peine,

$$\cos\sigma = \frac{A_1\frac{\partial X}{\partial p} + B_1\frac{\partial Y}{\partial p} + C_1\frac{\partial Z}{\partial p}}{\sqrt{L}},$$

$$\sin\sigma = \frac{A_2\frac{\partial X}{\partial p} + B_2\frac{\partial Y}{\partial p} + C_2\frac{\partial Z}{\partial p}}{\sqrt{L}},$$

$$\cos(\sigma - \varphi) = \frac{A_1\frac{\partial X}{\partial q} + B_1\frac{\partial Y}{\partial q} + C_1\frac{\partial Z}{\partial q}}{\sqrt{N}},$$

$$\sin(\sigma - \varphi) = \frac{A_2\frac{\partial X}{\partial q} + B_2\frac{\partial Y}{\partial q} + C_2\frac{\partial Z}{\partial q}}{\sqrt{N}}.$$

On a posé

$$L = \left(\frac{\partial X}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)^2,$$

$$M = \frac{\partial X}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial q} + \frac{\partial Y}{\partial p}\frac{\partial Y}{\partial q} + \frac{\partial Z}{\partial p}\frac{\partial Z}{\partial q},$$

$$N = \left(\frac{\partial X}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right)^2;$$

le rayon de courbure de la section normale menée par la tangente à la direction définie par les deux différentielles dp, dq est donné par la formule

$$\rho = \frac{E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2}{\Theta\,dp^2 + 2\Theta'\,dp\,dq + \Theta''\,dq^2},$$

où les coefficients des deux formes binaires en dp, dq, qui figurent au numérateur et au dénominateur, sont des fonctions de p et de q; si l'on fait la substitution qui change simultanément ces deux formes en une somme de deux carrés, on a

$$\rho = \frac{\rho_1\mathfrak{I}_1 + \rho_2\mathfrak{I}_2}{\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2};$$

en posant, ainsi qu'il résulte d'un calcul facile,

$$\mathfrak{I}_1 = \rho_1\left[\sqrt{L}\cos\sigma\,dp + \sqrt{N}\cos(\sigma - \varphi)\,dq\right]^2,$$

$$\mathfrak{I}_2 = \rho_2\left[\sqrt{L}\sin\sigma\,dp + \sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)\,dq\right]^2,$$

on déduit de là des expressions très simples pour les quantités E, F, G; Θ, Θ', Θ'', expressions où ne figurent plus que les

quantités σ, φ, ρ_1, ρ_2, L, N, et l'on parvient ainsi aux formules

$$\begin{aligned}
dx &= -\rho_1 A_1 \left[\sqrt{L}\cos\sigma\, dp + \sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)\, dq\right] \\
&\quad - \rho_2 A_2 \left[\sqrt{L}\sin\sigma\, dp + \sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)\, dq\right], \\
dy &= -\rho_1 B_1 \left[\sqrt{L}\cos\sigma\, dp + \sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)\, dq\right] \\
&\quad - \rho_2 B_2 \left[\sqrt{L}\sin\sigma\, dp + \sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)\, dq\right], \\
dz &= -\rho_1 C_1 \left[\sqrt{L}\cos\sigma\, dp + \sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)\, dq\right] \\
&\quad - \rho_2 C_2 \left[\sqrt{L}\sin\sigma\, dp + \sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)\, dq\right].
\end{aligned}$$

Observons enfin que les formules qui donnent $\cos\sigma$, $\cos(\sigma-\varphi)$, $\sin\sigma$ et $\sin(\sigma-\varphi)$ permettent d'obtenir A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 au moyen de L, N, σ, φ; la résolution est en effet toujours possible, puisque l'on suppose $LN - M^2 = \sin^2\varphi$ différent de zéro. Dès lors, si dans les formules qui donnent dx, dy, dz on regarde X, Y, Z; ρ_1, ρ_2, σ comme des fonctions arbitrairement données de p et de q, les seconds membres pourront être écrits explicitement et, si les conditions d'intégrabilité sont vérifiées, on pourra obtenir par intégration les coordonnées x, y, z d'un point d'une surface répondant à la question. Quant à ces conditions d'intégrabilité, elles peuvent être mises sous la forme suivante, qui équivaut à deux équations, obtenues en égalant à zéro la partie réelle et le coefficient de la partie imaginaire :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial q}\left[\sqrt{L}(\rho_1+\rho_2) + (\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}\right] \\
&\quad - i\,\frac{\rho_1+\rho_2+(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}}{\sin\varphi}\left(\frac{\partial\sqrt{N}}{\partial p} - \cos\varphi\,\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial q}\right) \\
&\quad = e^{-i\varphi}\frac{\partial}{\partial p}\left[\sqrt{N}(\rho_1+\rho_2) + (\rho_1-\rho_2)e^{-2i(\sigma-\varphi)}\right] \\
&\quad + ie^{-i\varphi}\,\frac{\rho_1+\rho_2+(\rho_1-\rho_2)e^{-2i(\sigma-\varphi)}}{\sin\varphi}\left(\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial q} - \cos\varphi\,\frac{\partial\sqrt{N}}{\partial p}\right).
\end{aligned}$$

Les formules de M. Lipschitz s'obtiennent en supposant dans celles qui précèdent

$$X = \cos p, \qquad Y = \sin p\cos q, \qquad Z = \sin p\sin q.$$

L'étude des surfaces minima, celle des surfaces aux normales parallèles fournissent des applications intéressantes.

Passons maintenant à la seconde Partie du travail de M. Reinhold von Lilienthal.

Chaque rayon d'un système est défini par un de ces points x, y, z que l'on peut supposer décrire une surface, et par les cosinus ξ, η, ζ; en supposant que toutes ces quantités dépendent des deux paramètres p, q et en faisant

$$\mathrm{H} = \left(\frac{\partial\xi}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial p}\right)^2,$$

$$\Phi = \frac{\partial\xi}{\partial p}\frac{\partial\xi}{\partial q} + \frac{\partial\eta}{\partial p}\frac{\partial\eta}{\partial q} + \frac{\partial\zeta}{\partial p}\frac{\partial\zeta}{\partial q},$$

$$\Psi = \left(\frac{\partial\xi}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial q}\right)^2,$$

on étudie le cas où la quantité $\mathrm{H}\Psi - \Phi^2$ n'est pas nulle.

Chaque point d'un rayon est défini par sa distance (affectée d'un signe) au point (x, y, z). Si l'on désigne par r cette distance pour le point où le rayon $(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ défini par les deux paramètres p, q est rencontré par la perpendiculaire commune à ce rayon et au rayon infiniment voisin défini par les deux paramètres $p + dp$, $q + dq$, on aura, en employant les notations de M. Kummer [1],

$$r = -\frac{e\,dp^2 + (f + f')\,dp\,dq + g\,dq^2}{\mathrm{H}\,dp^2 + 2\Phi\,dp\,dq + \Psi\,dq^2},$$

où

$$e = \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial\xi}{\partial p} + \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial\eta}{\partial p} + \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial\zeta}{\partial p};$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial\xi}{\partial p} + \frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial\eta}{\partial p} + \frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial\zeta}{\partial p},$$

$$f' = \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial\xi}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial\eta}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial\zeta}{\partial q},$$

$$g = \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial\xi}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial\eta}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial\zeta}{\partial q};$$

en désignant par r_1, r_2 le maximum et le minimum de r et en faisant la substitution qui transforme les deux formes binaires en une somme de deux carrés, on a

$$r = \frac{r_1\mathfrak{I}_1 + r_2\mathfrak{I}_2}{\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2};$$

---

(1) *Journal de Crelle*, t. 57, p. 189.

si l'on introduit ensuite les angles τ, ψ définis d'une part par les formules

$$\cos\tau = \frac{\varkappa_2 \frac{\partial\xi}{\partial p} + \lambda_2 \frac{\partial\eta}{\partial p} + \mu_2 \frac{\partial\zeta}{\partial p}}{\sqrt{\mathrm{H}}},$$

$$\cos(\tau - \psi) = \frac{\varkappa_2 \frac{\partial\xi}{\partial q} + \lambda_2 \frac{\partial\eta}{\partial q} + \mu_2 \frac{\partial\zeta}{\partial q}}{\sqrt{\Psi}},$$

où $\varkappa_2$, λ_2, μ_2 sont les cosinus directeurs de la perpendiculaire commune qui répond à r_2, de l'autre par les formules analogues où dans les seconds membres $\varkappa_2$, λ_2, μ_2 sont changés en $\varkappa_1$, λ_1, μ_1, et dans les premiers les cosinus en sinus, on trouve

$$\mathfrak{I}_1 = \left[\sqrt{\Pi}\cos\tau\, dp + \sqrt{\Psi}\cos(\tau - \psi)\, dq\right]^2,$$
$$\mathfrak{I}_2 = \left[\sqrt{\Pi}\sin\tau\, dp + \sqrt{\Psi}\sin(\tau - \psi)\, dq\right]^2;$$

ces formules permettent d'obtenir les expressions de e, $f + f'$, g au moyen de H, Ψ, τ, ψ, r_1, r_2. On en déduit, pourvu toutefois que la surface (x, y, z) ne soit pas une surface caustique du système de rayons considéré, un système de formules telles que

$$dx = \mathfrak{A}_1\, dp + \mathfrak{A}_2\, dq,$$
$$dy = \mathfrak{B}_1\, dp + \mathfrak{B}_2\, dq,$$
$$dz = \mathfrak{C}_1\, dp + \mathfrak{C}_2\, dq,$$

où les expressions de $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ au moyen de p, q pourront, quand les deux quantités $\mathrm{H}\Psi - \Phi^2$, $eg - ff'$ sont différentes de zéro, être obtenues explicitement si l'on connaît, en fonction de p, q, les quantités X, Y, Z; ξ, η, ζ; r_1, r_2, τ, et en outre l'expression au moyen de ces dernières quantités de l'une des quantités f, f'; cette dernière expression se déduit en général d'une relation qui existe entre e, f, f', g et dont les coefficients ne dépendent que de X, Y, Z; ξ, η, ζ.

Si donc on se donne arbitrairement X, Y, Z; ξ, η, ζ; r_1, r_2, τ en p, q, pourvu toutefois que les conditions précédemment imposées soient vérifiées et qu'il en soit de même des conditions d'intégrabilité pour les seconds membres des formules qui donnent dx, dy, dz, on obtiendra, par simple intégration, en fonction

de p, q, les coordonnées x, y, z des points d'une surface qui, avec les quantités ξ, η, ζ, détermineront un système de rayons; ce système se réduit aux systèmes de normales à une surface (x, y, z) déterminée comme il a été expliqué dans la première Partie quand on suppose $X = \xi$, $Y = \eta$, $Z = \zeta$; $r_1 = \rho_1$, $r_2 = \rho_2$, $\tau = \sigma$; la condition $eg - ff' \gtrless 0$ signifie alors que la surface n'est pas développable; on voit ainsi bien nettement que le problème traité dans la seconde Partie est la généralisation directe de celui qui avait été résolu dans la première. L'étude des conditions d'intégrabilité donne lieu à un examen approfondi. Enfin l'auteur termine son travail en indiquant diverses applications.

LAMPE (E.). — Geometrische und mechanische Aufgaben zur numerischen Aufloesung von Gleichungen hoeherer Grade. Wissenschaftliche Beilage zum Programm der Luisenstaedtischen Oberrealschule zu Berlin. Berlin, 1885; 24 p. in-4°.

Le titre ne correspond pas exactement au contenu. Quoique l'auteur ait eu l'intention de publier, après les problèmes de Géométrie, une seconde Section comprenant des problèmes de Mécanique, il fut forcé de renoncer à ce projet, parce que la première Partie avait déjà épuisé l'espace disponible de trois feuilles.

En 1877, le même auteur a publié un petit Livre portant le titre : *Geometrische Aufgaben zu den kubischen Gleichungen;* alors il avait en vue de donner une suite de problèmes propres à être discutés par les élèves, eu égard aux propriétés générales de la question; il les puisait de préférence dans le champ restreint de planimétrie ou de stéréométrie. Ayant observé que la plupart des Recueils d'équations algébriques n'exigent que le calcul numérique des racines d'équations cubiques, il insista, avant tout, sur la discussion générale des équations cubiques auxquelles conduisent les problèmes de Géométrie. Après avoir trouvé l'équation, on est toujours tenu d'examiner séparément les racines et de décider si elles représentent effectivement les solutions du problème proposé. Cette recherche détaillée peut servir de préparation à

l'étude des fonctions et fait ressortir, avec une facilité remarquable, le maximum ou minimum des quantités qui forment les coefficients des équations à résoudre. Ainsi, les équations cubiques entrent dans le cadre des objets qui servent à élargir et aiguiser l'intelligence des étudiants. Enfin l'auteur n'a pas omis d'ajouter à chaque problème plusieurs exemples numériques destinés à illustrer la discussion. Le Recueil comprend 64 numéros de problèmes sur les équations cubiques et 11 sur les équations biquadratiques; un supplément développe la rectification et la quadrature élémentaires des épicycloïdes et des hypocycloïdes.

Tandis que, dans cette première collection, on demande surtout de trouver les résultats généraux qui découlent des équations de degré supérieur, le nouveau Recueil donné par l'auteur comme suite de la publication antérieure, se contente, en général, de calculer le résultat numérique qui se tire des équations du problème, soit algébriques, soit transcendantes. L'arrangement des problèmes ne se règle plus sur le degré des équations qui conduisent aux solutions : c'est la nature même des questions qui a décidé sur la formation des groupes placés ensemble. Les premiers douze numéros se rapportent aux polygones inscrits et circonscrits à un cercle : « Étant donnés les côtés, trouver le rayon du cercle ». Les polygones circonscrits dépendent d'équations faciles à former, d'où l'on déduit quelques propositions générales. Les équations pour les polygones inscrits, étudiées par Möbius (*Journal de Crelle*, t. 3), montent à des degrés très élevés et n'ont été formées jusqu'à ce jour que pour les cas élémentaires des triangles et quadrilatères. Cependant, sans même développer ces équations, on parvient rapidement à calculer les valeurs numériques et à décider sur le nombre des solutions. Des questions de goniométrie (13-15) viennent s'ajouter à ces problèmes circulaires. Les numéros 16-23 demandent de partager certaines surfaces ou volumes suivant une loi donnée et mènent à des équations tantôt algébriques, tantôt transcendantes. Enfin, les n°s 34-39 sont empruntés à la Géométrie analytique et à la Trigonométrie.

Comme méthode élémentaire et générale de solution des équations, l'auteur propose d'employer la *regula falsi* énoncée comme suit : « La variation $\Delta f(x)$ d'une fonction $f(x)$ de x est propor-

tionnelle à la variation Δx de la variable indépendante, si cette variation est assez petite ». Cette forme accoutume l'élève à employer les notions de l'analyse d'où elle dérive et fait voir que cette règle de fausse position n'est pas essentiellement différente de la règle de Newton.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MOEBIUS. — Gesammelte Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Zweiter Band. herausgegeben von F. Klein; 708 p. in-8°. Dritter Band, herausgegeben von F. Klein; 580 p. in-8°. Leipzig; Hirzel, 1886.

La publication des Œuvres complètes de Möbius se poursuit rapidement; le deuxième et le troisième Volume, que nous annonçons, ont reçu les soins de M. Klein.

Le deuxième Volume contient les Mémoires de Géométrie qui ne se rapportent pas au calcul barycentrique; ces Mémoires concernent en particulier la Trigonométrie et la Géométrie sphériques, l'étude des formes des cubiques, l'étude, présentée d'ailleurs d'une façon toute géométrique, de la transformation dans un plan qui résulte de la relation

$$z = \frac{a z' + b}{a' z' + b'},$$

où z et z' sont les affixes de deux points correspondants, la théorie de la symétrie avec des applications aux systèmes de cristaux, etc. Il convient de signaler en outre, et d'une façon particulière, le Mémoire intitulé : *Theorie der Elementar-Verwandschaft;* Möbius désignait sous ce nom tout mode de transformation qui fait correspondre un point à un point et tel que, si deux points de la première figure sont infiniment voisins, il en soit toujours de même des deux points correspondants de la seconde figure. Ce Mémoire et le suivant (*Ueber die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders*) contiennent les résultats les plus essentiels d'un travail présenté à l'Académie des Sciences de Paris, en 1861, pour le Grand prix de Mathématiques. Diverses parties de ce travail, demeuré inédit, sont d'ailleurs publiées à la fin du Volume, ainsi que quelques recherches, inédites aussi, sur la symétrie.

Quant au troisième Volume, il contient la *Statique* et quelques Mémoires se rapportant au même sujet. Le *Lehrbuch der Statik* demeurera assurément un des principaux titres de gloire de Möbius; on sait assez l'influence qu'a eue la publication sur l'ensei-

gnement et le développement de la Mécanique, et il est sans doute inutile de parler d'un Livre qui restera classique. J. T.

MANNHEIM (A.). — COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, CONTENANT LES ÉLÉMENTS DE LA GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE. — 2e édition; 1 vol. in-8°; XI-480 p. Paris, Gauthier-Villars; 1886.

Le public savant ne pouvait manquer de faire bon accueil au *Cours de Géométrie descriptive* de M. Mannheim; ce Livre était suffisamment recommandé par la grande situation scientifique de l'auteur, qui avait su y résumer les principaux résultats de ses belles et ingénieuses recherches sur la *Géométrie cinématique;* aussi la première édition s'est-elle rapidement épuisée. La seconde édition, que nous sommes heureux d'annoncer, et où quelques perfectionnements de détail ont été introduits, sans que l'économie générale du Livre ait été changée, est assurée du même succès. J. T.

MÉLANGES.

NOTE SUR UN PROBLÈME DE STEINER

(Extrait d'une Lettre à M. P.-H. Schoute);

PAR M. H.-G. ZEUTHEN.

J'espère que vous me permettrez de venir ici ajouter un petit supplément à votre intéressante étude sur un problème de Steiner (1).

(1) *Voir* à la p. 242 du *Bulletin des Sciences mathématiques,* 2e série, t. X. Le problème s'énonce ainsi : *Par un point* O *situé dans le plan d'une courbe algébrique* C_m^n *de l'ordre* n *et de la classe* m *on mène une sécante* l *à la courbe et aux* n *points où cette sécante* l *coupe la courbe; on trace les tangentes à la*

Quant à la question générale, vous vous bornez à déterminer l'ordre $n_1 = \frac{(2n-3)m-r}{2}$ du lieu. Mon supplément contiendra la détermination de son genre p_1 et d'un autre nombre plückérien, et il pourra servir d'exemple d'une méthode qui est applicable en général à la détermination de lieux (ou d'enveloppes).

La détermination du genre se fait immédiatement par la généralisation du théorème sur la conservation du genre, que j'ai donnée dans le t. III des *Mathematische Annalen*. J'en citerai ici la forme due à M. Halphen, qui la rend immédiatement applicable aussi au cas de coïncidences multiples [1]; car la question actuelle peut en présenter dans les cas où la courbe donnée a des singularités supérieures, ou le point fixe a des positions particulières.

Soit donnée une correspondance entre les points de deux courbes C_1 et C_2 des genres p_1 et p_2, et désignons par μ_1 le nombre des points de C_1 qui correspondent à un point donné de C_2, et par μ_2 celui des points de C_2 qui correspondent à un point donné de C_1. Je désigne encore, pour un couple quelconque de points correspondants P_1 et P_2, par ν_1 le nombre de points correspondant à P_2 et coïncidant avec P_1, et par ν_2 le nombre de points correspondant à P_1 et coïncidant avec P_2; toutefois, dans cette dernière énumération, je ne regarde comme coïncidents que les points qui appartiennent à une seule branche complète (cycle de M. Puiseux). Alors on aura, en étendant la somme Σ à tous les couples de points correspondants où $\nu_1 \gtrless \nu_2$,

$$\Sigma(\nu_1 - \nu_2) = 2\mu_2(p_1 - 1) - 2\mu_1(p_2 - 1).$$

---

courbe. Trouver le lieu engendré par les $\frac{n(n-1)}{2}$ *points d'intersection mutuelle de ces n tangentes quand la sécante l tourne autour du point* O.

L'autre problème dont traite M. Schoute n'est que celui qui y correspond selon le principe de dualité.

En adoptant ici les notations de M. Schoute, je désignerai encore par r le nombre de points cuspidaux de la courbe donnée, et son genre par p.

J'appellerai *homologues* des tangentes à cette courbe dont les points de contact se trouvent sur la même sécante l.

[1] *Voir* à la p. 181 de mon Mémoire : *Sur un groupe de théorèmes*, etc., dans le premier Volume des *Acta mathematica*.

En appliquant cette formule à la correspondance du lieu cherché (C_1) et du faisceau (C_2) des droites l par le point fixe O, on aura, dans les cas où O n'a aucune position particulière par rapport à la courbe donnée et où celle-ci n'est douée que de singularités plückériennes,

$$\mu_1 = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad \mu_2 = 1, \qquad p_2 = 0, \qquad \Sigma(\nu_1 - \nu_2) = (m+r)(n-2)$$

et, par conséquent,

$$2(p_1 - 1) = (m+r)(n-2) - n(n-1) = 2(p-1)(n-2) + n(n-3).$$

On obtiendrait le même résultat en considérant la correspondance du lieu cherché avec la courbe donnée.

Si l'on attribue à O des positions particulières, ou à la courbe donnée des singularités supérieures, ce résultat n'est plus immédiatement applicable, mais l'application de notre formule générale de correspondance à ces cas n'est pas moins simple que celle que je viens de faire. En effet, il ne s'agit que d'une simple énumération de points coïncidents sans qu'on ait besoin d'une évaluation des ordres de quantités infiniment petites. Une droite par O rencontrant en s points coïncidents une seule branche de la courbe donnée donnerait, par exemple, occasion aux termes suivants de la somme $\Sigma(\nu_1 - \nu_2)$:

$$\left[\frac{s(s-1)}{2} - 1\right] + (n-s)(s-1).$$

Pour déterminer complètement, dans le sens de Plücker, le lieu cherché, nous chercherons encore ses points cuspidaux, ou plutôt tous ses points multiples formés d'une seule branche complète. Aucun de ces points ne nous échappera si nous cherchons les tangentes de la courbe donnée qui rencontrent une branche correspondante du lieu cherché en des points coïncidant entre eux. Cela ne pourra avoir lieu que dans les deux cas suivants : 1° si la droite joignant le point de contact au point fixe O rencontre une branche de la courbe donnée en deux ou plusieurs points coïncidant entre eux, ou 2° si la tangente a un contact d'ordre supérieur avec la courbe donnée.

Si l'on se borne au cas pour lequel nous avons donné l'expression

complète de p, on ne trouvera de ces façons aucune branche multiple du lieu cherché. On le voit, dans chacun des cas qui peuvent se présenter, par la circonstance que d'autres droites (l'autre tangente à la courbe donnée qui sert à déterminer le point dont il s'agit, ou la droite joignant ce point à O) ne rencontrent la branche formée qu'en un seul point. Le nombre r_1 des points cuspidaux du lieu cherché devient donc égal à zéro.

Si la courbe donnée a des singularités supérieures, ou O une position particulière, l'étude des branches multiples du lieu cherché pourra demander des évaluations des ordres de quantités infiniment petites; mais celles-ci ne seront guère difficiles si seulement les singularités de la courbe sont bien définies. Si, par exemple, la courbe donnée a un point de rebroussement de seconde espèce (de la forme la plus simple) dont la tangente ne passe pas par O, cette tangente rencontrera les $n-2$ tangentes homologues en des points cuspidaux ordinaires du lieu cherché. Le point de rebroussement lui-même n'en sera qu'un point simple.

Les nombres n_1, p_1 et r_1 étant trouvés, on peut en déduire les valeurs des autres nombres plückériens du lieu cherché; mais, pour un de ces nombres, il y a, dans le cas actuel, encore une distinction à faire. Le nombre total des points doubles comprend : 1° les points doubles propres formés par deux couples de tangentes homologues, et 2° trois fois les points triples formés par l'intersection de trois tangentes homologues. Pour avoir les valeurs distinctes des nombres de ces deux classes de points, il suffit d'en déterminer directement le dernier x_1. Cela peut se faire par le principe de correspondance. Dans cette détermination nous nous bornerons au même cas pour lequel nous avons trouvé les expressions de n_1, p_1 et r_1.

Commençons par déterminer l'ordre N du lieu des points où une droite joignant O à un point P du lieu (C_1) dont nous nous occupons jusqu'à présent rencontre une troisième tangente homologue à celles qui déterminent P. Ce lieu rencontre une droite par O en $n_1(n-2)$ points différents de O, et le point O en est évidemment un point $m\left[\frac{(n-2)(n-3)}{2}\right]^{\text{uple}}$. Il est donc de l'ordre

$$n_1(n-2)+m\frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$

Cet ordre étant trouvé, on voit, par le principe de correspondance de *Chasles*, qu'il existe

$$\left[n_1(n-2)+m\frac{(n-2)(n-3)}{2}\right]+n_1(n-2)$$

coïncidences de droites joignant un point fixe A à des points P et Q qui se correspondent sur le lieu (C_1) et sur le nouveau lieu; P et Q, se trouvant aussi sur une droite par O, coïncideront entre eux en même temps que AP et AQ s'ils n'appartiennent pas aux $n_1(n-2)$ couples qui se trouvent sur la droite AO.

Trois coïncidences de P et Q ont lieu en chacun des x points triples que nous cherchons, une seule en chacun des $r(n-2)$ points d'intersection des tangentes aux points cuspidaux de la courbe donnée avec leurs tangentes homologues, et, selon nos restrictions, il n'en existe pas d'autres. On trouve, par conséquent,

$$x_1=\frac{1}{3}\left[n_1(n-2)+m\frac{(n-2)(n-3)}{2}+r(n-2)\right]$$
$$=\frac{1}{2}(n-2)[m(n-2)+r].$$

LES CONTINUATEURS D'EUCLIDE;

PAR M. P. TANNERY.

1. Les *Éléments* d'Euclide, et surtout le premier Livre, n'avaient, à vrai dire, nul besoin d'être commentés, si par commentaire on entend l'explication des endroits obscurs; le travail que Proclus a consacré à ce Livre n'offre donc quelque intérêt, en dehors des minces renseignements historiques qu'il renferme, que parce qu'il permet, jusqu'à un certain point, d'apprécier les tentatives faites dans l'antiquité pour améliorer les *Éléments*, soit par d'autres tours apportés aux démonstrations, soit par l'adjonction de nouvelles propositions plus ou moins intéressantes.

Mais, avant d'aborder l'analyse du commentaire proprement dit de Proclus, avant de chercher à préciser le caractère, la date et les auteurs des tentatives en question, il ne sera pas inutile de consi-

dérer celles qui ont été faites, non pas pour simplifier ou pour grossir les *Éléments*, mais pour les continuer, notamment en développant davantage la théorie des polyèdres réguliers, qui fait l'objet du Livre XIII.

Euclide se borne, en fait, dans ce Livre, à construire les cinq polyèdres réguliers, inscriptibles dans une sphère donnée, et à comparer, entre eux et au diamètre de la sphère, les côtés de ces cinq polyèdres.

Déjà un géomètre qui fut probablement son contemporain ([1]), qui, en tout cas, doit avoir vécu à Alexandrie, Aristée, écrivait un Livre intitulé : *Comparaison des cinq figures,* dans lequel il énonçait ce théorème : que, pour le dodécaèdre et l'icosaèdre inscrits dans une même sphère, la sphère inscrite est aussi la même, que par suite le rapport des volumes des deux polyèdres est égal à celui de leur surface. Il n'est pas à douter qu'il ne démontrât de même le théorème analogue pour le cube et l'octaèdre inscrits dans la même sphère et qu'en général il ne fît, pour les volumes et les surfaces, la comparaison qu'Euclide s'était borné à donner pour les côtés.

Les démonstrations d'Aristée pour les deux solides les plus complexes étaient probablement assez pénibles, puisque Apollonius de Perge crut devoir reprendre le même sujet en écrivant une *Comparaison du dodécaèdre et de l'icosaèdre inscrits dans la même sphère;* et lui-même ne fut pas bien satisfait de son premier travail, puisqu'il en donna une seconde édition améliorée.

Enfin cette même question spéciale est l'objet du Livre d'Hypsiclès d'Alexandrie, qui compte comme XIVe dans la vulgate des *Éléments;* c'est dans la dédicace de ce Livre ([2]), adressée à un certain Protarque, géomètre et ami du père d'Hypsiclès, que celui-ci,

---

([1]) Si du moins il s'agit de celui que Pappus appelle l'*ancien* (ὁ πρεσβύτερος) et qui écrivit cinq Livres sur les *Lieux solides;* mais, comme Hypsiclès ne désigne pas davantage celui dont il parle, ce peut être l'Aristée plus jeune (ὁ νεώτερος), dont on n'a pas d'autres traces. Il est assez curieux que, vers la même époque, il y a eu aussi à Alexandrie deux mathématiciens d'un nom très voisin, connus d'ailleurs seulement comme astronomes; Ἀρίστυλλος μέγας, Ἀρίστυλλος μικρός (Aristylle le grand et le petit). *Uranologion* de Petau, p. 267 (Catalogue des commentateurs d'Aratus).

([2]) Et aussi dans l'énoncé de la proposition II.

évidemment encore assez jeune, nous fournit les indications qui précèdent. Il ajoute que son père (déjà mort quand il écrit) avait, en commun avec un Basilide de Tyr, travaillé sur la première édition du Traité d'Apollonius pour l'améliorer; il reconnaît que la seconde édition ne laisse pas prise à la critique comme la première; il présente toutefois sa méthode comme nouvelle en ce qu'il part de cette proposition que, pour le dodécaèdre et l'icosaèdre inscrits dans la même sphère, les faces sont inscriptibles dans un même cercle. Enfin il donne, comme expression du rapport des volumes ou des surfaces du dodécaèdre et de l'icosaèdre, le rapport des côtés du cube et de l'icosaèdre inscrits dans la même sphère.

2. Il est assez clair, d'après ce qui précède, qu'Hypsiclès devait appartenir à la génération qui suivait immédiatement celle d'Apollonius, et vivre par conséquent vers le commencement du IIe siècle avant J.-C. Nous connaissons d'ailleurs en outre cet Alexandrin :

1° Par une citation de Diophante (*Sur les nombres polygones*) qui donne la définition ordinaire de ces nombres en l'attribuant à Hypsiclès. On doit en conclure seulement que ce dernier avait écrit sur ce sujet, et sans doute sous la forme géométrique, un Traité qui était classique au temps de Diophante; ce Traité peut, au reste, être aussi considéré comme une continuation des livres arithmétiques d'Euclide;

2° Par un Opuscule très court, qui fait partie de la collection des petits écrits astronomiques, et qui est intitulé Ἀναφορικός (1).

Je m'arrête un moment sur cet Opuscule peu connu, et dont l'importance historique dépasse de beaucoup la valeur intrinsèque (2).

Il s'agit de calculer, pour le climat d'Alexandrie, les ascensions

---

(1) Achille (Tatius), éd. Petau, p. 136, cite encore Hypsiclès comme ayant écrit, après Aratus et Ératosthène, sur l'harmonie des sphères.

(2) Il a été publié en grec latin par Jacques Mentel en 1657 (Paris, Cramoisy) à la suite de l'*Optique* de Damien, éditée par Bartholin; mais le texte est passablement incorrect et, pour apprécier la traduction, il suffira de dire que l'*omicron*, employé comme zéro dans la notation sexagésimale, est couramment rendu par le nombre 70.

obliques correspondant aux différents degrés de longitude sur l'écliptique. Le problème est résolu avec une grossière approximation et de telle sorte qu'il est impossible de supposer qu'Hipparque ([1]) ait eu quelque précurseur pour l'invention de la Trigonométrie. Mais en même temps le Traité d'Hypsiclès nous donne le premier exemple de la division du cercle en 360° et en fractions sexagésimales, minutes, secondes, tierces. Il marque donc le moment où cette division s'introduit dans la science grecque, mais où l'idée de dresser une Table des cordes n'est pas encore venue.

La solution d'Hypsiclès consiste d'ailleurs, connaissant les ascensions pour 0°, 90°, 180° ([2]), à interpoler en supposant que, si les longitudes croissent en progression arithmétique, il en sera de même pour les différences des ascensions.

Grâce à quelques lemmes préliminaires, il détermine la progression des différences, d'abord pour les signes, ensuite pour les degrés, et indique comment de cette progression se déduit la série des ascensions.

Nous rencontrons ainsi le premier essai d'une interpolation ayant lieu en fait suivant les ordonnées d'une courbe de la forme $y = a + bx + cx^2$, ou encore, si l'on veut, le premier pas de la théorie des différences finies.

Mais est-ce bien à Hypsiclès qu'il faut attribuer le principe de la solution qu'il expose? J'ai peine à le croire, car il nous apparaît moins comme un esprit original que comme un géomètre reprenant et éclaircissant des questions déjà connues. Il s'agit, d'autre part, d'un problème évidemment déjà posé chez les Chaldéens, et rien ne doit empêcher de croire qu'ils fussent capables de lui donner la même solution, surtout si l'on considère que les anciens s'attachaient en première ligne aux différences ascensionnelles et que c'étaient ces différences qu'ils appelaient proprement *ascen-*

([1]) Le grand astronome vécut vers le milieu du IIe siècle, c'est-à-dire qu'il semble appartenir à la génération suivant celle d'Hypsiclès.

([2]) La première est en effet 0°, la troisième 180°; quant à la seconde, elle se représente par $\frac{n}{m+n}$ 180°, si le climat est défini par le rapport $\frac{m}{n}$ des durées du plus long jour et de la nuit la plus courte.

sions (ἀναφοραί) (¹). L'idée de les faire progresser arithmétiquement s'introduisait donc d'elle-même.

3. L'adjonction aux *Éléments* du Livre d'Hypsiclès, sur la comparaison du dodécaèdre et de l'icosaèdre inscrits dans la même sphère, a été d'autant moins légitime qu'il s'agissait là d'un problème plus spécial. Quant au Livre XV de la vulgate, la question a un autre aspect.

Si l'on écarte le début, l'examen de cinq cas, particuliers et sans intérêt, d'inscription d'un polyèdre régulier dans un autre, on ne peut nier que les deux questions suivantes : détermination du nombre des côtés et du nombre des sommets, construction de l'angle dièdre pour chaque polyèdre régulier, méritaient de figurer dans les *Éléments*.

Mais le style général du Livre trahit une époque de décadence bien lointaine de l'âge classique auquel appartient du moins Hypsiclès, et l'on est d'accord désormais pour considérer cet Opuscule comme seulement du VIe siècle après J.-C.

Le maître de l'auteur anonyme, *le grand Isidore,* comme il l'appelle, et d'après lequel il résout la dernière question, doit être un des deux architectes de Sainte-Sophie, soit l'oncle, soit le neveu, qui portèrent ce nom sous Justinien. Nous avons donc là, moins un travail de véritables géomètres, que l'une des rares œuvres subsistantes de l'école d'ingénieurs qui illustra encore cette époque, au moment où s'éteignaient les derniers représentants de la Science pure.

Il est incontestable que les constructions d'Isidore de Milet sont aussi élégantes que sont pénibles les démonstrations qui en sont données. Cette différence même doit faire jeter un doute sur leur véritable origine, d'autant plus que l'invention n'en est pas expressément attribuée au personnage en question. Cependant, tant qu'on n'aura pas retrouvé une preuve de l'étude de problèmes semblables dans l'époque gréco-alexandrine, on peut rester dans l'indécision. En tout cas, les constructions dont il s'agit seraient

(¹) Ainsi ils disaient « *ascension du Taureau* » pour différence des ascensions correspondant aux longitudes 60° et 30°, etc.

bien ce qui aurait été fait de mieux en Géométrie élémentaire, au moins depuis Pappus.

4. C'est certainement dans ce dernier auteur qu'il aurait convenu de chercher de quoi compléter les *Éléments,* s'ils en avaient eu besoin.

On ne peut nier en thèse générale que les trois Livres d'Euclide sur les solides ne soient sensiblement inférieurs aux précédents (¹), et l'on ne doit pas s'étonner que surtout la théorie des polyèdres réguliers ait été l'objet de tentatives de remaniement.

Or la quatrième Partie du Livre III de la *Collection mathématique* de Pappus (p. 132-163) nous offre tout d'abord précisément un remaniement complet du dernier Livre des *Éléments.* Le problème traité est absolument le même, l'inscription dans une sphère donnée des cinq polyèdres réguliers; mais la méthode est toute différente, et, au lieu des théorèmes préliminaires d'Euclide, lesquels appartiennent à la Géométrie plane, on part de lemmes sur la sphère, où sont d'ailleurs appliquées des propositions que nous ne retrouvons que dans les *Sphériques* de Théodore (²).

Rien ne nous indique quel est l'auteur de ce remaniement. S'il était de Pappus lui-même, il aurait sans doute pris soin de le marquer, surtout dans un Livre qui, à part le début, est évidemment une compilation. Le style et l'allure générale semblent d'une bonne époque, mais déjà assez loin d'Euclide. En tout cas, il est incontestable que l'auteur a eu pleine conscience de la véritable lacune de la stéréométrie d'Euclide; elle aurait dû comprendre en effet les éléments de la sphère, que le maître a laissés aux Traités composés en vue de l'étude de l'Astronomie.

La troisième et dernière Partie du Livre V de Pappus nous offre sur les polyèdres réguliers un autre travail qui ne correspond pas, à la vérité, à la comparaison des volumes et des surfaces de ces polyèdres inscrits dans une même sphère, telle que l'avait étudiée

---

(¹) On voudra peut-être excepter de ces derniers le Xe Livre sur les irrationnelles; c'en était un qu'Apollonius avait aussi essayé de compléter par son travail sur les irrationnelles non classées.

(²) Quoiqu'elles fussent incontestablement connues bien avant cet auteur du Ier siècle avant J.-C.

Aristée, mais qui, dans une certaine mesure, peut en tenir lieu. Pappus compare en fait les volumes de polyèdres réguliers ayant la même surface.

Il dit très nettement que les démonstrations synthétiques qu'il donne sont de lui; mais il reconnaît en même temps que plusieurs anciens avaient traité analytiquement la même question. D'autre part, il appuie ses démonstrations sur seize lemmes qui contiennent tous les éléments de la mesure des surfaces et volumes des polyèdres réguliers; mais ces lemmes, au milieu desquels nous retrouvons les propositions II et VII du livre d'Hypsiclès, n'appartiennent guère à Pappus que comme rédaction.

5. Les deux premières Parties du Livre V de Pappus sont, au reste, de celles où il est le plus facile de se rendre compte de la façon dont il composait sa *Collection mathématique*.

Après un curieux préambule où il présente la forme hexagonale des cellules des abeilles comme motivée par la double condition d'offrir un polygone régulier dont l'angle fût une partie aliquote de quatre droits, et en même temps de correspondre au périmètre minimum pour une surface donnée, Pappus aborde en général la théorie des figures planes isopérimètres au point de vue de leur surface. Or nous possédons sur le même sujet un autre écrit qui, inséré dans le premier Livre du Commentaire de Théon d'Alexandrie sur la *Syntaxe* de Ptolémée, est mis sous le nom d'un Zénodore qui vivait probablement peu de temps après Archimède [1]. La comparaison nous montre que Pappus s'est borné à donner une rédaction un peu différente de l'œuvre de Zénodore et n'a apporté aucun changement essentiel à une théorie déjà complète. Toutefois, il a ajouté la comparaison des segments de cercle dont l'arc est égal, et démontré que le plus grand est le demi-cercle.

Dans la seconde Partie du Livre V, Pappus, avant de passer à l'exposé des théories analogues relatives à la comparaison des

---

[1] Hultsch, p. 1189 de l'édition de Pappus. Le commentaire attribué à Théon est au reste, en assez grande partie, dû à Pappus; on a encore un autre petit travail anonyme sur les isopérimètres, publié par Hultsch (Pappus, p. 1156-1165) et provenant d'un Recueil de commentaires sur Ptolémée; mais, cette fois, on est plutôt en présence d'un remaniement de l'œuvre de Pappus.

solides ayant même surface, croit intéressant d'énumérer les treize polyèdres semi-réguliers découverts par Archimède et qui jouissent de cette propriété que leurs faces sont des polygones réguliers de différentes natures. Il indique, pour chacun de ces polyèdres, la composition des faces, le nombre des sommets et celui des arêtes; puis, abandonnant ce sujet ([1]), il démontre qu'à surface égale la sphère est supérieure en volume soit à un polyèdre régulier quelconque, soit à un cône ou à un cylindre. Zénodore avait déjà également traité les mêmes propositions; il les avait même étendues à tout solide engendré par la révolution d'un polygone rectiligne quelconque.

Pappus omet cette dernière démonstration, tandis qu'il reprend longuement la démonstration des théorèmes d'Archimède sur la mesure du volume et de la surface de la sphère, du cône et du cylindre. La marche qu'il suit se rapproche d'ailleurs sensiblement de celle qu'on observe d'ordinaire aujourd'hui pour la même théorie en Géométrie élémentaire; il y a là évidemment, au point de vue de la forme, un progrès réalisé depuis Archimède, mais comme fond il n'y a rien de nouveau.

Même en admettant que cette nouvelle exposition appartienne exclusivement à Pappus, on voit qu'au moins, dans tout son Livre V, il travaille plutôt à exposer ce qui est déjà connu et à améliorer les théories dues aux anciens mathématiciens qu'à poursuivre des travaux originaux. L'ensemble de la *Collection mathématique* porte en général le même caractère, et il est certain qu'on attribue à Pappus beaucoup de propositions qui ne lui appartiennent pas plus que la plupart des théorèmes développés dans nos livres d'enseignement n'appartiennent aux auteurs de ces Ouvrages ([2]).

6. Si l'on cherche dans le recueil de Pappus d'autres théories rentrant dans le cadre des *Éléments*, il ne faut pas s'écarter des Livres III et IV ([3]).

([1]) On sait que la curieuse théorie des polyèdres d'Archimède a été restituée par Kepler (*Harmonia mundi*, p. 62-65; 1619).

([2]) Il faut cependant excepter le théorème connu sous le nom de *Guldin*, que Pappus énonce comme étant son invention et qui constitue, sans contredit, son véritable titre de gloire.

([3]) On sait que le Livre I est perdu; ce qui reste du IIe concerne l'Arithmétique;

Dans le premier de ces deux Livres, on peut signaler les propositions 28 à 42, qui paraissent empruntées à un Ouvrage intitulé *Paradoxes* et composé par son Erycinos dont l'époque est inconnue, mais qui vivait probablement bien longtemps avant Pappus.

Il s'agit, dans ces *Paradoxes*, de construire à l'intérieur d'un triangle (ou plus généralement d'un polygone) un autre triangle (polygone) ayant pour base une partie de l'un des côtés et tel que la somme des autres côtés du triangle (polygone) intérieur soit à celle des autres de l'extérieur dans un rapport donné (égale ou plus grande). Ou bien encore il s'agit de construire un triangle ou un parallélogramme de surface plus petite qu'une figure similaire, mais ayant chacun de ses côtés plus grand suivant une relation donnée. Les solutions données sont assez élégantes, et malgré le peu d'intérêt que présentent ces problèmes en eux-mêmes, la première série pourrait encore aujourd'hui offrir quelques exercices utiles.

La première proposition de ce qui nous reste du Livre IV nous offre une intéressante généralisation du théorème sur le carré de l'hypoténuse.

Soit un triangle quelconque ABC: sur les côtés AB, BC on construit deux parallélogrammes quelconques ABED, BCFH. On prolonge les droites DE, FH jusqu'à leur rencontre en G, on joint GB. Pour construire sur la base AC du triangle un parallélogramme dont la surface soit égale à la somme de celles des deux premiers, il suffit de mener par A, C des parallèles à GB jusqu'à leur rencontre en L, M avec les côtés des parallélogrammes DE, FH et de joindre L, M.

Nous pouvons certainement regretter le début du Livre IV, si court qu'il paraisse avoir été, car il devait être consacré à des théorèmes analogues.

Les dix-sept propositions de Pappus qui suivent appartiennent encore au même ordre d'idées que les *Éléments;* mais elles paraissent empruntées, comme fond, soit aux Livres des *contacts* d'Apollonius (Pappus traite notamment le problème de mener un cercle tangent à trois cercles qui se touchent entre eux), soit à des

---

VI est relatif à l'Astronomie, VII à l'Analyse géométrique, VIII à la Mécanique.

travaux sur la figure de l'ἄρβηλον (tranchet) inventé par Archimède [1].

Soient deux demi-cercles A et B se touchant extérieurement à une extrémité de leurs diamètres; soit un troisième demi-cercle C, ayant son centre sur le même diamètre et les enveloppant en les touchant. Dans l'espace compris entre A, B et C, on inscrit un cercle D_0; dans l'espace entre C, D_0 et A (supposé plus grand que B), un second cercle D_1; entre C_1, D_1 et A, un troisième D_2 et ainsi de suite: soient d_0, d_1, d_2, ... les distances des centres de D_0, D_1, D_2, ... au diamètre sur lequel sont construits les demi-cercles A, B, C; si D_n représente le diamètre du cercle correspondant, on aura

$$d_n = (n-1)D_n.$$

7. On sait du reste qu'en dehors des écrits qui nous restent d'Archimède et d'Apollonius, c'est uniquement dans la *Collection* de Pappus qu'il faut étudier la Géométrie supérieure des anciens; on sait aussi que cette Géométrie se divisait en deux branches bien distinctes: l'une, suivant les voies nouvelles ouvertes par le génie du Syracusain, s'élevait à l'invention de courbes et de surfaces et abordait les problèmes des quadratures et des tangentes; l'autre, ne dépassant ni le domaine déjà exploré avant Euclide, ni le cadre général de ses travaux, développait de plus près les germes contenus dans les *Éléments* en approfondissant la Géométrie de la droite et du cercle et en étudiant les propriétés des coniques.

C'est sur ce terrain, dans le τόπος ἀναλυόμενος, comme l'appelle Pappus, que l'effort de la Géométrie ancienne a été le mieux suivi et a produit les résultats les plus complets; mais nous devons réserver pour une étude ultérieure l'histoire de ces travaux et revenir au Commentaire de Proclus sur le premier Livre d'Euclide. Bornons-nous donc, pour le moment, à résumer les conclusions qui ressortent de ce Chapitre.

---

[1] Dans l'écrit arabe, les *Lemmes* attribués à Archimède, les lemmes 1, 4, 5 et 6, se retrouvent chez Pappus. Celui-ci dit seulement que la proposition qu'il développe est ancienne et se trouve dans divers Ouvrages; peut-être l'Ouvrage original d'Archimède était-il déjà perdu, et Pappus n'était-il pas suffisamment assuré de la valeur de la tradition relative à l'ἄρβηλον.

On semble avoir eu pleinement conscience, dès l'antiquité, des lacunes frappantes que présente le cadre étroit des *Éléments*. Pour combler ces lacunes, les modernes y ont, d'une part, fait entrer la matière des Livres d'Archimède : *de la mesure du cercle; de la sphère et du cylindre;* d'un autre côté, ils y ont réuni les éléments de la sphérique des anciens. La *Collection* de Pappus témoigne déjà de quelques tentatives faites dans ce sens.

Mais ces tentatives n'ont pas abouti à une réforme de l'enseignement qui eût nécessité une refonte complète des derniers Livres d'Euclide. Les autres lacunes de détail qu'on pourrait signaler dans les *Éléments* se trouvèrent d'ailleurs comblées dans les Ouvrages consacrés à l'analyse géométrique. L'œuvre d'Euclide ne reçut donc, comme adjonction, pendant toute l'antiquité, que quelques travaux relatifs aux polyèdres réguliers. Mais ceux qui furent choisis pour cette adjonction n'ont guère dû, ce semble, cette faveur qu'à leur brièveté, et d'autres ont été négligés qui sans doute valaient mieux. Enfin, quoique l'un de ces écrits soit des derniers jours de l'antiquité, on ne voit guère qu'aucun travail sérieux de Géométrie élémentaire ait été fait après la période alexandrine, et à partir de l'établissement de l'empire romain.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PAUL TANNERY. — NOTICE SUR LES DEUX LETTRES ARITHMÉTIQUES DE NICOLAS RHABDAS (texte grec et traduction). — Extrait des Notices et extraits des Manuscrits de la Bibliothèque Nationale, etc., t. XXXII, Ire Partie. — Paris, Klincksieck, 1886; in-4°, 136 pages.

Cette publication renferme les Opuscules arithmétiques, jusqu'alors inédits, d'un mathématicien byzantin de la première moitié du XIVe siècle dont M. Paul Tannery a, le premier, fait connaître les manuscrits dans un article publié ici même, en septembre 1884 : *Manuel Moschopoulos et Nicolas Rhabdas*. Nous pouvons donc renvoyer nos lecteurs à cette étude; elle fait suffisamment ressortir l'intérêt spécial qui s'attache à ces documents.

Le texte grec est accompagné d'une traduction française très soignée et suivie d'index détaillés. Enfin il est précédé d'une Notice qui, en dehors des renseignements attendus par les érudits auxquels cette publication est spécialement destinée, présente un précis très neuf de ce que l'on sait sur l'histoire du calcul chez les Grecs.

MÉLANGES.

HÉRON SUR EUCLIDE;

PAR M. P. TANNERY.

1. Après avoir indiqué les additions que reçut, dans l'antiquité, le cadre des *Éléments* d'Euclide, nous avons à rechercher quels travaux furent tentés ou accomplis à l'intérieur de ce cadre même. Mais désormais le champ de notre étude se restreint singulièrement, car des deux seuls documents grecs auxquels nous puissions recourir, l'un, le *Commentaire de Proclus*, se borne au premier Livre des *Éléments*, l'autre, les *Définitions des termes de Géométrie*, attribuées à Héron, ne touche ni les théorèmes, ni leurs démonstrations.

Il existe cependant, dans un manuscrit arabe, sur les six premiers Livres, une suite de scolies qui portent le nom de Héron. Cette troisième source n'a pas été utilisée jusqu'à présent, et, en attendant la traduction que prépare mon excellent ami Léon Rodet, je ne puis moi-même en faire qu'un usage restreint. Il m'est cependant loisible d'entrer dans des détails suffisants pour en faire reconnaître l'importance et pour indiquer les principales conclusions qu'on peut tirer de son étude.

Je dois dire d'abord comment j'ai été amené à y recourir. Une grave question, et des plus difficiles à élucider complètement, se pose à propos d'Euclide. A partir de quel moment les *Éléments* sont-ils devenus classiques pour l'enseignement de la Géométrie dans l'antiquité? Quand, par suite, a-t-on commencé à les commenter comme un Ouvrage classique?

Dans des essais spéciaux (¹) où j'ai déjà abordé cette question, j'ai cherché à montrer que l'adoption universelle des *Éléments* ne paraît pas avoir eu lieu immédiatement ni s'être effectuée sans certaines tentatives de modifications, dont une au moins a réussi; car le titre de *notions communes* (κοιναὶ ἔννοιαι), donné aux axiomes, est bien certainement une expression stoïcienne, et l'on peut croire qu'il n'a pas seulement été substitué à un autre, mais bien mis en tête d'une liste de propositions admises par Euclide sans démonstration, mais que lui-même n'avait pas cru utile de réunir ainsi qu'elles l'ont été après lui.

Dans un travail dont le caractère ne peut être exactement défini, Apollonius, procédant également suivant les idées de l'École du Portique, proposa une série de définitions dans lesquelles il insista sur l'origine concrète des notions géométriques. Il indiqua également diverses autres modifications de détail relatives, soit aux axiomes, soit aux propositions.

Quant à Héron d'Alexandrie, M. Cantor avait déjà soutenu l'opinion qu'il était assez improbable qu'un auteur paraissant aussi original se fût astreint à commenter les *Éléments*. A la vérité, de son temps, l'Ouvrage était probablement devenu partout

(¹) Publiés dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* : *Quelques fragments d'Apollonius de Perge*, 1881. — *Sur les fragments de Héron d'Alexandrie conservés par Proclus*, 1882. — *Les axiomes d'Euclide*, 1885.

classique; c'est bien en effet celui que vise l'épicurien Zénon, de Sidon, dans son Ouvrage contre la certitude géométrique, que réfuta Posidonius (*Proclus,* 199, etc.). Mais on semble toutefois encore loin de l'âge réel des commentateurs.

J'ai donc essayé de montrer que les citations de Héron dans Proclus ne suffisaient point pour conclure à l'existence d'un Commentaire de Héron sur Euclide; qu'elles pouvaient avoir été empruntées par Porphyre ou Pappus au grand Ouvrage de Héron sur la Géométrie pratique. J'admettais implicitement la même origine pour les scolies arabes que je trouvais mentionnés, d'après Fabricius, dans un manuscrit oriental de la Bibliothèque de l'Université de Leyde : « *Euclidis Pythagoræi* Elementorum libri VI, cum commentariis *Saidi ben Masoud* et cum scholiis *Heronis* ad quædam problemata. »

Toutefois, en présence des objections adressées par Heiberg à mes conclusions, j'ai jugé utile de vérifier ce que pouvaient être en réalité ces scolies de Héron, et je me hâte de dire que cette vérification m'a conduit à reconnaître le mal-fondé de la thèse que je soutenais après M. Cantor. Héron a effectivement écrit un Commentaire sur Euclide, et même ce Commentaire, auquel Porphyre et Pappus ont fait dans la suite de nombreux emprunts, est loin d'être de nature à rehausser l'idée que nous nous faisons de l'ingénieur alexandrin.

2. Le curateur de la Bibliothèque de l'Université de Leyde et le conservateur du legs warnérien ont bien voulu mettre à ma disposition, avec la plus gracieuse libéralité, le manuscrit dont j'ai parlé, pendant tout le temps nécessaire pour prendre copie des Commentaires sur Euclide.

Ce manuscrit, le *Warnerianus* 399, numéroté 1068 dans le Catalogue de 1716, paraît deux fois dans le Catalogue de 1845, d'une part sous le n° 965 pour la première Partie qui contient les *Éléments* d'Euclide, de l'autre sous le n° 988 pour la seconde Partie, les *Sphériques* de Ménélas. Le Catalogue moderne ne renferme plus d'ailleurs la mention de Héron, mais donne, en latin, la Notice suivante pour le n° 965.

« *Éléments* d'Euclide, d'après la version d'el-Hajjâj-ben-Yusuf-

Matar (¹), avec un Commentaire dont l'auteur est Abul-Abbas-el-Fadl-ben-Hâtim-an-Nirizi, géomètre et astronome assez connu du IIIe siècle de l'hégire. Ce manuscrit contient en outre des gloses sur ce Commentaire, de Séid-ben-Masoud-ben-Alkass-Billah, qui paraît avoir vécu au Ve siècle. Le copiste (Abou-Saïd-Mohammed-al-Baihaki-al-Barzuhi) s'est arrêté au commencement du Livre VII. La souscription atteste que le Livre VI a été terminé en 539 (1144/5 de notre ère). Nous avons donc ici un manuscrit ancien, du reste correctement écrit et, autant qu'on le sache, unique. »

On ne connaît pas en effet d'autre exemplaire de la version de Hajjâj, la plus ancienne traduction d'Euclide en arabe, qui a été faite sous le khalifat d'Haroun-al-Reschid et corrigée par Hajjâj lui-même sous celui d'Almamoun. On croit toutefois que les Livres XI à XIII (des solides) de cette version sont contenus dans le manuscrit 81 de Copenhague, qui a été examiné, ainsi que celui de Leyde, par Klamroth [*Ueber den arabischen Euklid* (²)]; mais le savant orientaliste n'a pas porté son attention sur le travail d'el-Fadl, qui, comme le dit la Préface, a été extrait par lui des commentaires des géomètres anciens.

Or, c'est dans cette compilation que revient assez fréquemment le nom de Héron, comme celui de l'un des principaux auteurs qui ont servi à la former. L'authenticité des extraits ainsi attribués à Héron peut d'ailleurs être démontrée facilement, si on les rapproche du commentaire de Proclus.

Je me bornerai à faire ce rapprochement sur deux points, que je choisirai d'ailleurs de manière à indiquer suffisamment le caractère du travail de Héron et à montrer en même temps que nombre de démonstrations, données par Proclus sans aucune référence, dérivent en réalité de l'Alexandrin.

3. On sait que la première proposition d'Euclide consiste à construire un triangle équilatéral sur une droite donnée comme

(¹) Ce renseignement est tiré de la Préface. Le frontispice attribue au contraire à Iqhas-ben-Honein la traduction du Livre « d'Euclide le pythagoricien ».

(²) *Zeitschrift der deutschen morgenlandischen Gesellschaft*, t. XXXV, p. 270-326; 1881.

base. Comme, dans ses postulats de construction, il ne se donne pas la liberté de prendre à partir d'un point donné une longueur donnée, sa première proposition lui sert à résoudre immédiatement cette seconde question.

Or, dans Proclus (p. 218-219), nous voyons résoudre les problèmes de construire, sur une base donnée, comme première proposition, soit un triangle isoscèle, soit un triangle scalène.

Pour l'isoscèle, il prolonge la ligne AB dans les deux sens, et, en décrivant des points A et B des cercles (A) et (B), il peut prendre, sur chacun de ces prolongements, des longueurs AC, BD égales à AB. Dès lors, en gardant les mêmes centres, mais en prenant pour rayon AD = BC, il obtient par l'intersection de deux nouveaux cercles (C) et (D) le sommet d'un triangle isoscèle ayant AB pour base [1].

Pour le triangle scalène, il lui suffit, après avoir décrit les cercles (A), (B), de prendre comme sommet un point quelconque intérieur à (A) et extérieur à (B).

« Tout cela est rebattu », ajoute Proclus, preuve bien claire qu'il emprunte les solutions qu'il vient de reproduire. Voyons maintenant ce que nous donne le commentaire arabe sur la proposition I d'Euclide.

Héron. — « Si l'on nous demande pourquoi Euclide s'est proposé tout d'abord de construire sur une ligne donnée un triangle équilatéral, sans se préoccuper de commencer par un triangle isoscèle, je répondrai qu'il n'a pas agi ainsi par impuissance, mais parce que la facilité et la brièveté de la construction du triangle équilatéral convenaient mieux à un début. Mais, quand on peut faire l'une de ces constructions, on peut faire l'autre, et l'une peut être substituée à l'autre.

---

[1] Je n'insiste pas sur la singularité de cette solution. Il faut se rendre compte du but proposé, qui est évidemment, non pas de construire un triangle isoscèle en général, mais de substituer, pour la solution du problème II, à l'équilatéral d'Euclide un isoscèle construit en restant dans le même ordre d'idées. Toutefois, avec les mêmes postulats de construction et sans s'appuyer sur aucun théorème, il est possible de construire, sur une base donnée, un isoscèle quelconque. Ce problème se trouve résolu dans un scolie grec inédit (Ms de la Bibliothèque nationale, fonds grec 2472, fol. 196 v.).

» Je vais au reste enseigner la construction d'un triangle isoscèle sur une droite donnée. D'abord supposons la figure. » Suit identiquement la construction de Proclus, qui paraît seulement avoir un peu abrégé la démonstration.

« Je vais maintenant montrer comment on peut, sur une droite donnée, construire un triangle scalène. Je considérerai trois cas :

» 1er *cas*. — La droite donnée est plus grande que l'un des côtés et plus petite que l'autre. » Suit la construction de Proclus.

« 2e *cas*. — La droite donnée est plus petite que chacun des deux autres côtés.

» 3e *cas*. — La droite donnée est plus grande que chacun des deux autres côtés. »

Pour ces deux derniers cas, que Proclus avait évidemment sous les yeux, mais qu'il a négligés, Héron procède toujours de la même façon; pour le dernier, il se contente d'ailleurs de prendre le sommet du scalène dans la partie commune aux deux cercles (A), (B), sans se préoccuper de la possibilité que le triangle soit alors isoscèle; pour le cas précédent, il choisit un point sur la circonférence du cercle (D) et à l'extérieur du cercle (A). Je crois inutile de reproduire les démonstrations, qui n'ont aucun intérêt.

4. J'emprunterai le second exemple au commentaire sur la proposition I, 47 (théorème sur le carré de l'hypoténuse). Proclus (p. 429) nous dit : « La démonstration du Maître étant très claire, je pense qu'il faut n'y rien ajouter de superflu, mais se contenter du texte, car ceux qui ont voulu y faire des additions, comme Pappus après Héron (οἱ περὶ Ἥρωνα καὶ Πάππον), ont été forcés de prendre comme lemmes des propositions démontrées dans le Livre VI, sans aucun résultat utile pour la matière traitée. »

La clef de ce passage nous est donnée par le manuscrit de Leyde; l'addition faite par Héron consiste à prouver que les trois lignes auxiliaires employées dans la démonstration euclidienne se coupent en un même point.

Or il est clair que la preuve naturelle doit s'appuyer sur la théorie de la similitude, c'est-à-dire sur le Livre VI. Héron a réalisé le tour de force, un peu puéril, de se passer de cette

théorie; mais, pour cela, il a été obligé, comme le dit Proclus, d'établir quelques lemmes préalables, qui découlent immédiatement du principe de la similitude, tandis qu'il les démontre à l'aide d'artifices analogues à ceux dont Euclide s'est servi dans son Livre I, pour éviter d'avoir recours à ce principe.

Ainsi le premier de ces lemmes est le suivant :

« I. Si, dans un triangle ABC, on mène DE parallèle à la base BC, que l'on prenne le milieu F de BC et qu'on le joigne au sommet A, la droite AF coupera DE en un point G qui en sera le milieu.

» En effet, menons par A, HK parallèle à BC, par D et E, HDL et KEM parallèles à AGF, joignons enfin DF et EF. Les triangles ABF, ACF sont équivalents, comme ayant des bases égales, et leur sommet F commun. Les triangles BDF et FEC sont aussi équivalents comme ayant des bases égales BF = EC, et étant compris entre les mêmes parallèles BC, DE. Retranchons membre à membre, il y aura équivalence entre les triangles ADF et AEF, dont la base commune AF est également la base des parallélogrammes AL, AM. Ces parallélogrammes, d'après le raisonnement d'Euclide (I, 41), seront donc équivalents : donc, etc. »

Ce premier lemme sert à démontrer le second, qui se rapporte au cas où la parallèle à la base, au lieu de couper le triangle, coupe les prolongements des côtés et de la médiane au delà du sommet A. La démonstration se fait en construisant une parallèle symétrique du côté de la base; cette construction s'effectue en reportant sur les côtés, à partir du sommet, les longueurs des segments interceptés sur leurs prolongements; on démontre facilement le parallélisme à la base de la droite qui joint les points ainsi obtenus, et l'on applique le lemme I.

Mais préalablement Héron (à moins que ce ne soit le commentateur arabe) se croit obligé à la démonstration bien inutile de ce fait que, si l'un des points symétriques par rapport à A des intersections des côtés prolongés avec la parallèle tombe d'un côté de la base, l'autre tombera du même côté.

« Si, dit-il, on mène entre deux parallèles AB, CD trois droites AD, BC, EF, se coupant en un même point G, je dis que, si CF = FD, on aura AE = EB.

» Pour le démontrer, je dis d'abord que, suivant que l'on aura

AG plus grand que, égal à ou plus petit que GD, on aura de même BG plus grand que, égal à ou plus petit que GC. Ainsi supposons AG > GD, je dis que BG sera > GC; car il ne peut être ni égal ni plus petit.

Si, en effet, on avait BG = GC, prenant, sur GD, GM = AG, les côtés AG, GB du triangle AGB seraient respectivement égaux aux côtés MG, GC du triangle MGC, et l'angle compris

AGB = CGM (prop. 15).

Dès lors, d'après (4), les triangles sont égaux : donc les angles GCM et ABG seront égaux; donc (27) CM sera parallèle à AB; donc (30) elle sera parallèle à CD; or ces droites se coupent, ce qui est absurde. On ne peut donc avoir BG = GC.

« Si maintenant on avait BG < GC, prenant, sur GC, GK = BG et joignant KM, on démontrera de même que KM est parallèle à AB, donc à CD, ce qui est absurde.

De même, si l'on a AG = GD, on démontrera que BG ne peut être ni plus grand ni plus petit que GC, qu'il lui est donc égal. De même, si AG < GD, on prouvera que BG < GC. »

Suit la démonstration proprement dite du lemme énoncé.

Le troisième lemme est plus intéressant, et c'est lui qui constitue en fait le nerf de la démonstration pour la proposition à prouver.

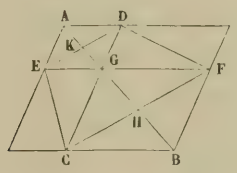
Ce lemme est la réciproque d'Euclide, I, 43. Il s'agit de prouver que, si un parallélogramme AB est découpé en quatre autres ADGE, DF, FGCB, CE, en sorte que DF et CE soient équivalents, le sommet commun G sera sur la diagonale AB (*fig.* 1).

Pour le prouver, Héron prolonge AG jusqu'à la rencontre en H avec FC, et joint HB. Il s'agit de prouver que HB est dans le prolongement de AH.

Les autres lignes de la figure étant tracées, « les aires DF, EC étant égales, les triangles DGF, ECG seront équivalents. Ajoutant à chacun le triangle GCF, les triangles DCF, ECF seront équivalents. Comme ils ont même base CF, d'après (40), CF sera parallèle à DE. Mais, d'après (34), (29) et (26), les triangles AEK, DKG seront égaux : donc EK = KD; donc, d'après le lemme II, CH = HF. Mais (34) BF = CG et les angles BFH = HCG. Donc

(4) les triangles sont égaux, BH = HG et les angles BHF = CHG. Ajoutant de part et d'autre l'angle GHF, la somme des angles CHG + GHF = BHF + GHF. Mais la première somme est égale

Fig. 1.



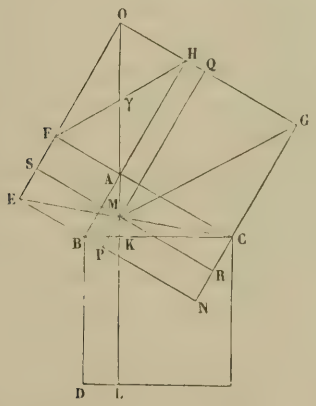
à deux droits, donc aussi la seconde. Ainsi, du point H de la droite CF, on a mené, de part et d'autre de cette droite, HA et HB qui font avec elle et d'un même côté des angles dont la somme est de deux droits. Donc HA et HB sont en ligne droite ».

C. Q. F. D.

Nous arrivons enfin à la proposition qu'il s'agit de démontrer.

« Soit ABC un triangle rectangle en A (*fig.* 2); construisons

Fig. 2.



sur BC le carré CD, sur AB le carré ABEF, sur AC le carré ACGH. Menons, par A, AKL perpendiculaire sur BC, joignons EC, qui coupe AL en M, joignons MB et MG; je dis que ces deux droites sont sur le prolongement l'une de l'autre.

» Prolongeons EB et GC jusqu'à leur rencontre en N, et leurs

parallèles GH, EF jusqu'à leur rencontre en O; menons par M PMQ parallèle à EO, et SMR parallèle à FC; joignons OA, HF.

» Comme HA = AC, que FA = AB et que les angles FAH = BAC, les triangles sont égaux; donc BC = HF et les angles ABC = HFA. Mais, comme AK est perpendiculaire à la base du triangle rectangle, les angles ABC = CAK, et, d'autre part, les diagonales FH, AO se coupant en Y, et FY étant égal à YA, les angles HFA = OAF. Donc les angles OAF = CAK. Ajoutons OAC de part et d'autre; OAC + OAF = MAC + CAO. Mais (13) la première somme est de deux droits; donc aussi la seconde; donc OAM est une ligne droite.

» Or elle est la diagonale du parallélogramme OM; dès lors, d'après (43), les aires AS = AQ. Ajoutons de part et d'autre l'aire AM, les aires MH = MF. Mais, dans le parallélogramme FN coupé par la diagonale EMC, les aires MF = MN. Il y a donc égalité entre les aires MN, MH. Dès lors, d'après le lemme III, BM et MG sont en ligne droite. » C. Q. F. D.

5. Sur la proposition 48 et dernière du premier Livre (réciproque du théorème sur le carré de l'hypoténuse), nous retrouvons encore dans le Commentaire arabe, sous le nom de Héron, la démonstration anonyme donnée par Proclus; les lettres [1], différentes de celles d'Euclide, se correspondent exactement, comme, au reste, pour le Commentaire sur la proposition I. Seulement, dans cette démonstration par l'absurde, la seconde hypothèse, développée par Proclus comme la première, ne l'est pas dans le texte arabe, où il est seulement indiqué qu'elle se traiterait de même.

Ces extraits suffisent pour le but que je m'étais proposé. Il est clair que, si intéressants que puissent être historiquement les scolies arabes qui portent le nom de Héron, on ne peut guère leur attribuer une valeur scientifique considérable. Dans les autres Livres pour lesquels le Commentaire de Proclus est perdu, il n'y a guère de remarquable [2] que l'idée de démontrer sans figures

---

[1] Dans les extraits qui précèdent, j'ai substitué aux lettres grecques les romaines de même rang, en ne comptant pas J comme lettre.

[2] J'observe, à titre de curiosité, que, dans le Livre III, Héron intervertissant

les propositions du Livre II, à partir de la seconde, comme conséquences analytiques de la première, à savoir

$$a(b+c+d)=ab+ac+ad.$$

En tout cas, une question assez grave doit se poser : Est-il probable que le Commentaire de Héron ait encore subsisté intégralement chez les Arabes, et soit tombé entre les mains du Nirizi, vers l'an 900 de notre ère?

Je n'hésite pas à répondre non : tout d'abord, il est certain que nous sommes loin d'avoir en entier ce Commentaire. Ainsi, dans le texte arabe, rien absolument ne correspond à telle citation expresse de Proclus (ex. p. 305). A en juger par ce qui nous reste, le Commentaire de Héron paraît avoir été très complet et très détaillé; mais il n'a été utilisé que d'une façon très inégale et tout à fait insuffisante pour donner une idée exacte de son étendue.

En second lieu, rien ne nous prouve que le Nirizi ait traduit du grec les extraits qu'il nous a conservés; il cite des commentateurs arabes qui l'avaient précédé, par exemple Al-Kindi. Ces extraits peuvent donc avoir été faits par l'un de ces commentateurs.

Enfin ils peuvent avoir été transmis aux Arabes dans un Commentaire grec d'une époque bien postérieure à Héron. A la vérité, le Nirizi ne paraît aucunement connaître ni Porphyre, ni Pappus, ni Proclus. Il sait toutefois que le *postulatum* des parallèles a été l'objet de tentatives de démonstration de la part de Ptolémée et de Diodore (1). D'autre part, son Commentaire sur les définitions et les axiomes du premier Livre est emprunté à un auteur grec dont le nom ne peut être transcrit que sous la forme *Simplicius* (2).

Est-ce le fécond commentateur du VIe siècle? A côté d'Aristote, aura-t-il, lui aussi, entrepris Euclide, et son œuvre se sera-t-elle

---

l'ordre des propositions 5 et 6, le cas de tangence de deux cercles lui paraissant devoir précéder le cas d'intersection.

(1) Nous n'en savions rien pour ce dernier, qui est probablement le mathématicien alexandrin vivant vers la fin du Ier siècle avant notre ère.

(2) Le Commentaire sur les définitions est malheureusement perdu en presque totalité, par suite d'une lacune d'un feuillet dans le manuscrit. Sur les axiomes, Héron n'apparaît que pour une courte remarque d'un caractère tout à fait général.

conservée en Perse, grâce à ses relations dans ce pays, tandis que toute autre trace en a disparu pour nous? On ne peut à cet égard formuler que des conjectures. Mais, si c'est bien lui et s'il a eu le commentaire de Héron à sa disposition, on ne peut douter, d'après ses habitudes, qu'il n'en ait fait de fréquents extraits dont il aura soigneusement indiqué la source.

En tous cas, l'existence du travail de ce *Simplicius* est bien constatée, et le plus probable, quant à la transmission des scolies de Héron aux Arabes, me paraît être qu'elle se sera faite par cet intermédiaire. Mais, comme il est difficile d'assigner à cet auteur une date tant soit peu reculée, même si l'on ne voulait pas l'identifier avec le philosophe du VIe siècle de notre ère, plusieurs difficultés surgissent.

Avait-il lui-même le Commentaire de Héron entre les mains? On doit le penser; car, s'il en avait, comme Proclus, emprunté les extraits à Porphyre et à Pappus, il aurait sans doute utilisé également ces derniers auteurs auxquels on ne peut certainement refuser un certain degré d'originalité [1], et l'on devrait retrouver leurs traces dans les scolies arabes. Au contraire, s'il avait retrouvé l'Ouvrage de Héron, on comprend qu'il ait pu négliger les commentateurs postérieurs.

On arrive donc à cette conclusion que le travail de Héron sur Euclide devait encore exister au temps de Proclus; ce dernier aurait donc pu l'utiliser directement. Mais cela n'entraîne nullement comme conséquence qu'il l'ait réellement utilisé de la sorte, et je ne vois aucun motif de rétracter l'opinion contraire que j'ai émise en discutant la question des sources de Proclus.

---

[1] Comme au contraire Proclus n'est nullement original, on peut très bien admettre que Simplicius n'ait pas tenu compte de son travail.

SUR LES FONCTIONS A ESPACES LACUNAIRES;

PAR M. E. GOURSAT.

Dans une Note insérée au t. XCIV des *Comptes rendus*, p. 716, j'ai énoncé un théorème très général permettant de former des fonctions uniformes monogènes, n'existant qu'à l'intérieur ou à l'extérieur de certaines régions du plan, limitées par des courbes de forme quelconque. Ce n'est qu'après la publication de cette Note que j'ai eu connaissance d'un travail de M. Poincaré paru quelques mois auparavant dans les *Acta Societatis Fennicæ* (t. XIII), où le savant géomètre démontre un théorème absolument identique. Comme la démonstration que je donne n'est pas tout à fait la même, au moins dans la forme, que celle de M. Poincaré, comme, d'autre part, l'exactitude du théorème a été contestée [1], je ne crois pas inutile de reproduire ici cette démonstration dans tous ses détails.

Considérons deux séries à termes quelconques :

$$(1) \qquad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\nu, \quad \ldots,$$

$$(2) \qquad c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_\nu, \quad \ldots,$$

dont la seconde est *absolument* convergente. Le théorème en question peut s'énoncer comme il suit :

Soit C une circonférence de rayon R et de centre x_0, ne contenant à son intérieur aucun point a_i et passant par *un seul* de ces points; la série

$$(3) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{c_\nu . a_\nu}{a_\nu - x},$$

convergente à l'intérieur de C, représente dans ce domaine une fonction analytique de la variable x qui peut être développée en série suivant les puissances croissantes et positives de $x - x_0$. *Le cercle de convergence de cette série est précisément le cercle* C.

---

[1] *Voir* une Communication de M. Lerch dans les *Comptes rendus de la Société royale des Sciences de Bohême*, 15 octobre 1886.

On peut, sans restreindre la généralité, supposer $x_0 = 0$. En effet, si l'on pose $x = x_0 + z$, la série précédente devient

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{c'_\nu . a'_\nu}{a'_\nu - z},$$

où $c'_\nu = c_\nu \frac{a_\nu}{a_\nu - x_0}$, $a'_\nu = a_\nu - x_0$; le point a_ν étant extérieur au cercle C de centre x_0, le module de la quantité

$$\frac{a_\nu}{a_\nu - x_0}$$

reste inférieur à une certaine limite M et la série

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} c'_\nu$$

est absolument convergente comme la série (2). On peut supposer de plus que c'est le point a_1 qui est sur la circonférence C. Soit, par conséquent,

$$|a_1| = R, \qquad |a_i| > R, \qquad i > 1;$$

posons

$$f_\nu(x) = \frac{c_\nu . a_\nu}{a_\nu - x} = \frac{c_\nu}{1 - \frac{x}{a_\nu}},$$

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} f_\nu(x).$$

Attribuons à x une valeur de module r inférieur à R, toutes les fonctions $f_\nu(x)$ pourront être développées en séries convergentes et $F(x)$ sera la somme du tableau à double entrée ci-dessous, supposé évalué par lignes horizontales,

$$F(x) = \left| \begin{array}{l} c_1 + c_1 \frac{x}{a_1} + c_1 \frac{x^2}{a_1^2} + \ldots + c_1 \frac{x^n}{a_1^n} + \ldots \\ c_2 + c_2 \frac{x}{a_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_2 \frac{x^n}{a_2^n} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + c_\nu + c_\nu \frac{x}{a_\nu} + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_\nu \frac{x^n}{a_\nu^n} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right|.$$

Si l'on remplace chaque terme par son module, on a encore un tableau convergent dont la somme est moindre que

$$\frac{1}{1-\frac{r}{R}}\left\{\sum_{\nu=1}^{+\infty}|c_\nu|\right\};$$

par suite, nous pouvons faire la somme du premier tableau par colonnes verticales, et nous obtenons

$$(4)\qquad F(x)=A_0+A_1x+\ldots+A_nx^n+\ldots,$$

où $A_0=\sum_{\nu=1}^{+\infty}c_\nu$, $A_n=\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{c_\nu}{a_\nu^n}$.

Nous voyons déjà que $F(x)$ est une fonction monogène holomorphe à l'intérieur du cercle C. Je dis maintenant que la série (4) est *divergente* si le module de x est supérieur à R. En effet, puisque la série (2) est absolument convergente, nous pourrons trouver un nombre entier positif p, tel que l'on ait

$$(5)\qquad \sum_{\nu=p+1}^{+\infty}|c_\nu|<\frac{1}{2}|c_1|;$$

le nombre p étant choisi de cette façon, la fonction $F(x)$ peut se décomposer en deux parties

$$F(x)=F_1(x)+F_2(x),$$

où l'on a

$$F_1(x)=\sum_{\nu=2}^{\nu=p}f_\nu(x),$$

$$F_2(x)=\frac{c_1}{1-\frac{x}{a_1}}+\sum_{\nu=p+1}^{+\infty}f_\nu(x).$$

La fonction rationnelle $F_1(x)$ n'a que des pôles de module supérieur à R; elle sera donc développable en série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et convergente dans un cercle de rayon $R'>R$. Quant à $F_2(x)$, on aura

$$(6)\qquad F_2(x)=B_0+B_1x+\ldots+B_nx^n+\ldots,$$

où $B_n=\frac{c_1}{a_1^n}+\frac{c_{p+1}}{a_{p+1}^n}+\frac{c_{p+2}}{a_{p+2}^n}+\ldots$.

Le coefficient B_n peut s'écrire

$$B_n = \frac{1}{a_1^n}\left[c_1 + \sum_{\nu=p+1}^{+\infty} c_\nu \left(\frac{a_1}{a_\nu}\right)^n\right],$$

mais on a par hypothèse $\left|\frac{a_1}{a_\nu}\right| < 1$ et le module de la somme

$$\sum_{\nu=p+1}^{+\infty} c_\nu \left(\frac{a_1}{a_\nu}\right)^n$$

sera, d'après la condition (5), inférieur à $\frac{1}{2}|c_1|$; de sorte que l'on a la double inégalité

$$\frac{1}{2}|c_1| < |B_n a_1^n| < \frac{3}{2}|c_1|,$$

et de cette double inégalité il résulte immédiatement que la série (6) est divergente si $|x| \geqq |a_1|$, car le module du terme général peut s'écrire

$$|B_n a_1^n| \times \left|\frac{x}{a_1}\right|^n.$$

En ajoutant à la série (6), convergente dans le cercle de rayon R, une série convergente dans un cercle de rayon $R' > R$, telle que celle qui représente $F_1(x)$, il est clair que la série obtenue, qui représente $F(x)$, admet encore le cercle de rayon R pour cercle de convergence. C. Q. F. D.

De ce théorème on déduit aisément un procédé général pour former des fonctions uniformes monogènes, admettant des coupures ou des espaces lacunaires en nombre quelconque. La série (2) étant seulement assujettie à la condition d'être absolument convergente, supposons que les points a_i soient distribués sur un certain nombre de courbes C′, C″, ..., de façon que sur tout arc *fini* de l'une de ces courbes il y ait toujours une infinité de ces points. La série (3) représente une fonction holomorphe $F(x)$ dans le domaine de tout point x_0 non situé sur les courbes C′, C″, ... Dans le voisinage d'un point x_0, cette fonction $F(x)$ peut être développée en série convergente ordonnée suivant les puissances positives de $x - x_0$, $P(x - x_0)$. Je dis que le cercle de convergence de cette série ne peut contenir à son intérieur aucune portion des contours C′, C″, ... Supposons, par exemple, que ce

cercle découpe sur le contour C′ un certain arc sur lequel il existe, par hypothèse, une infinité de points a_i. Nous pourrons prendre sur cet arc un point a_h, et sur la normale en ce point un point x'_0 tel que le cercle décrit du point x'_0 comme centre et passant par le point a_h soit tout entier à l'intérieur du cercle décrit du point x_0 comme centre et laisse tous les autres points a_i à l'extérieur. Mais alors la fonction $F(x)$ pourrait être développée suivant les puissances de $x - x'_0$ dans un cercle de rayon plus grand, ce qui est contraire au théorème précédent.

Si les contours C′, C″, ... sont des arcs de courbes non fermés, tels que des segments de droite, la série (3) définit une fonction uniforme monogène existant dans tout le plan, sauf le long de ces arcs de courbes, qu'elle admet comme lignes singulières essentielles. Si les points a sont distribués sur une courbe fermée C_1, ne se coupant pas elle-même, la série (3) définit, au contraire, deux fonctions distinctes dont l'une n'existe qu'à l'intérieur de la courbe C_1 et admet comme espace lacunaire la portion du plan extérieure à cette courbe, tandis que l'autre n'existe qu'à l'extérieur de C_1. On pourrait multiplier les exemples et faire de nouvelles hypothèses sur la distribution des points a, par exemple en les supposant condensés dans une aire et non plus seulement sur une courbe. C'est ce qui a lieu pour l'exemple donné par M. Poincaré et cité dans le Cours de M. Hermite (3e édition, p. 156).

C'est à cette catégorie de fonctions que se rattache l'exemple donné récemment par M. Stieltjes (*Bulletin*, février 1887, p. 46). M. Stieltjes prend une suite indéfinie de quantités

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

dont le module est égal à l'unité et qui sont distribuées de telle sorte sur la circonférence de rayon un ayant pour centre l'origine que sur un arc fini de cette circonférence il y a toujours une infinité de ces points. La série considérée

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^3}\left(\frac{z}{a_n - z}\right)$$

peut s'écrire

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^3}\left(\frac{z - a_n + a_n}{a_n - z}\right) = -\sum_1^\infty \frac{1}{n^3} + \sum_1^\infty \frac{1}{n^3}\,\frac{a_n}{a_n - z};$$

c'est précisément la série (3) où l'on a fait

$$c_n = \frac{1}{n^3}.$$

Voici encore un exemple analogue. Soient α un nombre incommensurable, ν un nombre entier positif; posons

$$a = e^{2i\pi\alpha}, \qquad a_\nu = a^\nu = e^{2i\pi\alpha\nu}.$$

Tous les points a_ν ont un module égal à l'unité et sont distincts. De plus, d'après la théorie des fractions continues, on peut trouver deux nombres entiers ν et μ, tels que la différence $2\pi(\nu\alpha - \mu)$ soit moindre en valeur absolue qu'un nombre ε, aussi petit qu'on le voudra. Il existe donc des puissances de a dont l'argument est aussi voisin de zéro qu'on le veut et, par suite, sur un arc fini de la circonférence, il y aura toujours une infinité de points a. Prenons ensuite $c_\nu = \frac{1}{2^\nu}$, il résulte de ce qui précède que la fonction

$$(7) \qquad F(x) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{1}{2^\nu} \frac{1}{1 - \frac{x}{a^\nu}}$$

admet comme espace lacunaire toute la portion du plan extérieure au cercle $\operatorname{mod} x = 1$. En développant $F(x)$ suivant les puissances croissantes de x, nous trouvons

$$(8) \qquad F(x) = 1 + \frac{x}{2a - 1} + \frac{x^2}{2a^2 - 1} + \ldots + \frac{x^n}{2a^n - 1} + \ldots.$$

Si l'on supposait le module de a égal à l'unité, et son argument commensurable avec π, cette fonction $F(x)$ se réduirait à une fonction rationnelle.

PRINCIPES D'UN CALCUL ALGÉBRIQUE QUI CONTIENT COMME ESPÈCES PARTICULIÈRES LE CALCUL DES QUANTITÉS IMAGINAIRES ET DES QUATERNIONS;

(Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite) [1].

PAR M. LIPSCHITZ.

.... Quant à la notion de l'Algèbre, je suis convaincu de la justesse de l'énoncé que l'objet de cette science est défini par les résultats d'un nombre limité d'opérations, addition, soustraction, multiplication et division, ces opérations faites sur des quantités réelles. Sous ce point de vue, l'introduction du radical propre aux quantités imaginaires paraît fondée sur le fait algébrique que le produit de deux sommes de deux carrés s'exprime également par une somme de deux carrés. De même les règles du calcul des quaternions introduit par Hamilton découlent de la représentation, proposée par Euler, du produit de deux sommes de quatre carrés comme une somme de quatre carrés. Or mon attention s'est fixée sur la circonstance que la composition de deux sommes de quatre carrés s'est présentée dans votre premier Mémoire sur les formes quadratiques, publié dans le tome 47 du *Journal de Crelle,* à l'occasion de la transformation de la somme de trois carrés en elle-même. Partant, la méthode que vous avez trouvée, vous-même et M. Cayley, pour la transformation de la somme de n carrés en elle-même, m'a conduit à découvrir les règles d'un nouveau genre de calcul algébrique, où le calcul usuel des quantités imaginaires et le calcul des quaternions sont contenus comme les deux premiers cas. Si vous voulez suivre l'explication que je vais vous en faire maintenant, vous verrez la différence qui existe entre ma méthode et l'extension du calcul des quaternions donnée par Hamilton dans les tomes VII, VIII, IX du *Philosophical Magazine*. Je me réserve de comparer mes recherches au travail de M. Fröbenius, publié dans le tome LXXXIV du Journal de feu notre ami Borchardt.

---

[1] Cette Communication, insérée aux *Comptes rendus,* t. XCI, en octobre 1880, est reproduite ici d'après le désir de l'auteur; elle doit être rapprochée de l'analyse que M. Lipschitz a bien voulu nous donner dans le tome précédent, p. 163, de son important Ouvrage *Sur les sommes de carrés.* G. D.

Soient données $\frac{n(n-1)}{2}$ quantités réelles quelconques λ_{ab}, où a et b parcourent les valeurs $1, 2, \ldots, n$ et où $\lambda_{ab} + \lambda_{ba} = 0$. On en forme, avec les variables réelles $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ les n équations

$$\begin{aligned}
x_1 + \lambda_{21} x_2 + \ldots + \lambda_{n1} x_n &= \quad y_1 + \lambda_{12} y_2 + \ldots + \lambda_{1n} y_n, \\
\lambda_{12} x_1 + \quad x_2 + \ldots + \lambda_{n2} y_n &= \lambda_{21} y_1 + \quad y_2 + \ldots + \lambda_{2n} y_n, \\
\lambda_{1n} x_1 + \lambda_{2n} x_2 + \ldots + \quad x_n &= \lambda_{n,1} y_1 + \lambda_{n,2} y_2 + \ldots + \quad y_n,
\end{aligned}$$

d'où suit l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2.$$

Alors le déterminant $\Delta\lambda$ du système des coefficients à gauche et à droite a la propriété d'être égal à la somme de l'unité et de $2^{n-1} - 1$ déterminants gauches impairs, partant de 2^{n-1} carrés, dont les racines sont des fonctions rationnelles entières des λ_{ab}. Suivant une proposition donnée par Jacobi dans le tome 2 du *Journal de Crelle,* je désignerai chaque racine en affectant la lettre λ d'indices d'un seul terme pris dans l'ordre correspondant, par exemple

$$\lambda_{1234} = \lambda_{12}\lambda_{34} + \lambda_{13}\lambda_{42} + \lambda_{14}\lambda_{23}.$$

Donc la fonction $\lambda_{abcd\ldots f}$, par une permutation quelconque des indices différents, se change en elle-même ou dans sa valeur négative selon que la permutation est réductible à un nombre pair ou impair de changements de deux indices. Pour la valeur $n = 2$, le système des coefficients à gauche et à droite est construit ainsi que les termes de la première et de la seconde ligne verticale ne diffèrent entre eux que par l'ordre et par les signes $\pm$ y appliqués. Au contraire, pour chaque valeur de n plus grande que 2, les n équations formulées permettent d'en déduire $2^{n-1} - n$ équations nouvelles qui, jointes aux premières, fournissent un système dont les coefficients, qui ne sont autre chose que les fonctions $\lambda_{abcd\ldots f}$, ont la propriété que les termes des lignes verticales ne diffèrent entre eux que par l'ordre et par les signes $\pm$ qui y sont appliqués.

Comme chaque équation nouvelle sera caractérisée par le coefficient dont x_1 sera affecté, distinguons le cas du coefficient $\lambda_{123\ldots p}$ et du coefficient $\lambda_{23\ldots q}$. En appliquant aux équations données successivement, pour le premier cas les facteurs

$$0, \quad \lambda_{31\ldots p}, \quad \lambda_{45\ldots p,2}, \quad \ldots, \quad \lambda_{23\ldots p,1},$$

pour le second cas les facteurs

$$\lambda_{23\ldots q},\quad \lambda_{34\ldots q,1},\quad \ldots,\quad \lambda_{123\ldots(q-1)},$$

l'addition donne respectivement les équations

$$\begin{aligned}
&\lambda_{123\ldots p}x_1+\lambda_{34\ldots p}x_2+\ldots+\lambda_{23\ldots(p-1)}x_p+\lambda_{(p+1)23\ldots p}x_{p+1}+\ldots+\lambda_{n,23\ldots p}x_n\\
&\quad=-\lambda_{123\ldots p}y_1+\lambda_{34\ldots p}y_2+\ldots\\
&\qquad\qquad+\lambda_{23\ldots(p-1)}x_p-\lambda_{(p+1)23\ldots p}y_{p+1}-\ldots-\lambda_{n,23\ldots p}y_n,\\
&\lambda_{23\ldots q}x_1+\lambda_{34\ldots q,1}x_2+\ldots+\lambda_{12\ldots(q-1)}x_q+\lambda_{(q+1)12\ldots q}x_{q+1}+\ldots+\lambda_{n,1\ldots q}x_n\\
&\quad=\lambda_{23\ldots q}y_1+\lambda_{34\ldots q1}y_2+\ldots\\
&\qquad\qquad+\lambda_{12\ldots(q-1)}x_q-\lambda_{(q+1)12\ldots q}y_{q+1}-\ldots-\lambda_{n,12\ldots q}y_n.
\end{aligned}$$

De celles-ci suivent toutes les équations désirées, si l'on substitue pour $23\ldots p$ et pour $23\ldots q$ toutes les combinaisons de nombres, qui diffèrent entre eux et de l'unité. Maintenant on voit facilement que la somme des termes à gauche du système complet de 2^{n-1} équations, élevés au carré, devient égale au produit du déterminant $\Delta\lambda$ et de la somme $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$; la somme semblable à droite devient de même égale au produit de $\Delta\lambda$ et de la somme $y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2$, d'où suit encore l'équation de transformation de la somme de n carrés en elle-même. Voici les faits d'Algèbre qui servent de base à ce que je vais exposer.

J'introduis une série de symboles, qui seront appliqués aux quantités réelles comme facteurs, et je suppose que le signe négatif d'une quantité réelle puisse être attribué au symbole respectif. En y joignant $+1$ et -1, je dénote le nombre 2^n de symboles comme il suit,

$$\pm 1\pm i_{12}\pm\ldots\pm i_{12\ldots p}\pm\ldots\pm i_{23\ldots q}\pm\ldots,$$

où les indices d'un symbole diffèrent entre eux, et où, par une permutation quelconque des indices, le symbole se change en lui-même ou dans le même symbole pris négativement, selon que la permutation est réductible à un nombre pair ou impair de changements de deux indices. Après avoir multiplié les 2^{n-1} équations du système formulé auparavant par les symboles

$$1,\quad i_{12},\quad \ldots,\quad i_{12\ldots p},\quad \ldots,\quad i_{23\ldots q},\quad \ldots,$$

dont les indices correspondent aux indices des facteurs de x_1, je les ajoute ensemble et j'observe que la constitution des expres-

sions permet de représenter la somme à gauche comme un produit symbolique, dont le premier facteur a la forme

$$1 + i_{12}\lambda_{12} + \ldots + i_{123\ldots p}\lambda_{123\ldots p} + \ldots + i_{23\ldots q}\lambda_{23\ldots q}$$

et le second facteur la forme

$$x_1 + i_{12}x_2 + \ldots + i_{1n}x_n,$$

où le résultat de la multiplication de deux symboles dépend de l'arrangement des facteurs et s'exprime linéairement à l'aide des symboles introduits par un système de règles déterminées. Pareillement on pourra représenter la somme à droite comme un produit dont le premier facteur a la forme

$$y_1 + i_{12}y_2 + \ldots + i_{1n}y_n$$

et le second facteur la forme

$$1 - i_{12}\lambda_{12} - \ldots - i_{123\ldots p}\lambda_{123\ldots p} + \ldots + i_{23\ldots q}\lambda_{23\ldots q} + \ldots,$$

où les règles de la multiplication des symboles seront aussi déterminées. Le premier système de règles est le suivant :

$$i_{12}i_{12} = -1, \quad i_{1234\ldots p}i_{12} = -i_{34\ldots p}, \quad i_{34\ldots p}i_{12} = i_{1234\ldots p}, \quad i_{34\ldots q,1}i_{12} = i_{23\ldots q},$$

le second système, celui-ci :

$$i_{12}i_{12} = -1, \quad i_{12}i_{1234\ldots p} = -i_{34\ldots p}, \quad i_{12}i_{34\ldots p} = i_{1234\ldots p}, \quad i_{12}i_{34\ldots q,1} = i_{23\ldots q}.$$

Les deux systèmes présentent les mêmes règles pour la multiplication de deux symboles à deux indices :

$$i_{ab}i_{ab} = -1, \qquad i_{ab}i_{bc} = -i_{ac}, \qquad i_{ab}i_{cd} = i_{abcd}.$$

De plus, le premier système indique le résultat de la multiplication d'une série quelconque de symboles à deux indices, pourvu qu'en les associant on marche de gauche à droite; le second système indique le résultat de la multiplication de la même série de symboles, pourvu qu'en les associant on marche de droite à gauche, et les deux résultats coïncident. C'est pourquoi il est permis d'exprimer chaque symbole, par exemple i_{abcdef}, comme le produit des symboles à deux indices, l'ordre des indices restant le même :

$$i_{abcdef} = i_{ab}i_{cd}i_{ef}.$$

En outre, pour la multiplication de deux symboles quelconques, on aura la règle

$$i_{abcdef}\, i_{a'b'c'd'e'f'} = i_{ab}\, i_{cd}\, i_{ef}\, i_{a'b'}\, i_{c'd'}\, i_{e'f'},$$

par laquelle se trouve remplie la *loi associative* de Hamilton.

Après avoir réduit la multiplication des symboles quelconques à la multiplication des symboles à deux indices, il m'est venu l'idée que l'on peut aller plus loin et représenter chaque symbole à deux indices comme le produit de deux *signes primitifs*. Par là on réussit à exprimer les 2^{n-1} symboles à l'aide de n *signes primitifs* $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

A cet effet, je suppose les équations

$$i_{ab} = k_a k_b, \qquad i_{ba} = k_b k_a.$$

Alors se présentent nécessairement les règles

$$k_b k_a = -k_a k_b, \qquad k_a k_b k_a k_b = -1, \qquad k_a k_b k_b k_c = -k_a k_c;$$

de plus, on a

$$i_{abcd} = k_a k_b k_c k_d, \qquad \ldots.$$

Maintenant la multiplication des symboles s'exécute par la multiplication des signes primitifs, et pour celle-là il y a seulement ces deux règles, que la transposition de deux signes primitifs voisins différents entraîne l'apposition du facteur -1, et que deux signes primitifs voisins égaux doivent être chassés et remplacés par le facteur -1.

Les signes primitifs forment une série continuelle qui passe de $n = 2$ à une valeur de n quelconque. Pour $n = 2$, le symbole i est scindé en deux, et l'on a les quatre unités

$$+1, \quad -1, \qquad i = k_1 k_2, \qquad -i = k_2 k_1.$$

Pour $n = 3$, on a les huit unités du calcul des quaternions

$$\begin{array}{llll} +1, & i = k_1 k_2, & j = k_2 k_3, & k = k_3 k_1, \\ -1, & -i = k_2 k_1, & -j = k_3 k_2, & -k = k_1 k_2. \end{array}$$

Pour $n = 4$, il y a les seize unités

$$\begin{array}{llll} +1, & i_{12} = k_1 k_2, & \ldots, & i_{1234} = k_1 k_2 k_3 k_4, \\ -1, & -i_{12} = k_2 k_3, & \ldots, & -i_{1234} = k_2 k_1 k_3 k_4. \end{array}$$

Passons à notre équation pour le cas général et posons

$$\begin{aligned}
L &= 1 + k_1 k_2 \lambda_{12} + \ldots + k_1 k_2 \ldots k_p \lambda_{12\ldots p} + \ldots + k_2 k_3 \ldots k_q \lambda_{23\ldots q} + \ldots,\\
X &= x_1 + k_1 k_2 x_2 + \ldots + k_1 k_n x_n,\\
L_1 &= 1 - k_1 k_2 \lambda_{12} - \ldots - k_1 k_2 \ldots k_p \lambda_{12\ldots p} + \ldots + k_2 k_3 \ldots k_q \lambda_{23\ldots q} + \ldots,\\
Y &= y_1 + k_1 k_2 y_2 + \ldots + k_1 k_n y_n.
\end{aligned}$$

Partant, nous avons l'équation

$$LX = YL_1.$$

Maintenant la composition de deux transformations de la somme $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ en elle-même peut être représentée par une multiplication. Soient données $\frac{n(n-1)}{2}$ quantités réelles μ_{ab}, à l'aide desquelles on formera une transformation de la somme $y_1^2 + \ldots + y_n^2$ dans la somme $z_1^2 + \ldots + z_n^2$. Supposons que par la substitution de μ à λ, de y à x, de z à y, on ait M pour L, M_1 pour L_1, Y pour X, Z pour Y; il vient l'équation

$$MY = ZM_1.$$

Après avoir multiplié l'équation précédente par le facteur M, en conséquence de la loi associative, on tire de l'équation en question

$$MLX = ZM_1L_1.$$

Dans notre système, à une expression L correspond l'expression conjuguée

$$L' = 1 + k_2 k_1 \lambda_{12} + \ldots + k_p \ldots k_2 k_1 \lambda_{12\ldots p} + \ldots + k_q \ldots k_3 k_2 \lambda_{23\ldots q} + \ldots,$$

où l'ordre des signes primitifs est l'inverse. Alors le produit LL' devient égal au déterminant $\Delta\lambda$, qui est une somme de 2^{n-1} carrés. En dénotant par M' l'expression conjuguée à l'expression M, au produit LM est conjugué le produit $M'L'$, et le produit $LMM'L'$ a la valeur réelle $\Delta\lambda\,\Delta\mu$.

Si je ne me suis pas trompé, l'introduction des signes primitifs contribue à éclaircir la théorie des quantités imaginaires et des quaternions, parce qu'elle est tirée de l'algèbre des quantités réelles sans aucun tâtonnement.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

KNESER (A.). — IRREDUKTIBILITAT UND MONODROMIEGRUPPE ALGEBRAISCHER GLEICHUNGEN. Inaugural-Dissertation. 47 p. in-8°. Berlin, Hermann, 1884.

Soit y une fonction algébrique des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ définie par une équation entière en $y, x_1, x_2, \ldots, x_m$ et du degré n en y; partons d'un système de valeurs des variables x ou d'un *point*, tel que les n valeurs correspondantes de y soient finies et distinctes, et supposons que le *point* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ décrive d'une manière continue une *courbe* fermée qui ne passe par aucun point pour lequel quelques valeurs de y soient égales ou infinies; les n valeurs de y varieront d'une manière continue en restant finies et distinctes, et, quand on sera revenu au point de départ, se trouveront, en général, rangées dans un autre ordre; la courbe fermée que l'on a ainsi parcourue définit relativement aux n valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n$ une substitution; toutes les substitutions que l'on peut obtenir ainsi forment manifestement un groupe, dont on voit facilement qu'il ne dépend pas du point de départ. Ce groupe est ce que l'on appelle le *groupe de monodromie* de l'équation qui définit y comme fonction des x.

La première Partie du travail de M. Kneser se rapporte à la détermination de ce groupe, d'après l'équation. Dans la seconde Partie, l'auteur applique les résultats qu'il a obtenus à un intéressant problème de Géométrie : la construction des points d'intersection d'une droite et d'une courbe algébrique du $n^{\text{ième}}$ ordre dépend de la résolution d'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré; la courbe peut-elle être telle que l'équation qui détermine les points d'intersection avec une droite *arbitraire* du plan ait une affection (*Affekt*) particulière? par exemple, existe-t-il des courbes du quatrième degré telles que leur intersection avec une droite quelconque puisse être construite au moyen de la règle et du compas? Cela revient à demander en général si l'*affection* d'une équation particulière $f(x, y) = 0$, où y est l'inconnue, peut se conserver quand on remplace x et y par des fonctions linéaires quelconques de ξ, η et que l'on regarde ensuite η comme l'inconnue. La réponse à cette question est contenue dans le théorème suivant.

Soit

$$x^\alpha + Ux^\beta + Vx^\gamma + \ldots = 0$$

une équation où U, V, ... sont des indéterminées, où les exposants α, β, γ, ... ont pour plus grand commun diviseur l'unité, où enfin le premier membre a au moins trois termes. Une telle équation est toujours une *équation générale*, c'est-à-dire telle que la *résolvante de Galois* ne se décompose pas, tant qu'on n'adjoint aucune fonction algébrique des quantités U, V, ... C'est la généralisation d'un résultat bien connu d'Abel, à savoir l'impossibilité de résoudre l'équation $x^5 + Ux + V = 0$, U et V étant des indéterminées. J. T.

MÉLANGES.

ÉTUDE SUR LES TRAVAUX THERMODYNAMIQUES DE M. J. WILLARD GIBBS (1):

PAR M. P. DUHEM.

En 1875, M. Gibbs publia, *Sur l'équilibre des substances hétérogènes*, un Mémoire qui inaugurait en Thermodynamique une méthode nouvelle. De même que Lagrange avait fondé toute la Statique sur le seul principe des vitesses virtuelles, M. Gibbs faisait reposer l'étude tout entière des équilibres étudiés en Thermodynamique sur un principe analogue au principe des vitesses virtuelles et comprenant ce dernier comme cas particulier. La Mécanique et la Thermodynamique se trouvaient par là

(1) *On the equilibrium of heterogeneous substances*, Ire Partie [*Transactions of the Connecticut Academie of Arts and Sciences*, Vol. III, Part I, p. 108-248 (1875-1876); IIe Part, *ibid.*, Vol. III, Part II, p. 343-524 (1877-1878)]. Extrait du même (*American Journal of Sciences and Arts*, Vol. XVI, p. 441; 1878). *On the density of vapours* (*American Journal of Sciences and Arts*, Vol. XVIII; 1879). *Graphical methods in the thermodynamics of fluids* (*Transact. of the Connecticut Academy of Arts and Sciences*, Vol. II, Part II, p. 310; 1873). *A method of geometrical representation of the thermodynamics properties of substances by means of surfaces* (*ibid.*, p. 382; 1873).

réunies d'une façon plus étroite que par le passé; toute une partie des sciences physiques était amenée à un plus haut degré d'unité. En même temps, entre les mains mêmes de M. Gibbs, la nouvelle théorie affirmait sa fécondité en réalisant des progrès considérables dans l'étude de la dissociation d'une part, dans l'étude de la pile voltaïque d'autre part.

Depuis l'époque déjà lointaine de leur publication, les idées de M. Gibbs ont provoqué de nombreuses recherches, les unes, comme celles de M. H. von Helmholtz, destinées à les confirmer; les autres, au contraire, ayant pour objet de critiquer soit les principes mêmes de la nouvelle théorie, soit quelques-unes de ses applications. Aussi, bien des esprits sont-ils en suspens sur la valeur de la théorie de M. Gibbs; les mathématiciens regrettent que les principes de la Thermodynamique soient en général exposés avec assez peu de précision pour qu'une même proposition puisse être regardée par les uns comme une conséquence, par les autres comme une négation de ces principes; les expérimentateurs n'accordent qu'une faible confiance aux conséquences d'une théorie dont les principes sont ainsi discutés et se refusent à lui demander l'explication des phénomènes qu'ils observent ou la prévision des faits qu'elle pourrait leur faire découvrir.

Dans ces conditions, il ne semblera peut-être pas inutile de reprendre dans leurs fondements les principes mêmes de cette théorie discutée; cette tâche, il est vrai, ne laisse pas que d'être ardue, car il s'agit de reprendre sur nouveaux frais l'exposé même du second principe de la Thermodynamique; mais n'est-il pas utile de soumettre à une discussion rigoureuse les principes des diverses branches de la Physique, si l'on veut que cette science s'approche de plus en plus de la précision des Sciences mathématiques?

Nous allons donc, en premier lieu, montrer comment les premiers principes de la Thermodynamique conduisent à la méthode nouvelle de M. Gibbs; en second lieu, nous exposerons l'historique des tentatives qui avaient été essayées auparavant dans le même sens, et des applications qui depuis ont été faites de cette méthode.

PREMIÈRE PARTIE.

EXAMEN DU DEUXIÈME PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE.

1. *Le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail.* — La méthode de M. Gibbs est une conséquence logique des idées de M. Clausius sur le principe de Carnot; M. Gibbs a lui-même indiqué cette filiation et nous avons cherché ailleurs à la préciser; mais plusieurs physiciens ont élevé des doutes sur les idées mêmes de M. Clausius, ou plutôt sur celles de ces idées qui servent de point de départ aux travaux de M. Gibbs. Comme il est impossible de savoir ce que vaut un édifice avant de s'être assuré de la solidité de ses fondements, force nous est de nous arrêter à la discussion même des théories de M. Clausius en les reprenant dès leur point de départ.

La Thermodynamique repose sur deux principes : le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail et le principe de Carnot. C'est sur le second principe que portent les discussions qui divisent aujourd'hui quelques physiciens. Le premier, au contraire, ne présente que peu de difficultés; nous nous contenterons d'en rappeler l'énoncé et d'en déduire une conséquence qui nous sera d'un usage indispensable dans la suite de cette étude.

Nous supposerons tout d'abord qu'on ait défini d'une manière précise le sens qu'il convient d'attribuer à ces deux termes : *température* (¹) et *quantité de chaleur*. Ces définitions présentent plus d'une difficulté intéressante à examiner; mais nous ne saurions en aborder ici l'étude sans allonger démesurément cet article.

Tout système que l'on étudie en Thermodynamique est défini par la température $\mathfrak{T}$ en chacun de ses points, et par des paramètres en nombre limité ou illimité α, β, ..., de telle façon que, pour connaître toute la série des modifications que le système éprouve, il est nécessaire et suffisant de connaître la température de chaque point et les paramètres α, β, ... en fonction du temps.

(¹) J'entends ici parler d'une température lue sur un thermomètre arbitraire et non de la *température absolue* dont il sera question plus loin.

De cette définition, il résulte que, parmi les paramètres α, β, ... peuvent se trouver les coordonnées de divers points du système, mais non les vitesses de ces points.

Une modification infiniment petite du système considéré est accompagnée du dégagement d'une quantité de chaleur dQ. En même temps, la demi-force vive du système augmente de $d\sum\frac{mv^2}{2}$ et les forces extérieures appliquées au système effectuent un certain travail $d\mathfrak{T}$. Le premier principe de la Thermodynamique consiste à admettre que l'on a

$$dQ + A\,d\sum\frac{mv^2}{2} = -dU + A\,d\mathfrak{T}, \tag{1}$$

A étant une constante, l'*équivalent calorifique du travail,* dont l'inverse se nomme l'*équivalent mécanique de la chaleur,* et U une fonction des valeurs de $\mathfrak{S}$ en chaque point du système et de α, β, ... Cette fonction, introduite en Thermodynamique par M. Clausius, porte aujourd'hui le nom d'*énergie interne* que lui a donné Sir W. Thomson.

Aux infiniment petits du second ordre près, on peut écrire

$$d\mathfrak{T} = \Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

X, Y, Z étant les composantes de la force extérieure qui agit au point de coordonnées x, y, z, et dx, dy, dz étant les composantes du déplacement de ce point. Dès lors, de l'égalité (1) on peut déduire la conséquence suivante :

Désignons par les symboles (0) et (1) deux états infiniment voisins d'un système. Imaginons que l'on passe de l'état (0) à l'état (1) de deux manières différentes, s'effectuant sous l'action des mêmes forces extérieures et amenant la même variation de force vive, chacun de ces modes de passage étant constitué par un nombre limité de modifications infiniment petites. La quantité de chaleur dégagée est la même dans chacun de ces deux modes de passage.

Nous ne montrerons pas ici l'importance de cette remarque pour l'exposé de la Thermodynamique. Nous aurons du reste l'occasion d'en faire usage au cours même de cette étude. Nous ferons seulement observer qu'elle explique comment Laplace et Poisson, tout en admettant avec tous leurs contemporains l'hypothèse erronée que la quantité de chaleur dégagée dans une mo-

dification dépendait seulement de l'état initial et de l'état final du système, ont pu obtenir des résultats exacts toutes les fois qu'ils n'ont appliqué cette hypothèse qu'à des transformations infiniment petites.

Telles sont les quelques notions relatives au principe de l'équivalence de la chaleur et du travail qu'il nous était nécessaire de rappeler. Passons maintenant à l'examen du second principe, qui doit nous arrêter plus longtemps.

2. *Le postulatum de M. Clausius.* — M. Clausius a fait reposer la proposition de Sadi Carnot sur un postulatum fort simple, auquel on parvient en généralisant les notions les plus vulgaires sur la conductibilité.

Imaginons une barre métallique dont les parois sont environnées d'une substance non conductrice qui ne permet aucun échange de chaleur entre les parois de la barre et le milieu extérieur. L'une des extrémités de la barre est à une basse température $\mathfrak{T}$, l'autre extrémité est soumise à l'action d'une source de chaleur qui la porte à une température $\mathfrak{T}'$ supérieure à $\mathfrak{T}$. Au bout d'un certain temps, un régime permanent s'établit; la température en chaque point de la barre, l'état de chaque élément de volume de la barre demeurent alors invariables. Si donc, à partir du moment où ce régime permanent est établi, on observe la barre pendant un certain temps, pendant ce temps, son énergie interne n'aura pas varié, les forces extérieures qui la sollicitent n'auront effectué aucun travail, sa force vive sera demeurée égale à 0; en même temps, la barre aura absorbé de la chaleur à son extrémité chaude et dégagé de la chaleur à son extrémité froide.

Telle est l'observation tout à fait simple que M. Clausius [1] a généralisée de manière à en faire le postulatum fondamental que voici.

Supposons qu'un système éprouve une modification soumise aux quatre restrictions suivantes :

1° L'énergie interne du système a la même valeur au commencement de la modification et à la fin.

---

[1] R. Clausius. *Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. LXXIX; 1850. *Mémoires sur la Théorie mécanique de la chaleur*. Trad. Folie, t. I, p. 54.

2° La force vive du système a la même valeur au commencement de la modification et à la fin.

3° Les forces extérieures appliquées au système produisent durant la modification autant de travail positif que de travail négatif.

4° Les échanges de chaleur entre le système et le milieu extérieur ont lieu exclusivement soit pendant que tous les points du système ont une même température $\mathfrak{T}$, soit pendant que tous les points du système ont une même température $\mathfrak{T}'$ supérieure à $\mathfrak{T}$.

Dans ces conditions, *il est impossible que le système ait absorbé de la chaleur à la température $\mathfrak{T}$ pour en dégager à la température $\mathfrak{T}'$.*

Tel est, sous sa forme la plus précise, le postulatum de M. Clausius. Après avoir été longtemps discuté, il est aujourd'hui admis par tous les physiciens. Nous nous permettrons d'y introduire une très légère modification, qui, presque insensible en apparence, suffira en réalité à éliminer toutes les difficultés qu'ont pu rencontrer certaines des idées de M. Clausius ; cette modification aura d'ailleurs l'avantage de rapprocher d'une manière plus stricte l'énoncé du postulatum du phénomène de conductibilité qui en suggère l'idée. La forme nouvelle que nous proposons pour le postulatum de M. Clausius est la suivante :

Dans une modification soumise aux restrictions indiquées, le système absorbe nécessairement à la température $\mathfrak{T}'$ plus de chaleur qu'il n'en dégage à la même température, et dégage nécessairement à la température $\mathfrak{T}$ plus de chaleur qu'il n'en absorbe à la même température.

3. *Le cycle de Carnot et le postulatum de Sir W. Thomson.* — On dit qu'un système parcourt un *cycle fermé* lorsqu'il subit une série de modifications qui le ramènent à son état initial avec sa force vive initiale.

Un cycle fermé porte le nom de *cycle de Carnot* lorsqu'il vérifie la restriction suivante :

Durant le parcours du cycle, il n'y a échange de chaleur entre le système et le milieu que lorsque tous les points du système sont

à une même température $\mathfrak{T}$, ou bien lorsque tous les points du système sont à une même température $\mathfrak{T}'$ supérieure à $\mathfrak{T}$.

Une machine à vapeur dans laquelle tous les points de la chaudière seraient à la même température $\mathfrak{T}'$, tandis que tous les points du condenseur seraient à la même température $\mathfrak{T}$ inférieure à $\mathfrak{T}'$, dans laquelle en outre le cylindre serait imperméable à la chaleur, offrirait l'image d'un système parcourant un cycle de Carnot.

Un système qui parcourt un cycle de Carnot de telle façon que durant le parcours du cycle les forces extérieures qui sollicitent ce système effectuent un travail *négatif* offre l'image du moteur à feu le plus simple qu'on puisse imaginer.

Généralisant ce que l'expérience nous apprend des moteurs à feu les plus usités, Sir W. Thomson (¹) a énoncé le postulatum suivant :

Lorsqu'un système décrit un cycle de Carnot durant lequel les forces extérieures qui sollicitent le système effectuent un travail total négatif, il est impossible que le système absorbe à la température $\mathfrak{T}$ plus de chaleur qu'il n'en dégage à la même température.

Nous ferons subir à ce postulatum de Sir W. Thomson une très légère modification, analogue à celle que nous avons fait subir au postulatum de M. Clausius, et nous dirons :

Lorsqu'un système décrit un cycle de Carnot durant lequel les forces extérieures qui sollicitent le système effectuent un travail total négatif, le système dégage à la température $\mathfrak{T}$ plus de chaleur qu'il n'en absorbe à la même température.

Sir W. Thomson avait proposé le postulatum dont nous venons de rappeler l'énoncé pour remplacer, à titre de proposition équivalente, le postulatum de M. Clausius. Nous allons, dans l'exposé suivant, employer simultanément ces deux postulata.

4. *Le théorème de Carnot et la température absolue.* — Pro-

(¹) W. Thomson, *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, t. XX, p. 255; 1851.

posons-nous tout d'abord de classer tous les cycles de Carnot dont l'existence est compatible avec le premier principe de la Thermodynamique et avec les deux postulata que nous avons énoncés.

Nous désignerons par Q la quantité totale de chaleur échangée entre le système et le milieu extérieur pendant que tous les points du système ont la température $\mathfrak{T}$, par Q′ la quantité totale de chaleur échangée entre le système et le milieu extérieur pendant que tous les points du système ont la température $\mathfrak{T}'$, et nous compterons ces deux quantités Q et Q′ positivement lorsqu'elles représenteront de la chaleur dégagée par le système, négativement lorsqu'elles représenteront de la chaleur absorbée par le système.

Nous désignerons par $\mathfrak{T}$ le travail effectué, durant le parcours du cycle, par les forces extérieures qui sollicitent le système.

Nous aurons alors, en vertu du premier principe,

$$\mathfrak{T} = E(Q + Q'). \tag{2}$$

D'où les propositions suivantes :

1° Si le travail externe est nul, les deux quantités Q et Q′ sont de signes contraires et égales en valeur absolue.

2° Si le travail externe est positif, il y a au moins l'une des quantités Q et Q′ qui est positive, et, s'il n'y en a qu'une, elle est la plus grande en valeur absolue.

3° Si le travail externe est négatif, il y a au moins l'une des quantités Q et Q′ qui est négative, et, s'il n'y en a qu'une, elle est la plus grande en valeur absolue.

D'autre part, les deux postulata de M. Clausius et de Sir W. Thomson conduisent à la proposition suivante :

Lorsque le travail extérieur est nul ou négatif, la quantité Q est nécessairement positive.

De ces propositions, il est facile de conclure que tous les cycles de Carnot réalisables peuvent se classer de la manière suivante :

1° Le travail effectué par les forces extérieures est nul; Q est positif, Q′ est négatif et égal à Q en valeur absolue.

2° Le travail effectué par les forces extérieures est négatif; Q est positif, Q′ est négatif et supérieur à Q en valeur absolue.

3° Le travail effectué par les forces extérieures est positif; trois cas peuvent alors se présenter :

a. Q est positif, Q′ est négatif et inférieur à Q en valeur absolue.

b. Q est négatif, Q′ est positif et supérieur à Q en valeur absolue.

c. Q et Q′ sont positifs.

Proposons-nous maintenant de comparer les valeurs que prend, dans ces différentes classes de cycles, le rapport

$$\rho = \frac{Q' + Q}{Q},$$

et de démontrer que, *pour les cycles décrits entre les températures* $\mathfrak{T}$ *et* $\mathfrak{T}'$ *qui correspondent à un travail externe positif ou nul, le rapport* ρ *est plus grand que pour les cycles décrits entre les mêmes températures qui correspondent à un travail externe négatif.*

Ce théorème est évident, sauf pour les cycles à travail externe positif, dans lesquels Q est négatif et Q′ positif; en effet, pour tous les autres cycles à travail externe positif, le rapport ρ est positif; il est nul pour les cycles à travail externe nul, tandis qu'il est négatif pour les cycles à travail externe négatif.

Comparons donc un cycle décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ pour lequel le travail externe est positif, la quantité Q négative et la quantité Q′ positive, à un cycle décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ pour lequel le travail externe est négatif, la quantité Q positive et la quantité Q′ négative.

Désignons par $\mathfrak{E}_1$, Q_1, Q'_1 les valeurs des quantités $\mathfrak{E}$, Q, Q′ pour le premier cycle; par $\mathfrak{E}_2$, Q_2, Q'_2 les valeurs des quantités $\mathfrak{E}$, Q, Q′ pour le second cycle; il s'agit de démontrer que l'on a

$$\frac{Q'_1 + Q_1}{Q_1} > \frac{Q'_2 + Q_2}{Q_2}.$$

m_1 et m_2 désignant deux nombres entiers, soit $\frac{m_1}{m_2}$ un nombre commensurable supérieur ou égal à $\frac{\mathfrak{E}_1}{|\mathfrak{E}_2|}$ [1].

---

[1] La notation $|\mathfrak{E}_2|$ signifie *valeur absolue* de $\mathfrak{E}_2$.

Considérons un système formé de m_2 systèmes identiques à celui qui décrivait le premier cycle et de m_1 systèmes identiques à celui qui décrivait le second cycle. Aux m_2 premiers systèmes faisons décrire le premier cycle; aux m_1 seconds systèmes, faisons décrire le second cycle. Le système total décrira un cycle de Carnot en lequel les échanges de chaleur auront encore lieu aux températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$. Le travail effectué par les forces extérieures durant le parcours de ce cycle aura pour valeur

$$m_2\mathfrak{T}_1 + m_1\mathfrak{T}_2.$$

D'après la manière dont m_1 et m_2 ont été choisis, il est négatif, à moins que le rapport $\frac{\mathfrak{T}_1}{|\mathfrak{T}_2|}$ ne soit commensurable et que $\frac{m_1}{m_2}$ ne soit égal à ce rapport; dans ce cas, le travail externe en question serait nul. Dans tous les cas, d'après les postulata fondamentaux, le cycle en question doit dégager de la chaleur à la température $\mathfrak{T}$; on doit donc avoir

$$m_2 Q_1 + m_1 Q_2 > 0.$$

De cette inégalité, nous déduisons

$$\frac{m_2}{Q_2} < \frac{m_1}{|Q_1|}.$$

Posons

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\mathfrak{T}_1}{|\mathfrak{T}_2|} + \varepsilon;$$

ε sera ou zéro ou une quantité positive que l'on peut rendre aussi petite que l'on veut. L'inégalité précédente deviendra

$$\frac{|\mathfrak{T}_2|}{Q_2} < \frac{\mathfrak{T}_1 + \varepsilon|\mathfrak{T}_2|}{|Q_1|}.$$

Cette inégalité ne peut tendre vers l'égalité lorsque ε tend vers O. On doit donc avoir

$$\frac{\mathfrak{T}_1}{Q_1} > \frac{\mathfrak{T}_2}{Q_2}$$

ou bien, en vertu des égalités,

$$\mathfrak{T}_1 = E(Q_1 + Q'_1),$$
$$\mathfrak{T}_2 = E(Q_2 + Q'_2)$$

que donne le premier principe de la Thermodynamique,

$$\frac{Q_1 + Q'_1}{Q_1} > \frac{Q_2 + Q'_2}{Q_2}.$$

C'est précisément l'inégalité qu'on voulait démontrer.

En résumé, *si l'on considère tous les cycles de Carnot pour lesquels les échanges de chaleur ont lieu aux mêmes températures* $\mathfrak{T}$ *et* $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}'$ *étant supérieur à* $\mathfrak{T}$, *pour tous ceux de ces cycles qui correspondent à un travail négatif des forces extérieures, le rapport* $\rho = \frac{Q' + Q}{Q}$ *a une valeur inférieure à une certaine quantité négative* A; *pour tous ceux qui correspondent à un travail positif ou nul des forces extérieures, le rapport* $\rho = \frac{Q' + Q}{Q}$ *a une valeur supérieure à une certaine quantité négative* A'; A' *est supérieur ou égal à* A.

Nous allons démontrer maintenant que

$$A' = A.$$

Pour parvenir à cette importante proposition, il nous est nécessaire d'introduire la notion de *transformation réversible*. Cette notion, l'une des plus importantes de la Thermodynamique, est en même temps l'une des moins faciles à préciser. Il nous sera donc nécessaire de nous y arrêter quelque temps.

Imaginons un système ayant la même température en tous ses points, soumis à l'action de certaines forces extérieures et assujetti à certaines liaisons qui s'expriment par des égalités ou des inégalités entre les divers paramètres définissant l'état du système. Nous dirons qu'un semblable système est en *équilibre* dans un certain état, si, placé sans force vive dans cet état, il y demeure éternellement.

Soient (1) et (2) deux états d'équilibre d'un même système. Imaginons que l'on puisse disposer en série linéaire une infinité d'états d'équilibre du même système partant de l'état (1) et aboutissant à l'état (2), de telle manière que les conditions suivantes soient vérifiées :

1° Les paramètres qui définissent l'état du système subissent

des variations continues et compatibles avec les liaisons lorsqu'on passe d'un état à l'état voisin.

2° Les forces extérieures qui agissent sur le système varient d'une manière continue en grandeur et en direction.

3° Les égalités ou inégalités qui expriment les liaisons du système subissent des variations continues de forme.

Une semblable série Σ sera dite *série continue d'états d'équilibre*.

Si l'on modifie les forces extérieures qui agissaient sur le système dans l'état d'équilibre (1), et les liaisons auxquelles il était soumis dans cet état, ou même si on le place simplement dans cet état sans que sa force vive soit nulle, le système pourra ne plus demeurer éternellement dans cet état. Il pourra éprouver des modifications.

Supposons que l'on puisse disposer des vitesses initiales infiniment petites [1] des divers points, des forces extérieures, des liaisons de manière à former une infinité de modes de passage de l'état (1) sans force vive, à l'état (2) sans force vive. Chacun de ces modes de passage est constitué par une série linéaire et continue d'états. Soient S, S′, ... ces séries, dont le nombre est supposé illimité.

Supposons que l'on puisse de même former une infinité de modes de passage de l'état (2) à l'état (1) analogues aux précédents, correspondant à une infinité de séries linéaires et continues s, s', ... d'états du système.

Imaginons maintenant que parmi les séries S, S′, ... on puisse au moins d'une manière en choisir une infinité qui, avec la série Σ, puissent se disposer en une suite linéaire de séries, jouissant des propriétés suivantes :

On peut établir une correspondance univoque entre un état de chacune de ces séries et un état de chacune des autres et de la série Σ.

L'ensemble des états correspondant à un même état de la série Σ forme lui-même une série linéaire et continue d'états aboutissant à l'état de la série Σ, et dont la force vive tend vers 0.

---

[1] Lorsque les vitesses initiales sont infiniment petites, la forme vive initiale est infiniment petite du second ordre. On peut donc la regarder comme nulle.

Imaginons que les séries s, s', ... jouissent d'une propriété analogue à celle que nous venons de supposer aux séries S, S', ...

Nous exprimerons brièvement toutes les propriétés que nous venons d'attribuer à la série Σ en disant qu'*elle constitue une modification réversible permettant de passer soit de l'état* (1) *à l'état* (2), *soit de l'état* (2) *à l'état* (1).

Nous dirons qu'une modification réversible Σ est *isothermique* lorsqu'on peut, parmi les séries S, S', S'', ... d'une part, parmi les séries s, s', ... d'autre part, former deux suites continues de modifications isothermiques ayant pour limite commune, de la manière que nous avons indiquée, la suite Σ. Il est évident que semblable suite Σ est formée par des états d'équilibre qui correspondent tous à une même température du système.

Nous dirons qu'une modification Σ réversible est *adiabatique* [1] lorsqu'elle est de même la limite commune de deux suites de modifications adiabatiques de sens contraire. Prenons deux états voisins d'une suite réversible Σ, ces deux états correspondront à des valeurs U et $U + dU$ de l'énergie interne du système; si l'on transportait le système de l'un de ces états à l'autre, les forces extérieures effectueraient un travail *virtuel* $d\mathfrak{T}$. On appellera en général *quantité de chaleur dégagée dans le passage réversible de l'un de ces états à l'autre* la quantité

$$dQ = A\,d\mathfrak{T} - dU.$$

Cette quantité ne représente pas plus un véritable dégagement de chaleur qu'une modification réversible ne représente une véritable modification. Elle est seulement la limite de la quantité de chaleur dégagée dans l'une des modifications S ou s qui ont pour limite la suite Σ pendant que l'on franchit l'intervalle des deux états qui ont pour correspondants les deux états considérés de la suite Σ.

D'après la définition que nous venons de donner, dans le cas d'une modification adiabatique réversible, on a

$$dQ = 0.$$

---

[1] On sait que l'on nomme *modification adiabatique* une modification qui n'absorbe ni ne dégage de chaleur à aucun moment.

Ces définitions posées, revenons aux propriétés du cycle de Carnot.

Deux températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, cette dernière plus élevée que la première, étant données, imaginons que l'on puisse toujours trouver quatre modifications réversibles d'un certain système, ces modifications jouissant des propriétés suivantes.

La première est une modification réversible isothermique Σ_1^2, correspondant à la température $\mathfrak{T}'$, et conduisant le système d'un état (1) à un autre état (2).

La deuxième est une modification réversible et adiabatique Σ_2^3 conduisant le système de l'état (2), où il a la température $\mathfrak{T}'$, à l'état (3) où sa température est $\mathfrak{T}$.

La troisième est une modification réversible isothermique Σ_3^4 conduisant le système de l'état (3) à un certain état (4) de même température $\mathfrak{T}$.

La quatrième est une modification réversible adiabatique Σ_4^1 ramenant le système de l'état (4) à l'état (1).

Nous aurons ainsi constitué un *cycle de Carnot réversible* décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$.

D'après la définition des transformations réversibles, il existe une infinité de manières de passer de l'état (1) à l'état (2), parmi lesquelles se trouvent une infinité de modifications isothermiques S_1^2, $S_1'^2$, ... formant une série linéaire qui a pour limite la suite Σ_1^2. Il existe de même une infinité de manières de passer de l'état (2) à l'état (1), parmi lesquelles se trouvent une infinité de modifications isothermiques S_2^1, $S_2'^1$, ..., formant une série linéaire qui a pour limite la suite Σ_2^1. On peut sur les trois autres modifications réversibles Σ_2^3, Σ_3^4, Σ_4^1 répéter des considérations analogues.

Prenons une des modifications isothermiques S_1^2, une des modifications adiabatiques S_2^3, une des modifications isothermiques S_3^4, une des modifications adiabatiques S_4^1. Nous aurons un cycle de Carnot passant par les quatre états (1), (2), (3), (4), et décrit, entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, dans le sens (1), (2), (3), (4). On peut évidemment former une infinité de semblables cycles ; on peut, d'une infinité de manières différentes, former parmi ces cycles une série linéaire de cycles ayant pour limite le cycle réversible. Soit C(1, 2, 3, 4) une semblable série de cycles de Carnot.

On peut de même, avec les modifications S_1^4, S_4^3, S_3^2, S_2^1, former

une infinité de séries linéaires de cycles de Carnot, décrits entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, passant par les états (1), (2), (3), (4) dans l'ordre (4), (3), (2), (1), se transformant d'une manière continue les uns dans les autres et ayant pour limite le cycle réversible. Soit C(4, 3, 2, 1) une semblable série de cycles de Carnot.

Le travail *virtuel* qu'effectueraient les forces extérieures si l'on faisait décrire au système le cycle réversible change de signe sans changer de grandeur absolue, suivant que l'on suppose le cycle décrit dans un sens ou dans l'autre. Supposons-le positif, pour fixer les idées, lorsque le cycle est décrit dans le sens (1), (2), (3), (4), et désignons-le par Θ.

Le travail effectué par les forces extérieures dans le parcours de l'un des cycles de la série C(1, 2, 3, 4) tend vers Θ lorsque ce cycle tend vers le cycle réversible. On peut donc, en prenant seulement ceux de ces cycles qui sont assez voisins du cycle réversible, être certain que pour tous le travail externe est positif.

Le travail effectué par les forces extérieures dans le parcours de l'un des cycles de la série C(4, 3, 2, 1) tend vers $-\Theta$ lorsque ce cycle tend vers le cycle réversible. On peut donc, en prenant seulement ceux de ces cycles qui sont assez voisins du cycle réversible, être certain que pour tous le travail externe est négatif.

Dès lors, pour tous les cycles de la série C(1, 2, 3, 4), on a

$$\rho = \frac{Q + Q'}{Q} > A'$$

et, pour tous les cycles de la série C(4, 3, 2, 1), on a

$$\rho = \frac{Q + Q'}{Q} < A,$$

avec

$$A' \geqq A.$$

Mais, si l'on envisage la valeur de ρ pour tous les cycles de la série C(1, 2, 3, 4), on voit qu'elle a pour limite la valeur de ρ pour le cycle réversible décrit dans le sens (1), (2), (3), (4); si l'on envisage la valeur de ρ pour tous les cycles de la série C(4, 3, 2, 1), on voit qu'elle a pour limite la valeur de ρ pour le cycle réversible décrit dans le sens (4), (3), (2), (1). Si l'on se reporte à la définition de la quantité de chaleur dégagée dans le parcours d'une modification réversible, on voit que Q et Q' changent de signe sans

changer de valeur absolue lorsqu'on change le sens de parcours du cycle réversible. Par conséquent, pour le cycle réversible, la quantité ρ a une valeur indépendante du sens de parcours du cycle.

Il résulte de là que la valeur de ρ pour tous les cycles de la série C(1, 2, 3, 4) et la valeur de ρ pour tous les cycles de la série C(4, 3, 2, 1) ont une commune limite. Par conséquent, on a, comme nous l'avions annoncé,

$$A' = A.$$

La valeur commune des deux quantités A et A′ est la valeur de la quantité ρ pour un cycle réversible quelconque décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$. Cette quantité est nécessairement une fonction des deux seules températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$. Si nous la désignons par $f(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}')$, nous arrivons au résultat suivant :

Il existe une fonction $f(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}')$ des deux températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, négative lorsque $\mathfrak{T}'$ est supérieur à $\mathfrak{T}$, telle que, pour tout cycle de Carnot décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ et correspondant à un travail externe positif ou nul, on ait

$$\frac{Q + Q'}{Q} > f(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}'),$$

et que pour tout cycle de Carnot décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ et correspondant à un travail externe négatif, on ait

$$\frac{Q + Q'}{Q} < f(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}').$$

Posons

$$\psi(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}) = f(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}) - 1.$$

La quantité $\psi(\mathfrak{T}', \mathfrak{T})$ sera négative et supérieure à 1 en valeur absolue si $\mathfrak{T}'$ est supérieur à $\mathfrak{T}$. On aura alors, pour la première classe de cycles de Carnot,

$$\frac{Q'}{Q} > \psi(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}), \tag{3}$$

et pour la seconde

$$\frac{Q'}{Q} < \psi(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}). \tag{4}$$

Il nous reste maintenant, pour achever la démonstration du théorème de Carnot, à montrer que

$$\psi(\mathfrak{T}'', \mathfrak{T}) = \psi(\mathfrak{T}'', \mathfrak{T}')\psi(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}), \tag{5}$$

$\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$ étant trois températures quelconques.

Il suffit, pour établir cette proposition, d'observer qu'au moyen d'un cycle de Carnot réversible fonctionnant entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ mettant en jeu à ces deux températures des quantités de chaleur Q et Q′ et d'un cycle de Carnot réversible fonctionnant entre les températures $\mathfrak{T}'$ et $\mathfrak{T}''$ et mettant en jeu à ces deux températures des quantités de chaleur Q′ et Q″, on peut former un cycle de Carnot réversible fonctionnant entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}''$ et mettant en jeu à ces températures des quantités de chaleur Q et Q″. La déduction est trop facile pour que nous nous y attardions.

De l'égalité (5) il résulte que, si l'on désigne par $F(\mathfrak{T})$ une fonction de $\mathfrak{T}$, toujours positive et croissant en même temps que $\mathfrak{T}$, on pourra poser

$$\psi(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}) = -\frac{F(\mathfrak{T}')}{F(\mathfrak{T})}. \tag{6}$$

La fonction $F(\mathfrak{T})$ n'est évidemment déterminée qu'à un facteur positif constant près. On peut la désigner sous le nom de *température absolue* [1].

Moyennant cette égalité (6) et les inégalités (3) et (4), on arrive à la proposition suivante :

Tous les cycles de Carnot décrits entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}'$ étant supérieur à $\mathfrak{T}$, se partagent en deux classes.

La première classe est formée des cycles correspondant à un travail positif ou nul effectué par les forces extérieures. Pour tous ces cycles, on a

$$\frac{Q'}{Q} = -\frac{F(\mathfrak{T}')}{F(\mathfrak{T})}.$$

[1] On remarquera que la température absolue se présente ici par une définition analogue à celle qu'a donnée M. G. Lippmann (G. Lippmann, *Journal de Physique théorique et appliquée*, 2e série, t. III, p. 52 et 277; 1884. *Cours de Thermodynamique*; 1886).

La seconde classe est formée de cycles correspondant à un travail négatif effectué par les forces extérieures. Pour tous ces cycles, on a

$$\frac{Q'}{Q} < -\frac{F(\mathfrak{T}')}{F(\mathfrak{T})}.$$

Ces deux énoncés peuvent être réunis en un seul. Si l'on se reporte à la classification des cycles de Carnot qui a été faite au commencement de ce paragraphe, on voit que, *pour tous les cycles de Carnot possibles, on a*

$$\frac{Q}{F(\mathfrak{T})} + \frac{Q'}{F(\mathfrak{T}')} > 0. \tag{7}$$

Telle est l'inégalité à laquelle nous donnerons le nom de *Théorème de Carnot.*

5. *L'entropie.* — Considérons deux états quelconques d'un même système : désignons-les par (1) et (2) et supposons que, dans chacun de ces deux états, le *système ait la même température en tous ses points,* cette température n'étant pas forcément la même dans l'état (1) et dans l'état (2). Nous supposerons en même temps, une fois pour toutes, qu'il en est de même de tous les états que nous pourrons avoir à considérer.

Supposons que l'on puisse d'une infinité de manières passer de l'état (1) à l'état (2). Chacun de ces modes de passage est constitué par une série linéaire S_1^2 d'états du système, le système étant, dans chacun de ces états, soumis à l'action de certaines forces extérieures, gêné par certaines liaisons et doué d'une certaine force vive. Supposons en outre que l'on ne considère parmi les séries S_1^2 que celles qui vérifient la condition suivante : *Le système étant pris sans force vive initiale dans l'un quelconque des états qui constituent* S_1^2 *peut, en restant soumis à l'action des mêmes forces extérieures, passer en l'un quelconque des états qui viennent après lui dans la série* S_1^2; *et, par l'adjonction de certaines liaisons convenablement choisies, on peut s'arranger de telle sorte que sa force vive, nulle dans le premier état, soit encore nulle dans le second.* C'est là une restriction fondamentale que nous supposerons toujours remplie dans la suite.

Supposons de même que l'on puisse d'une infinité de manières passer de l'état (2) à l'état (1), chacun de ces modes de passage étant constitué par une série linéaire S_2^1 d'états du système, vérifiant des restrictions analogues à celles qui ont été imposées aux séries S_1^2.

Les états par lesquels passe le système, soit lorsqu'il va de l'état (1) à l'état (2), soit lorsqu'il va de l'état (2) à l'état (1), ne sont pas en général des états d'équilibre pour ce système soumis aux forces extérieures qui agissent réellement sur lui lorsqu'il passe par chacun de ces états. Mais nous admettrons que, pour chacun de ces états, on puisse imaginer des forces extérieures et des liaisons telles que ces états deviennent pour le système des états d'équilibre. Il sera possible alors de supposer qu'il existe des modifications réversibles conduisant de l'un quelconque de ces états à l'un quelconque des autres.

Pour simplifier les démonstrations qui suivent, nous supposerons que, dans chacune des séries S_1^2 et dans chacune des séries S_2^1, le système ne passe jamais plus d'une fois par un même état. Nous pourrions aisément montrer plus tard que les résultats obtenus ne dépendent pas de cette hypothèse simplificatrice.

Nous supposerons ensuite que, étant donnée une série S_1^2 quelconque et une série S_2^1 quelconque, on puisse établir une correspondance univoque des états qui composent l'une des séries avec les états qui composent l'autre série, cette correspondance vérifiant les conditions suivantes :

1° A deux états infiniment voisins de la série S_1^2 correspondent deux états infiniment voisins de la série S_2^1.

2° Si, dans la série S_1^2, l'état A précède l'état B, dans la série S_2^1, l'état A′ qui correspond à A suit l'état B′ qui correspond à B.

3° Deux états correspondants étant donnés, on peut passer de l'un à l'autre par une modification adiabatique réversible.

Telles sont les restrictions fort nombreuses que nous supposerons réalisées par les modifications que nous étudierons. Ce n'est qu'après s'être assuré qu'elles sont remplies dans un cas particulier que nous aurons le droit d'appliquer à ce cas les théorèmes que nous allons démontrer. A ceux que leur grand nombre effrayerait, nous dirons que ce grand nombre des restrictions aux-

quelles sont soumis les théorèmes de la Thermodynamique rend d'autant plus nécessaire l'énoncé précis de ces restrictions, car chacune de ces restrictions se transforme en une source d'erreurs lorsqu'on la dissimule, comme on le fait ordinairement, sous le voile d'une fausse évidence.

Soient A et B deux états infiniment voisins de la série S_1^2. Lorsque le système passe de l'état A à l'état B, il dégage une quantité de chaleur dQ. Sa demi-force vive croît de $d\sum\frac{mv^2}{2}$. Soit $\mathfrak{T}$ la température du système dans l'état A. Formons le quotient

$$\frac{1}{F(\mathfrak{T})}\left(dQ + A\,d\sum\frac{mv^2}{2}\right),$$

et désignons par

$$(8)\qquad J_1^2 = \int_{(1)}^{(2)}\frac{1}{F(\mathfrak{T})}\left(dQ + A\,d\sum\frac{mv^2}{2}\right)$$

la somme des quotients analogues pour tous les éléments de la série S_1^2.

Soient de même A′ et B′ deux états infiniment voisins de la série S_2^1. Lorsque le système passe de l'état B′ à l'état A′, il dégage une quantité de chaleur dQ. Sa force vive croît de $d\sum\frac{mv'^2}{2}$. Soit $\mathfrak{T}'$ la température du système à l'état A′. Formons le quotient

$$\frac{1}{F(\mathfrak{T}')}\left(dQ' + A\,d\sum\frac{mv'^2}{2}\right),$$

et désignons par

$$(8\ bis)\qquad J_2^1 = \int_{(2)}^{(1)}\frac{1}{F(\mathfrak{T}')}\left(dQ' + A\,d\sum\frac{mv'^2}{2}\right)$$

la somme des quotients analogues pour tous les éléments de la série S_2^1.

Nous allons démontrer que l'on a toujours

$$(9)\qquad J_1^2 + J_2^1 > 0.$$

Comme on peut toujours supposer que les deux éléments AB, A′B′ sont deux éléments correspondants des séries S_1^2 et S_2^1, il suffira de démontrer que, pour deux tels éléments correspondants,

on a

$$(10)\qquad \frac{dQ - A\,d\sum\frac{mv^2}{2}}{F(\mathfrak{T})} + \frac{dQ' + A\,d\sum\frac{mv'^2}{2}}{F(\mathfrak{T}')} > 0.$$

C'est ce que nous ferons bien aisément de la manière suivante.

On peut, nous l'avons supposé, en laissant agir sur le système les forces extérieures qui le sollicitent durant la transformation AB, mais en introduisant au besoin certaines liaisons, faire que le système partant sans force vive de l'état A arrive sans force vive à l'état B. Nous désignerons par $A_1 B_1$ cette nouvelle modification. Dans la modification AB et dans la modification $A_1 B_1$ les forces extérieures effectuent le même travail et l'énergie interne subit la même variation. Si donc on désigne par dQ_1 la quantité de chaleur dégagée par le système durant la modification $A_1 B_1$, on aura

$$(11)\qquad dQ_1 = dQ - A\,d\sum\frac{mv^2}{2}.$$

De même, on peut faire passer le système de l'état B′ à l'état A′ en laissant sa force vive égale à 0 dans chacun de ces deux états, en conservant les forces extérieures qui agissaient sur lui dans la transformation B′A′, mais en introduisant certaines liaisons. Si nous désignons cette nouvelle modification par $B'_1 A'_1$ et si nous représentons par dQ'_1 la quantité de chaleur dégagée par le système durant la modification $B'_1 A'_1$, nous aurons

$$(11\ bis)\qquad dQ'_1 = dQ' + A\,d\sum\frac{mv'^2}{2}.$$

Moyennant les égalités (11) et (11 *bis*), l'inégalité à démontrer (10) devient

$$(12)\qquad \frac{dQ_1}{F(\mathfrak{T})} + \frac{dQ'_1}{F(\mathfrak{T}')} > 0.$$

De l'état A à l'état A′ on peut, d'après ce que nous avons supposé, passer par une série adiabatique réversible, que nous désignerons par AA′. De même de l'état B à l'état B′ on peut passer par une série adiabatique réversible que nous désignerons par BB′.

Cela étant, nous observerons qu'il existe ou bien en la série BB′ un état B_2 infiniment voisin de B dans lequel le système a la même

température $\mathfrak{T}$ qu'en l'état A, ou bien en la série AA′ un état A_2 infiniment voisin de A, en lequel le système a la même température $(\mathfrak{T} + d\mathfrak{T})$ qu'en l'état B. Pour fixer les idées, nous supposerons que ce soit le premier cas qui se présente.

De même il existe ou bien en la série AA′ un état A'_2 infiniment voisin de l'état A′, dans lequel le système a la même température $(\mathfrak{T}' + d\mathfrak{T}')$ qu'en l'état B′, ou bien en la série BB′ un état B'_2 infiniment voisin de l'état B′ en lequel le système a la même température $\mathfrak{T}'$ qu'en l'état A′. Pour fixer les idées, nous supposerons que ce soit le premier cas qui se présente.

Ici se présente une nouvelle hypothèse admise implicitement dans tous les traités de Thermodynamique et qui, cependant, demanderait à être vérifiée dans chaque cas particulier. Cette hypothèse peut s'énoncer de la manière suivante.

Laissant le système soumis à l'action des forces extérieures qui le sollicitent durant la transformation AB ou A_1B_1, il est possible de trouver des liaisons, telles qu'elles obligent ce système, partant sans force vive de l'état A à arriver également sans force vive à l'état B_2 par une transformation *isothermique* infiniment petite A_1B_2 accomplie à la température $\mathfrak{T}$; puis de trouver d'autres liaisons telles que le système, partant sans force vive initiale de l'état B_2, arrive également sans force vive à l'état B par une transformation *adiabatique* infiniment petite B_2B_1.

Si une semblable hypothèse est vérifiée, il résulte de la remarque que nous avons faite au n° 1 à la suite du premier principe de la Thermodynamique, que l'ensemble des deux modifications infiniment petites A_1B_2 et B_2B_1 dégage la même quantité de chaleur que la modification infiniment petite A_1B_1; et, comme la modification B_2B_1 est adiabatique, que les deux modifications A_1B_1 et A_1B_2 donnent lieu au même dégagement de chaleur dQ_1.

De même, si une hypothèse analogue est vérifiée pour les états B′, A′ et A'_2, la modification $B'_1A'_1$ donnera lieu au même dégagement de chaleur dQ'_1 qu'une modification isothermique $B'_1A'_2$, effectuée à la température $(\mathfrak{T}' + d\mathfrak{T}')$, et amenant le système pris sans force vive initiale à l'état B′, en l'état A'_2 sans force vive finale.

L'état B_2 étant pris en la modification adiabatique réversible BB′, la modification B_2B' est elle-même adiabatique et réversible. Par

conséquent, on peut d'une infinité de manières prendre le système sans force vive en l'état B_2 et le faire parvenir en l'état B' sans force vive par une modification adiabatique; désignons par $B_2B'_1$ une semblable modification.

De même, désignons par A'_2A_1 une des modifications adiabatiques par lesquelles on peut prendre le système sans force vive en l'état A'_2 et l'amener sans force vive en l'état A.

La suite des quatre modifications A_1B_2, $B_2B'_1$, $B'_1A'_2$, A'_2A_1 constitue un cycle de Carnot décrit par le système. Si alors nous appliquons à ce cycle l'inégalité (7), vraie pour tous les cycles de Carnot, nous aurons

$$\frac{dQ_1}{F(\mathfrak{T})} + \frac{dQ'_1}{F(\mathfrak{T}' - d\mathfrak{T}')} > 0$$

ou simplement

$$\frac{dQ_1}{F(\mathfrak{T})} + \frac{dQ'_1}{F(\mathfrak{T}')} > 0.$$

Cette inégalité est précisément l'inégalité (12) qu'il s'agissait de démontrer.

Nous avons vu que l'inégalité (12) est équivalente à l'inégalité (10), et que celle-ci entraîne l'inégalité (9). Nous aurons donc, en vertu des égalités (8) et (8 *bis*),

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{(1)}^{(2)} \frac{1}{F(\mathfrak{T})}\left(dQ - A\,d\sum\frac{mc^2}{2}\right) \\ &+ \int_{(2)}^{(1)} \frac{1}{F(\mathfrak{T}')}\left(dQ' + A\,d\sum\frac{mc'^2}{2}\right) > 0. \end{aligned}\right.$$

Transformons légèrement cette inégalité.

Le symbole

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{1}{F(\mathfrak{T}')}\left(dQ' + A\,d\sum\frac{mc'^2}{2}\right),$$

pour une transformation telle que S'_2 qui part de l'état (2) pour aboutir à l'état (1), n'aurait pour nous jusqu'ici aucun sens. Convenons de lui attribuer le même sens qu'à

$$\int_{(2)}^{(1)} \frac{1}{F(\mathfrak{T}')}\left(dQ' + A\,d\sum\frac{mc'^2}{2}\right).$$

L'inégalité (13) deviendra

$$(13\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{(1)}^{(2)} \frac{1}{F(\mathfrak{T})}\left(dQ + A\,d\sum\frac{mv^2}{2}\right)\\ &> \int_{(1)}^{(2)} \frac{1}{F(\mathfrak{T}')}\left(dQ' + A\,d\sum\frac{mv'^2}{2}\right),\end{aligned}\right.$$

et pourra s'énoncer de la manière suivante :

La somme

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{1}{F(\mathfrak{T})}\left(dQ + A\,d\sum\frac{mv^2}{2}\right)$$

est plus grande pour toute transformation par laquelle le système passe de l'état (1) *à l'état* (2) *que pour toute transformation par laquelle le système passe de l'état* (2) *à l'état* (1).

Supposons maintenant que de l'état (1) à l'état (2) il existe une transformation réversible Σ, limite commune d'une infinité de transformations S_1^2 et d'une infinité de transformations S_2^1. Il nous sera bien facile alors de démontrer la proposition suivante, qui est la proposition fondamentale de cette partie de la Thermodynamique :

Il existe une quantité F(1, 2) *dépendant uniquement de l'état du système en* (1) *et de l'état du système en* (2), *telle que, pour toute transformation par laquelle le système passe de* (1) *en* (2), *on ait*

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{1}{F(\mathfrak{T})}\left(dQ + A\,d\sum\frac{mv^2}{2}\right) - F(1, 2) > 0,$$

et que pour toute transformation par laquelle le système passe de (2) *en* (1) *on ait*

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{1}{F(\mathfrak{T})}\left(dQ + A\,d\sum\frac{mv^2}{2}\right) - F(1, 2) < 0.$$

Cette quantité F(1, 2) *est la valeur de l'intégrale*

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{dQ}{F(\mathfrak{T})},$$

pour une quelconque des transformations réversibles qui relient les états (1) *et* (2).

Par des considérations trop faciles pour qu'il soit nécessaire d'y insister ici, on arrivera à la proposition suivante :

Il existe une fonction S des paramètres qui définissent l'état du système, telle que, si l'on désigne par S_1 et S_2 les valeurs de S relatives aux états (1) et (2), on ait

$$F(1, 2) = S_1 - S_2.$$

C'est cette fonction S, parfaitement définie d'après ce qui précède, à une constante additive près, que M. Clausius a proposé de nommer l'*entropie* du système. Cette dénomination est aujourd'hui adoptée par tous les physiciens. Si avec M. Clausius on donne, pour une modification quelconque qui transporte le système de l'état (1) à l'état (2), le nom de *transformation non compensée* à la quantité

$$(14) \qquad P = \int_{(1)}^{(2)} \frac{1}{F(\mathfrak{T})}\left(dQ + A\, d\sum \frac{mc^2}{2}\right) + S_2 - S_1,$$

la proposition précédente devient :

Toute modification correspond à une transformation non compensée positive.

Telle est la grande loi dont la Thermodynamique est redevable à M. Clausius. Après l'avoir ainsi mise en évidence, nous n'aurons plus qu'un mot à dire pour en déduire le théorème fondamental sur lequel reposent les travaux de M. Gibbs.

6. *Le travail non compensé, le potentiel thermodynamique et le théorème de M. Gibbs.* — La loi de M. Clausius nous donne le moyen de déterminer les états d'équilibre d'un système. Si toutes les modifications virtuelles que l'on pourrait imaginer à partir d'un état du système sont telles qu'elles entraîneraient une transformation non compensée nulle ou négative, le système est assurément en équilibre. Mais cette proposition conduit surtout à des résultats intéressants lorsqu'on l'applique à des systèmes dont la température $\mathfrak{T}$ est maintenue constante. Dans ce cas, donnons

le nom de *travail non compensé* au produit

$$\Theta = \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\mathfrak{F})\mathrm{P}. \tag{15}$$

Nous pourrons énoncer la proposition précédente sous la forme que voici :

Un système sera sûrement en équilibre dans un état déterminé si toute modification virtuelle imposée au système à partir de cet état correspond à un travail non compensé nul ou négatif.

Ce théorème est analogue, par son énoncé, au principe des vitesses virtuelles, tel que Gauss l'a formulé ; cette analogie, loin d'être un simple accident, tient à la nature même des choses, car il serait facile de prouver que, si l'on introduit dans la Thermodynamique les hypothèses restrictives auxquelles la Mécanique assujettit tous les systèmes qu'elle étudie, cette proposition redonne l'énoncé même du principe des vitesses virtuelles ; malgré cette importante analogie, la proposition précédente serait peut-être de peu d'usage si le travail non compensé effectué dans une modification isothermique n'était susceptible d'une expression remarquable que nous allons indiquer.

Lorsque la température est maintenue constante, les égalités (14) et (15) nous donnent

$$\Theta = \mathrm{E}\int_1^2 \left(dQ + \mathrm{A}\,d\sum \frac{mv^2}{2}\right) + \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\mathfrak{F})(\mathrm{S}_2 - \mathrm{S}_1).$$

Mais d'autre part, si nous désignons par $\mathfrak{T}$ le travail effectué par les forces extérieures dans la modification considérée, l'égalité (1) nous donne

$$\mathrm{E}\int_1^2 \left(dQ + \mathrm{A}\,d\sum \frac{mv^2}{2}\right) = \mathrm{E}(\mathrm{U}_1 - \mathrm{U}_2) + \mathfrak{T}.$$

On a donc, en résumé, cette expression

$$\Theta = \mathrm{E}[\mathrm{U}_1 - \mathrm{F}(\mathfrak{F})\mathrm{S}_1] - \mathrm{E}[\mathrm{U}_2 - \mathrm{F}(\mathfrak{F})\mathrm{S}_2] + \mathfrak{T}. \tag{16}$$

Cette expression est surtout remarquable dans le cas où les forces extérieures admettent, d'elles-mêmes ou en vertu des liaisons imposées au système, ce qu'on nomme en Mécanique un *po-*

tentiel. Dans ce cas, si l'on désigne par W ce potentiel, et par W_1 et W_2 ses valeurs dans l'état (1) et dans l'état (2), on a

$$\mathfrak{T} = W_1 - W_2. \tag{17}$$

Dès lors, si l'on pose

$$\Phi = E[U - F(\mathfrak{J})S] + W, \tag{18}$$

l'égalité (16) deviendra

$$\Theta = \Phi_1 - \Phi_2. \tag{19}$$

Le travail non compensé sera déterminé au moyen de la quantité Φ comme le travail externe $\mathfrak{T}$ est déterminé au moyen du potentiel W. La quantité Φ peut donc être à bon droit nommée le *potentiel thermodynamique.*

Cette dénomination sera mieux justifiée encore si l'on observe la forme que prend alors la règle indiquée tout à l'heure pour la détermination des états d'équilibre stable. Cette règle pourra en effet s'énoncer ainsi :

Un état d'un système sera un état d'équilibre stable s'il correspond à un minimum du potentiel thermodynamique.

Tel est le théorème fondamental découvert par M. Gibbs. Il est en Thermodynamique l'analogue de la proposition sur la stabilité de l'équilibre découverte par Lagrange et démontrée par Lejeune-Dirichlet. C'est assez dire qu'il constitue l'origine de l'un des plus grands progrès qui aient été faits en cette science, soit pour éclairer ses principes, soit pour enrichir le nombre de ses applications.

(*A suivre.*)

SUR LE MAXIMUM DU PRODUIT DE PLUSIEURS FACTEURS POSITIFS DONT LA SOMME EST CONSTANTE;

PAR M. G. DARBOUX.

La proposition qui fait le sujet de cet article appartient aux éléments de l'Algèbre. La démonstration qu'on en donne habituellement est sujette à des objections, que l'on peut sans doute négliger dans un enseignement tout à fait élémentaire; la suivante, qui est à l'abri de ces objections, m'a paru mériter d'être publiée.

Admettons la proposition pour le cas de deux facteurs et considérons un produit de quatre facteurs

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4.$$

Si ces facteurs ne sont pas tous égaux, on pourra supposer a_1 différent de a_2, et l'on aura

$$a_1 a_2 < \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2,$$

$$a_3 a_4 \leq \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2,$$

et, par conséquent,

$$a_1 a_2 a_3 a_4 < \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \, \frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2.$$

Le produit de deux facteurs

$$(a_1 + a_2)(a_3 + a_4)$$

ne peut être diminué si l'on remplace chacun des facteurs par leur demi-somme; on aura donc

$$(a_1 + a_2)(a_3 + a_4) \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2}\right)^2$$

et, par conséquent,

$$a_1 a_2 a_3 a_4 < \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4$$

C. Q. F. D.

Considérons maintenant un produit de huit facteurs

$$P = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8;$$

si ces facteurs ne sont pas tous égaux, le résultat que nous venons d'établir relativement au produit de quatre nous donnera, en supposant a_1 différent de a_2,

$$a_1 a_2 a_3 a_4 < \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4,$$

$$a_5 a_6 a_7 a_8 < \left(\frac{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{4}\right)^4,$$

et, par conséquent,

$$P < \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \cdot \frac{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{4}\right)^4;$$

si, dans le produit de deux facteurs

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \cdot \frac{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{4},$$

on remplace chacun des deux facteurs par leur moyenne arithmétique

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_8}{8},$$

on ne pourra qu'augmenter le produit et l'on aura, par conséquent,

$$P < \left(\frac{a_1 + \ldots + a_8}{8}\right)^8.$$

En poursuivant la même méthode de démonstration, on démontrera évidemment le théorème pour un nombre de facteurs égal à une puissance quelconque de 2. Il reste à l'établir pour les nombres qui ne sont pas des puissances de 2. C'est ce que l'on fait très simplement de la manière suivante.

Soit, par exemple,

$$Q = a_1 a_2 \ldots a_{11}$$

un produit de onze facteurs, et soit m la moyenne arithmétique de ces onze facteurs. Le produit

$$Q m^{16-11} = Q m^5$$

sera un produit de seize facteurs dont cinq seront égaux à m; et d'ailleurs la moyenne arithmétique de ces seize facteurs sera encore égale à m. On aura donc, la proposition étant démontrée pour

seize facteurs,

$$Q m^5 < m^{16}$$

ou

$$Q < m^{11}$$

C. Q. F. D.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Burnside (W.-S.) and Panton (A.-W.). — *The Theory of Equations, with an Introduction to the Theory of binary algebraic forms.* 2e édit. In-8°, 458 p. Dublin (London, Longmans). 12 sh., 6 d.

Gegenbauer (L.). — *Ueber das Symbol* $\left(\frac{m}{n}\right)$. Gr. in-8°, 17 p. Vienne, Gerold's Sohn. 40 pf.

Gegenbauer (L.) — *Ueber ein Theorem des Herrn Charles Hermite.* Gr. in-8°, 6 p. Ibid. 20 pf.

Greenhill (A.-G.). — *Differential and Integral Calculus, with Applications.* In-8°, 276 p. London, Macmillan, 7 sh., 6 d.

Lehmann (Karl). — *Ueber die Wirkungsweise einer von zwei concentrischen Kugelflächen begrentzen Glaslinse.* Inaugural Dissertation, 38 p. Halle.

Liman (Oskar). — *Bewegung zweier materieller Punkte unter Zugrundelegung des Riemann'schen elektrodynamischen Gesetzes.* Inaugural Dissertation, 39 p. Halle.

Lipschitz (R.). — *Untersuchungen über die Summen von Quadraten.* Gr. in-8°, 147 p. Bonn, Cohen und Sohn, 5 M.

Rückoldt (Karl). — *Ueber das logarithmische Potential einer halbkreisförmigen Platte und über eine damit in Zusammenhang stehende conforme Abbildung.* Inaugural-Dissertation, 36 p. Jena.

Betti (E.). — *Lehrbuch der Potentia-lTheorie und ihrer Anwendung auf Electrostatik und Magnetismus.* Traduit en allemand par *W.-F. Meyer.* Gr. in-8°, 434 p. Stuttgart, Kohlhammer, 12 M.

Biermann (O.). — *Zur Theorie der Fuchs'chen Functionen.* Gr. in-8°, 16 p. Vienne, Gerold's Sohn, 30 pf.

ESCHERICH (G.-V.). — *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.* Gr. in-4°, 22 p. Vienne, Gerold's Sohn, 1 M. 20 pf.

GEGENBAUER (L.). — *Arithmetische Sätze.* Gr. in-8°, 24 p. Ibid. 50 pf.

GEGENBAUER (L.). — *Ueber das Additionstheorem der Functionen* $Y^m(x)$. Gr. in-8°, 6 p. Ibid., 20 pf.

GEGENBAUER (L.). — *Ueber die mittlere Anzahl der Klassen quadratischer Formen von negativer Determinante.* Gr. in-8°, 10 p. Ibid., 25 pf.

LIE (S.). — *Ueber gewöhnliche lineare Differentialgleichungen.* Gr. in-8°, 4 p. Christiania, Dybwad, 25 pf.

BOBEK (K.). — *Ueber das Maximalgeschlecht von algebraischen Raumcurven gegebener Ordnung.* Gr. in-8°, 15 p. Vienne Gerold's Sohn, 30 pf.

GEGENBAUER (L.). — *Einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie.* Gr. in-8°, 17 p. Ibid., 40 pf.

HAHN (J.). — *Untersuchung der Kegelschnittnetze deren Jacobi'sche Form oder Hermite'sche Form identisch verschwindet.* In-4°, 14 p. Leipsig, Fock, 80 pf.

IGEL (B.). — *Ueber einige Anwendungen des Principes der Apolarität.* Gr. in-8°, 42 p., Vienne, Gerold's Sohn, 60 pf.

KILLING (W.). — *Zur Theorie der Lie'schen Transformations-Gruppen.* In-4°, 17 p. Braunsberg, Huye's Buch., 1 M., 60 pf.

KRIES (J.). — *Die Principien der Warscheinlichkeitsrechnung.* Gr. in-8°, 298 p. Freiburg, Mohr. 6 M.

LAPLACE (P.-S. DE). — *Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeiten.* Traduit en allemand par *N. Schwaiger.* Gr. in-8°, 198 p. Leipsig, Duncker und Humblot, 4 M., 40 pf.

SCHAFHEITLEIN (PAUL). — *Ueber eine gewisse Klasse linearer Differentialgleichungen.* Inaugural-Dissertation, 43 p. In-4°, Halle.

SCHULZE (EDM.). — *Ueber die Parallelfläche des elliptischen Paraboloïds.* Inaugural-Dissertation, 39 p. In-8°, Halle.

WEIERSTRASS (K.). — *Abhandlungen aus der Functionenlehre.* Gr. in-8°, 262 p. Berlin, Springer, 12 M.

DESPEYROUS. — *Cours de Mécanique*, avec des Notes de M. *G. Darboux.* Paris, Hermann, 2 vol. in-8°.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

C. POSSÉ, professeur à l'Université de Saint-Pétersbourg. — SUR QUELQUES APPLICATIONS DES FRACTIONS CONTINUES ALGÉBRIQUES. 1 vol in-8°, 175 p. Paris, Hermann, 1886.

On sait que les polynômes de Legendre ou de Jacobi peuvent être définis en partant de certains développements en fractions continues algébriques. C'est à l'extension de cette idée et à quelques applications des polynômes auxquels cette extension conduit que sont consacrés les cinq Chapitres dont se compose cet intéressant Travail. Plusieurs des sujets abordés par l'auteur ont été déjà étudiés par MM. Tchébichef, Markoff et Stieltjes, dans diverses publications dont plusieurs, malheureusement écrites en russe, ne sont pas à la portée de tous les lecteurs français. On lira donc avec plaisir ces quelques pages où M. Possé a réuni, dans une analyse simple, élégante et générale, le résultat de ses propres recherches à celles de ses prédécesseurs.

Le premier Chapitre s'occupe des réduites de la fraction continue qui provient du développement de la fonction $F(z)$ définie par l'intégrale

$$F(z) = \int_a^b \frac{f(y)\,dy}{z-y},$$

où l'on suppose toutes les quantités réelles, $a < b$, et $f(y)$ positif. Dans ces conditions, le développement est de la forme

$$F(z) = \cfrac{c_1}{q_1 - \cfrac{c_2}{q_2 - \cfrac{c_3}{q_3 - \cfrac{c_4}{q_4 \ldots}}}},$$

où les c sont des constantes que l'on peut prendre arbitrairement, et les q des polynômes du premier degré en z; la $n^{\text{ième}}$ réduite étant écrite sous la forme $\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}$, le polynôme $\varphi_n(z)$ est du degré n. Les polynômes $\varphi_n(z)$ sont la clef de toutes les questions traitées dans le Livre.

Signalons tout d'abord la formule

$$(1) \qquad \frac{c_1 c_2 \ldots c_{n+1}}{a_{n+1}} = \int_a^b \varphi_n(y) f(y)\, dy,$$

où a_{n+1} est le coefficient de z dans q_{n+1}, et les suivantes

$$\psi_n(z) = \int_a^b \frac{\varphi_n(z) - \varphi_n(y)}{z - y} f(y)\, dy,$$

$$R_n(z) = \varphi_n(z) F(z) - \varphi_n(z) = \int_a^b \frac{\varphi_n(y)}{z - y} f(y)\, dy,$$

qui subordonnent aux polynômes φ_n les polynômes ψ_n et la différence $R_n(z)$.

Les polynômes $\varphi_n(z)$ sont caractérisés par une propriété dont l'auteur tire un grand parti dans la suite. Celui d'entre eux qui est du degré n, φ_n, par conséquent, vérifie les n équations

$$\int_a^b f(y) \varphi_n(y)\, dy = 0,$$

$$\int_a^b f(y) \varphi_n(y) y\, dy = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int_a^b f(y) \varphi_n(y) y^{n-1}\, dy = 0,$$

qui peuvent être condensées en une seule

$$(2) \qquad \int_a^b f(y) \varphi_n(y) \theta_{n-1}(y)\, dy = 0,$$

où $\theta_{n-1}(y)$ est un polynôme *quelconque* du degré $(n-1)$. On en conclut en particulier

$$\int_a^b f(y) \varphi_m(y) \varphi_n(y)\, dy = 0,$$

où $m \gtrless n$, et qui peut être rapprochée de l'équation (1).

La formule (2) conduit fort simplement à cette proposition que les racines de $\varphi_n(z)$ sont toutes réelles et comprises entre a et b.

Ces racines interviennent dans un grand nombre de questions.

Tout d'abord, elles permettent de donner la valeur de l'intégrale

$$\int_a^b f(y)\Phi(y)\,dy,$$

où l'on suppose seulement que $\Phi(y)$ est un polynôme entier. Si le degré de ce polynôme est au plus égal à $2n-1$, on trouve

$$(3)\qquad \int_a^b f(y)\Phi(y)\,dy = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\psi_n(z_i)}{\varphi'_n(z_i)}\Phi(z_i),$$

où les z_i sont les racines de $\varphi_n(z)$.

A l'égard des quantités $\frac{\psi_n(z_i)}{\varphi'_n(z_i)}$ qui figurent dans cette formule, on prouve qu'elles sont toutes positives et par suite, par une application du théorème de Rolle, toutes les racines de $\psi_n(z)$ sont réelles et séparées par celles de $\varphi_n(z)$.

Nous passons sur quelques généralisations indiquées par l'auteur pour ces divers théorèmes. Les intégrales définies

$$\int_a^b \frac{(y-a)f(y)\,dy}{z-y},\quad \int_a^b \frac{(b-y)f(y)\,dy}{z-y},\quad \int_a^b \frac{(y-a)(b-y)f(y)\,dy}{z-y}$$

donnent lieu à des développements étroitement liés avec le précédent. En appelant U_n, V_n, W_n les polynômes qui figurent en dénominateur dans les réduites d'ordre n de ces développements, on trouve d'abord que ces polynômes vérifient les équations

$$\int_a^b (y-a)f(y)U_n(y)\theta_{n-1}(y)\,dy = 0,$$

$$\int_a^b (b-y)f(y)V_n(y)\theta_{n-1}(y)\,dy = 0,$$

$$\int_a^b (y-a)(b-y)f(y)W_n(y)\theta_{n-1}(y)\,dy = 0,$$

analogues à (2). Il en résulte, pour les racines des polynômes U, V, W des propositions analogues à celles qui se sont présentées à propos des racines des polynômes φ. L'auteur termine ce Chapitre en donnant les expressions des polynômes U_n, V_n, W_n à l'aide des polynômes φ.

Dans le second Chapitre, M. Possé traite d'abord la question suivante :

« Trouver le polynôme $\Phi(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots$ du degré n, tel que l'intégrale

$$\int_a^b \Phi^2(x) f(x)\, dx$$

soit minimum ».

Si l'on dispose des constantes $c_1, c_2, \ldots$ de telle sorte que le coefficient de x^n dans $\varphi_n(x)$ soit l'unité, on trouve $\Phi(x) = \varphi_n(x)$, et alors

$$\int_a^b \varphi_n^2(x) f(x)\, dx = c_1 c_2 \ldots c_{n+1},$$

d'après la formule (1).

De même, si l'on veut que l'intégrale

$$\int_a^b f(x)[\Phi_n(x) - \Omega(x)]^2\, dx$$

soit un minimum, où Φ_n est du degré n et $\Omega(x)$ une fonction donnée, $f(x)$ étant positive entre a et b, on trouve

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\int_a^b f(x)\Omega(x)\varphi_k(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\varphi_k^2(x)\, dx}\varphi_k(x),$$

ce qui n'est autre que la formule d'interpolation donnée par M. Tchébichef (*Journal de Liouville*, 2e série, t. III), M. Possé cherche ensuite l'expression précise du terme complémentaire qui représente l'erreur commise en remplaçant $\Omega(x)$ par $\Phi_n(x)$; il suppose seulement dans cette recherche que $\Omega(x)$ est le produit de deux fonctions $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$, développables chacune en série de la forme

$$A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \ldots + A_n\varphi_n(x) + \ldots.$$

L'analyse de l'auteur a déjà été publiée par lui ici même.

En supposant que l'on adopte pour la fonction $f(y)$ l'expression

$$f(y) = (1+y)^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1},$$

et que l'on prenne $a = -1$, $b = +1$, les polynômes $\varphi_n(z)$ ne sont autres que les polynômes $T_n(z)$ de Jacobi (*Journal de Crelle*, t. 56).

L'équation qui peut servir de définition aux polynômes T, à savoir

$$\int_{-1}^{+1} (1+z)^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} T_n(z) \theta_{n-1}(z)\, dz = 0,$$

fournit des relations de récurrence entre les fonctions T qui correspondent aux valeurs (α, β), $(\alpha+1, \beta+1)$ des constantes α, β et permet en outre de démontrer fort simplement que le polynôme T_n vérifie l'équation du second ordre linéaire

$$(4) \quad (1-z^2)\frac{dy}{dz} + [\alpha - \beta - (\alpha+\beta)z]\frac{dy}{dz} + n(\alpha+\beta+n-1)y = 0;$$

M. Markoff était parvenu au même résultat par la même analyse.

M. Possé démontre encore la formule

$$(5) \quad T_n(z) = \frac{(-1)^n(1+z)^{1-\alpha}(1-z)^{1-\beta}}{(\alpha+\beta+n-1)\ldots(\alpha+\beta+2n-2)} \frac{d^n[(1+z)^{\alpha+n-1}(1-z)^{\beta+n-1}]}{dz^n}$$

et en déduit la valeur de l'intégrale

$$I_n = \int_{-1}^{+1} (1+z)^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} T_n^2\, dz,$$

intégrale qui intervient dans le développement en fraction continue de

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1+y)^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{z-y}\, dy,$$

ainsi que cela résulte de l'équation (1). On trouve ainsi

$$I_n = \frac{2^{\alpha+\beta+2n-1}\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{(\alpha+\beta+n-1)\ldots(\alpha+\beta+2n-2)(\alpha+\beta+2n)};$$

les quotients incomplets q_n sont donnés par la formule

$$q_n = z - \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-2)}{(\alpha+\beta+2n-2)(\alpha+\beta+2n-4)}.$$

L'expression (5) de $T_n(z)$ conduit à la formule

$$\frac{(1-h+\sqrt{1-2hz+h^2})^{1-\alpha}(1-h+\sqrt{1-2hz+h^2})^{1-\beta}}{\sqrt{1-hz+h^2}}$$
$$=\sum h^n \frac{2^{2-\alpha-\beta}(\alpha+\beta+n-1)\ldots(\alpha+\beta+2n-2)}{2^n.1.2\ldots n} T_n(z),$$

qui fait dériver la fonction $T_n(z)$ d'une *fonction génératrice*.

Le Chapitre III se termine par une étude du discriminant et de certaines fonctions symétriques de l'équation $T_0(z)=0$ en fonction de n et des paramètres α, β. L'auteur s'est rencontré, sur ce point, avec M. Stieltjes (*Comptes rendus*, 1885).

Le calcul approximatif des intégrales fait l'objet du quatrième Chapitre. La formule (3) en est la base. Après l'examen de quelques cas particuliers, M. Possé se propose de trouver les limites de l'erreur commise. Son point de départ est la formule de M. Hermite qui fournit la parabole définie par la condition d'avoir, avec une courbe donnée, un contact d'ordre $\alpha-1$ en un point a_1 d'ordre $\beta-1$, en un point a_2, etc. Il parvient ainsi à la formule éminemment remarquable

$$\int_a^b \Omega(z)f(z)\,dz=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\psi_n(z_i)}{\varphi'_n(z_i)}\Omega(z_i)+\frac{\Omega^{(2n)}(\zeta)}{1.2\ldots(2n)}\int_a^b \varphi_n^2(z)f(z)\,dz;$$

dans cette formule, les z_i sont les racines de l'équation $\varphi_n(z)=0$; $\Omega^{(2n)}(\zeta)$ représente la valeur que prend la dérivée d'ordre $2n$ de $\Omega(z)$ pour une valeur de z comprise entre a et b.

L'auteur parvient encore à d'autres formules analogues par l'emploi des fonctions U_n, V_n, W_n, et rattache en outre aux fonctions φ_n les formules nouvelles ainsi obtenues.

Dans le Chapitre V, M. Possé s'occupe d'une question mise en avant par M. Tchébichef, où il s'agit de trouver le maximum ou le minimum de l'intégrale

$$\int_a^x f(y)\,dy,$$

en supposant x donné et compris entre les nombres donnés a et b, et supposant aussi que l'on connaît les $(\mu+1)$ intégrales

$$\alpha_0=\int_a^b f(y)\,dy,\qquad \alpha_1=\int_a^b f(y)y\,dy,\qquad \ldots,\qquad \alpha_\mu=\int_a^b f(y)y^\mu\,dy.$$

L'auteur généralise tout d'abord la question en se proposant le maximum ou le minimum de l'intégrale

$$\int_a^x \Omega(y) f(y)\, dy,$$

où $\Omega(y)$ est donné.

La fonction $f(y)$ peut être continue ou discontinue, et ce sont précisément les cas compris dans cette dernière hypothèse qui fournissent la solution. La fonction $f(y)$ est nulle pour toutes les valeurs de y comprises entre a et b, sauf pour un certain nombre fini des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour lesquelles $f(y)$ devient infini, mais de sorte que l'intégrale

$$\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(y)\, dy$$

ait une limite pour ε nul. La distribution de ces points x_i est précisément fournie par les fonctions $\varphi_n(x)$. Nous renvoyons, pour les détails, à l'intéressant travail de M. Possé. M. Markoff avait déjà résolu ce problème par une méthode un peu moins simple dans un Mémoire écrit en russe, et paru en 1884 à Saint-Pétersbourg.

G. Koenigs.

MÉLANGES.

ÉTUDE SUR LES TRAVAUX THERMODYNAMIQUES DE M. J. WILLARD GIBBS;

(SUITE).

Par M. P. DUHEM.

DEUXIÈME PARTIE.

HISTORIQUE ET PRINCIPALES APPLICATIONS DE LA THÉORIE DE M. GIBBS.

1. *Historique de la théorie de M. Gibbs.* — Nous avons vu comment les postulata fondamentaux de la Thermodynamique conduisaient aux idées de M. Clausius sur le principe de Carnot,

les plus importantes peut-être qui aient été introduites dans la Philosophie naturelle pendant la seconde moitié de notre siècle. Nous ne retracerons pas ici l'histoire des recherches qui ont conduit les physiciens des travaux de Sadi Carnot à ces idées. M. Clausius lui-même a pris la peine de marquer les principaux points de cette histoire (1), et il serait téméraire de vouloir rivaliser avec lui de compétence et d'impartialité. Nous nous bornerons donc à suivre la voie qui a conduit des idées de M. Clausius à la belle et féconde méthode de M. Gibbs.

C'est aux études de Mécanique chimique que la Thermodynamique doit de s'être engagée dans cette voie. La découverte des phénomènes de dissociation par H. Sainte-Claire Deville, en provoquant dans le domaine de la Mécanique chimique de nombreux et importants travaux, a révélé l'existence d'états d'équilibre voisins de ceux dont la Physique trace les lois en étudiant la vaporisation ou la fusion, mais rendus plus complexes par le grand nombre de substances entre lesquelles s'établit un semblable équilibre, et par le grand nombre de variables qui peuvent influer sur l'état de ces substances. Il était difficile d'appliquer à ces phénomènes complexes les méthodes synthétiques, fondées sur l'emploi exclusif des cycles fermés, dont l'usage avait conduit à de si importantes propositions dans l'étude de la vaporisation ou de la fusion.

Ces méthodes cependant n'étaient pas condamnées à l'impuissance devant le nouvel ordre de phénomènes qui venait d'être découvert; M. J. Moutier (2), à qui l'on doit les premières applications de la Thermodynamique aux phénomènes de dissociation, avait montré que les raisonnements synthétiques pouvaient, dans le domaine de la Mécanique chimique, conduire à d'importantes conséquences; appliquant le premier à des cycles isothermiques les propositions générales de M. Clausius, il avait donné une solu-

---

(1) R. Clausius, *Zur Geschichte der mechanischen Wärmetheorie* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, Bd. CXLV, p. 496; 1872). *Voir* aussi R. Clausius, *Die mechanische Wärmetheorie*. Zweite Auflage, t. I, Abschnitt XIII.

(2) J. Moutier, *Sur quelques relations entre la Physique et la Chimie* (*Encyclopédie chimique* de Fremy, *Introduction*, t. II).

tion aussi complète qu'élégante du problème des tensions de vapeur d'un même corps sous deux états différents, problème dont Regnault et M. J. Thomson avaient seulement l'un entrevu et l'autre indiqué la solution.

Mais ces applications mêmes restaient limitées à ceux des phénomènes de la Mécanique chimique que la plus étroite analogie rapprochait des phénomènes de fusion ou de vaporisation. Les physiciens se bornaient avec peine à la considération des cycles fermés, qui avait à plusieurs reprises fourni des démonstrations pleines d'élégance, mais qui, pour chaque nouvelle recherche, exigeait de la sagacité du théoricien l'invention d'un cycle approprié. Ils sentaient le besoin de substituer à cette considération des méthodes analytiques conduisant par une voie sûre et uniforme aux équations dont dépend la solution de chaque problème de Thermodynamique.

Une méthode, il est vrai, ressortait immédiatement des propositions de M. Clausius. Pour toute transformation réversible élémentaire, l'excès de la chaleur équivalente au travail des forces extérieures sur la chaleur dégagée est la différentielle totale de l'énergie interne; le quotient de la quantité de chaleur par la température absolue est, au signe près, la différentielle totale de l'entropie; par conséquent, exprimer ces deux combinaisons au moyen des variables indépendantes et écrire les conditions d'intégrabilité des expressions ainsi obtenues, c'est un moyen assuré d'obtenir les conditions d'équilibre d'un système. Dès 1854, dans le Mémoire même où il étendait le second principe de la Thermodynamique à tous les cycles fermés, M. Clausius (1) faisait usage de cette méthode. En 1858, M. G. Kirchhoff (2) en montrait la fécondité par de magnifiques applications à l'étude des changements d'état, applications au premier rang desquelles il convient de placer la découverte de la relation qui existe entre la chaleur de

---

(1) R. Clausius, *Sur une autre forme du second principe de la théorie mécanique de la chaleur* (*Théorie mécanique de la chaleur*. Trad. Folie, t. I, p. 154).

(2) G. Kirchoff, *Ueber einen Satz der mechanischen Wärmetheorie und einige Anwendungen desselben* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, Bd. CIII; 1858).

dilution d'une dissolution et la tension de la vapeur que cette dissolution émet. Enfin, en 1863, M. Clausius [1] écrivait un Mémoire spécialement destiné à montrer comment toutes les équations de la Thermodynamique pouvaient s'établir par cette méthode unique, défiant par là les efforts de ceux qui chercheraient, vingt ans plus tard, à s'emparer de cette méthode et à lui imposer leur nom.

L'exactitude analytique de cette méthode est hors de contestation. Mais, malgré les avantages que son emploi peut présenter dans certains cas, elle ne satisfait pas complètement le besoin que les physiciens ont éprouvé depuis la création de la Thermodynamique, de rapprocher celle-ci de la Mécanique de telle façon que l'on retrouvât dans les méthodes dont ces deux sciences se servent l'analogie qui existe entre les objets qu'elles étudient.

Deux siècles d'efforts, couronnés par l'œuvre de Lagrange, ont condensé la Statique tout entière dans le seul principe des vitesses virtuelles, complété, pour les systèmes qui admettent un potentiel, par le critérium de stabilité que Lagrange a énoncé et que Lejeune-Dirichlet a démontré. Quelle était la proposition qui devait en Thermodynamique remplacer le principe des vitesses virtuelles et le théorème sur la stabilité de l'équilibre? Quelle était la fonction qui devait jouer le rôle de potentiel? Tel est l'énoncé de la question que les physiciens étaient amenés à se poser.

Le premier qui ait posé nettement le problème et qui ait tenté d'en donner la solution est M. Berthelot. La règle qu'il proposa, sous le nom de principe du travail maximum, était énoncée de la manière suivante : Toute action chimique, accomplie sans l'intervention d'une énergie étrangère, tend vers la production du système qui dégage le plus de chaleur. Ce principe entraînait la conséquence suivante : de deux réactions inverses concevables dont l'une dégage de la chaleur, tandis que l'autre en absorbe, la première est seule possible.

La chaleur dégagée par une réaction qui ne met en jeu aucun travail extérieur est la diminution que subit, par l'effet de cette

---

[1] R. Clausius, *Sur diverses formes des équations fondamentales de la théorie mécanique de la chaleur, qui sont commodes dans l'application* (*Théorie mécanique de la chaleur*, Trad. Folie, Mémoire IX).

modification, l'énergie interne du système. Par conséquent, d'après la règle posée par M. Berthelot, la possibilité d'une réaction suppose que cette réaction produit une diminution d'énergie; la stabilité d'un équilibre chimique est donc assurée, si cet équilibre correspond à la plus petite valeur que puisse prendre l'énergie du système; l'énergie joue dans la Statique chimique le rôle que le potentiel joue dans la Statique proprement dite.

La règle proposée par M. Berthelot est d'une application facile: ses conséquences peuvent être immédiatement soumises au contrôle de l'expérience et, dans un nombre immense de cas, elles présentent avec elle l'accord le plus satisfaisant; mais le principe du travail maximum, si utile dans l'étude des réactions chimiques énergiques, souffre de nombreuses exceptions soit parmi les changements d'états physiques, soit parmi les phénomènes de dissolution ou de modification allotropique qui soudent la Physique à la Chimie. Aussi la plupart des chimistes ont-ils été amenés à souhaiter qu'une règle fondée sur la Thermodynamique vînt à la fois rendre compte des concordances nombreuses qui rendent si utile le principe du travail maximum et des exceptions qui empêchent de lui accorder une absolue généralité.

M. Hortsmann [1] eut le premier l'idée de chercher dans les idées de M. Clausius sur le principe de Carnot la solution du problème de la Mécanique chimique. C'est à l'entropie qu'est dévolu, selon M. Hortsmann le rôle que la Thermochimie attribue à l'énergie interne.

« Clausius, dit M. Hortsmann, a su donner à certaines idées de W. Thomson une forme mathématique, en définissant une grandeur, l'entropie, qui, dans tous les changements de la nature, va toujours en augmentant et qui, au contraire, par aucune force naturelle connue, ne peut devenir plus petite. Il peut y avoir seulement des phénomènes dans lesquels l'entropie reste constante : tels sont les mouvements stationnaires que nous attribuons aux atomes des corps de température constante.

» D'après moi, dans les phénomènes de dissociation, la cause de la limite est la même; elle se produit quand l'entropie est

---

[1] Hortsmann, *Annalen der Chemie und Pharmacie*, t. CLXX, 20 nov. 1873.

devenue aussi grande que cela est possible, avec tous les changements qui pourraient survenir. Le problème est donc résolu, si l'on sait dans quelles circonstances et de quelle manière l'entropie est modifiée dans les phénomènes dont il s'agit. »

Tel est le point de départ de la théorie de M. Hortsmann. Plus récemment, dans une Note communiquée à la *Royal Institution*, le 5 mars 1875, lord Rayleigh a émis des idées analogues; selon lord Rayleigh, ce n'est point le signe de la quantité de chaleur mise en jeu qui détermine le sens des réactions chimiques; une réaction chimique n'est possible que si elle correspond à une augmentation d'entropie.

Cette théorie ne saurait être admise sans restriction. M. Clausius a démontré, il est vrai, que l'on ne peut faire décroître l'entropie d'un système, mais cette démonstration est subordonnée à une restriction; elle ne s'applique qu'à un système qui ne peut emprunter ou céder de la chaleur, de la force vive ou du travail au milieu ambiant. Si l'on ne tenait pas compte de cette restriction, on pourrait déduire du théorème dont il s'agit des conséquences erronées; il est bien certain, par exemple, que l'entropie d'une masse d'eau diminue lorsqu'on vaporise cette eau à température constante. Toutefois, le principe énoncé par M. Hortsmann peut, lorsqu'on l'applique dans les circonstances pour lesquelles il est démontré, conduire à des conséquences conformes à l'expérience; c'est ainsi que M. Hortsmann est arrivé, en étudiant la dissociation du carbamate d'ammoniaque, à énoncer une loi importante qui s'étend à tous les phénomènes analogues de dissociation [1].

L'énergie ne peut donc, dans la Mécanique chimique, jouer le rôle de potentiel; l'entropie ne peut jouer le rôle de fonction des forces. Les physiciens ont été conduits à rechercher, parmi les autres quantités qu'étudie la Thermodynamique, une fonction qui pût servir à caractériser les équilibres.

Dans un important Mémoire dont quelques extraits parurent en

---

[1] La théorie aujourd'hui condamnée de M. Hortsmann vient d'être reprise sans modification essentielle, du moins dans ses principes, par M. Max Planck, dans un Mémoire intitulé : *Ueber das Princip der Vermehrung der Entropie* (*Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie*, t. XXX, p. 562; 1887).

1869 (¹), mais qui ne fut complètement publié qu'en 1876 (²), M. Massieu était parvenu au résultat suivant :

Tous les coefficients qui déterminent les propriétés mécaniques et physiques d'un corps, énergie interne, entropie, chaleurs spécifiques, coefficients de dilatation, de compressibilité, etc., sont connus lorsqu'on connaît une certaine fonction des paramètres qui définissent l'état du corps. M. Massieu donnait à cette fonction le nom de *fonction caractéristique*.

La fonction caractéristique change selon que l'on choisit pour déterminer l'état du corps un système de variables indépendantes ou un autre. M. Massieu a considéré en particulier deux cas : celui où l'on prend pour variables propres à déterminer l'état du corps le volume et la température, et celui où l'on prend pour variables la pression et la température.

Dans le premier cas, si l'on désigne par T la température absolue, par S l'entropie du corps, par U l'énergie interne, le corps admet pour fonction caractéristique la quantité

$$H = TS - U.$$

Dans le second cas, si l'on garde les notations précédentes, et si l'on désigne en outre par A l'équivalent calorifique du travail, par v le volume du corps, et par p la pression qu'il supporte, le corps admet pour fonction caractéristique la quantité

$$H' = TS - U - Apv.$$

M. Massieu a établi les diverses propriétés des fonctions H et H' et a montré comment toutes les équations de la Thermodynamique pouvaient s'écrire de manière à ne plus renfermer que ces fonctions et leurs dérivées partielles. Par là, il avançait et perfectionnait singulièrement l'application à la Thermodynamique de méthodes purement analytiques; il mettait en évidence de nouvelles fonctions, plus importantes que l'énergie interne et l'en-

---

(¹) F. Massieu, *Sur les fonctions caractéristiques* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXIX, p. 858 et 1057; 1869).

(²) F. Massieu, *Mémoire sur les fonctions caractéristiques des divers fluides et sur la théorie des vapeurs* (*Mémoires des Savants étrangers*, t. XXII, année 1876; *Journal de Physique*, 1re série, t. VI, p. 216; 1877).

tropie, puisque l'expression de ces deux dernières peut se déduire de la connaissance des premières.

Ce sont ces nouvelles fonctions dont l'emploi, grâce à M. J. Willard Gibbs, allait donner à la Thermodynamique une nouvelle et féconde impulsion.

Les idées qui ont conduit M. Gibbs sont tout à fait analogues à celles auxquelles M. Hortsmann avait demandé la loi des équilibres chimiques; mais, plus heureux que son devancier, M. Gibbs a évité les erreurs dans lesquelles il était tombé et est parvenu enfin au théorème fondamental qu'il s'agissait d'obtenir.

« *L'énergie de l'univers est constante.* »
« *L'entropie de l'univers tend vers un maximum.* »

Telles sont les deux propositions de M. Clausius que M. Gibbs, comme M. Hortsmann, prend pour point de départ de ses recherches et pour épigraphe du plus important de ses Mémoires. Ce sont ces propositions qui le conduisent aux conditions d'équilibre d'un système, conditions qu'il énonce, sans démonstration, sous deux formes équivalentes que voici [1].

Pour l'équilibre d'un système isolé, il est nécessaire et suffisant que, dans toutes les variations possibles de l'état du système qui n'altèrent pas son énergie, la variation qu'éprouve son entropie soit nulle ou négative.

Pour l'équilibre d'un système isolé, il est nécessaire et suffisant que, dans toutes les variations possibles d'un système isolé qui n'altèrent pas son entropie la variation de son énergie soit nulle ou positive.

La première de ces deux conditions n'est autre chose que la condition d'équilibre donnée par M. Hortsmann, mais modifiée par la précaution d'en restreindre l'application aux modifications dans lesquelles l'énergie ne varie pas. Toutefois, au sujet même de l'exactitude de ces énoncés, une réserve doit être faite. Les conditions d'équilibre énoncées par M. Gibbs sont suffisantes, elles

---

[1] *On the equilibrium, etc.* (*Transactions of the Connecticut Academy*, t. III, Ire Partie, p. 109).

ne sont pas nécessaires. De ce que, grâce à M. Clausius, nous connaissons sur toutes les modifications possibles, nous déduisons bien qu'il ne peut se produire une modification correspondant à une somme négative de transformations non compensées; mais de ce qu'une modification produirait une somme positive de transformations non compensées, nous ne pouvons conclure qu'elle aura nécessairement lieu. M. Gibbs ([1]) a déjà indiqué quelques considérations qui se rattachent à ce principe; mais c'est à M. Moutier ([2]) que l'on doit de l'avoir nettement affirmé et d'en avoir montré dans plusieurs cas la nécessité.

J'ajouterai que les conditions d'équilibre indiquées par M. Gibbs nécessitent une autre correction; elles ne sont exactes que pour des modifications qui n'entraînent ni travail externe ni variation de température. Moyennant cette restriction, on se convaincra aisément de leur exactitude en se reportant à notre équation (16); en supposant en effet une modification isothermique infiniment petite, en désignant par $d\Theta$ le travail non compensé et par $d\mathfrak{T}$ le travail externe, on a

$$d\Theta = \mathrm{E}\,d\mathrm{U} - \mathrm{ET}\,d\mathrm{S} + d\mathfrak{T},$$

et cette quantité doit être positive. Si l'on s'astreint seulement à considérer des modifications pour lesquelles $d\mathfrak{T} = 0$, on voit que $d\mathrm{U}$ sera positif pour toutes celles de ces modifications qui rendront $d\mathrm{S}$ égal à 0 et $d\mathrm{S}$ négatif pour toutes celles de ces modifications qui rendront $d\mathrm{U}$ égal à 0. Mais ces conclusions ne sont plus établies lorsque la modification considérée entraîne un travail externe positif ou négatif.

Les restrictions que nous venons d'indiquer doivent aussi s'appliquer au théorème suivant, énoncé par M. Gibbs comme conséquence des conditions d'équilibre ([3]) :

Si la température d'un système est maintenue constante, il faut et il suffit, pour que ce système soit en équilibre, que la

---

([1]) Gibbs, *loc. cit.*, p. 111.

([2]) J. Moutier, *Sur quelques relations entre la Physique et la Chimie* (*Encyclopédie chimique de Fremy;* Introduction, t. II).

([3]) Gibbs, *loc. cit.*, p. 145.

fonction

$$\mathcal{F} = E(U - TS),$$

soit minimum.

Mais la première seule des deux restrictions que nous avons indiquées s'applique à cet autre théorème de M. Gibbs [1].

Lorsque la température et la pression d'un système sont maintenues uniformes et constantes, il est nécessaire et suffisant pour l'équilibre du système considéré que la quantité

$$\Phi = E(U - TS) + pv,$$

dans laquelle p désigne la pression et v le volume du système, soit minimum.

Ces deux propositions de M. Gibbs, avec les restrictions que nous y avons introduites, ne sont autre chose que l'énoncé, dans deux cas particuliers, celui où les forces extérieures n'effectuent aucun travail, et celui où les forces extérieures se réduisent à une pression normale, uniforme et constante, du théorème général que nous avons énoncé au n° 6 de la première Partie. C'est donc à bon droit que l'on peut donner à ce théorème le nom de M. Gibbs.

Le 2 février 1882, M. Hermann von Helmholtz communiquait à l'Académie des Sciences de Berlin un Mémoire *Sur la Thermodynamique des phénomènes chimiques* [2], bientôt suivi de deux autres Mémoires consacrés aux applications de la théorie dont le premier renfermait l'exposé.

Cette théorie ne renfermait rien qui ne fût déjà dans les Ouvrages de M. Massieu, de M. Gibbs. Il nous suffira de citer à cet égard, le témoignage rendu par M. Helmholtz à ses prédécesseurs au début de son troisième Mémoire.

« L'emploi pour représenter l'énergie et l'entropie d'un système de corps, des dérivées partielles d'une seule fonction intégrale, in-

---

(1) Gibbs, *loc. cit.*, p. 147.

(2) H. von Helmholtz, *Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge* I Abhandl. (*Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, t. I, p. 23; 1882). II. Abhandl., *Untersuchungen uber Chlorzink-Kalomel Elemente* (*ibid.*, t. II, p. 825; 1882). III. Abhandl., *Folgerungen über galvanische Polarisation* (*ibid.*, t. I, p. 647; 1883).

troduit en Thermodynamique une grande simplification. Cette simplification a été découverte avant moi, dès l'année 1877 (¹), par M. Massieu; il en a développé les conséquences d'une manière complète, du moins dans le cas où l'état du corps dépend d'un seul paramètre autre que la température, mais il n'en a déduit aucune conclusion relative aux phénomènes chimiques. Il donne à la fonction intégrale qu'il considère le nom de *fonction caractéristique du corps*. Cette fonction, qu'il désigne par la lettre H, correspond à ma fonction $(-\mathcal{F})$. Je propose de conserver à la fonction $\mathcal{F}$ le nom d'*énergie libre* que j'ai choisi : il me semble que ce nom exprime très exactement la vraie signification physique de cette quantité.

» La forme sous laquelle M. Massieu a présenté les théorèmes dont il s'agit est un peu plus générale que celle à laquelle je me suis arrêté. Elle est en même temps plus commode pour l'exécution de certains calculs ....

» En 1878 (²), M. J.-W. Gibbs a développé analytiquement avec beaucoup d'extension et de généralité les relations thermodynamiques qui concernent les changements d'état physique ou d'état chimique auxquels peut donner lieu un système matériel composé d'un nombre aussi grand que l'on voudra de substances différentes contiguës ou mélangées. M. Gibbs a retrouvé ainsi la *fonction caractéristique* de M. Massieu et lui a donné le nom de *fonction de force à température constante* ... ».

Ainsi, de son propre aveu, M. Helmholtz n'a introduit de nouveau dans la théorie de M. Massieu et de M. Gibbs que les dénominations d'*énergie libre* pour désigner la quantité

$$\mathcal{F} = E(U - TS),$$

et d'*énergie liée* pour désigner la quantité

$$Z = ETS.$$

Ceci nous amène à examiner les dénominations qui ont été

(¹) Les travaux de M. Massieu datent de 1869, comme nous l'avons rappelé plus haut.

(²) Les recherches de M. Gibbs datent de 1875 et non de 1878.

proposées pour désigner les diverses quantités qui figurent dans cette théorie.

M. Massieu avait donné le nom de *fonctions caractéristiques* aux quantités

$$H = TS - U$$

et

$$H' = TS - U - Ap\varphi.$$

et ce nom était admirablement approprié au rôle qu'il avait découvert à ces fonctions, puisque leur connaissance pour un corps déterminé avait pour effet de faire connaître toutes les propriétés de ce corps et de *caractériser* par là ce corps. Cette dénomination laissait davantage à désirer à partir du jour où la découverte du rôle que jouent dans la détermination de l'équilibre les fonctions étudiées par M. Massieu permettait de souhaiter pour ces fonctions un nom qui rappelât leurs analogies mécaniques. Ce fut donc avec raison que M. Gibbs transporta de la Mécanique à la Thermodynamique, pour désigner les diverses fonctions qui figuraient dans ses équations, les noms de *fonction de force* et de *potentiel*, et c'est pour maintenir cet usage introduit par l'inventeur de la théorie qui nous occupe que nous avons désigné la fonction Φ, définie par l'égalité (18), par le nom de *potentiel thermodynamique du système*.

Aux dénominations dont nous venons de parler, qui ont le double avantage de n'introduire aucun terme dont l'emploi ne soit depuis longtemps familier au physicien, et de rappeler nettement le rôle des quantités employées, M. Helmholtz a proposé de substituer les dénominations d'*énergie libre* et d'*énergie liée* que nous rappelions tout à l'heure. Ces dénominations pourraient donner lieu à plus d'une critique; mais, mettant en pratique la devise de Gauss : *Simus faciles in verbis*, nous ne nous attarderons pas à ces critiques et nous passerons à l'exposé rapide des principales applications de la théorie de M. Gibbs.

2. *Application de la théorie de M. Gibbs aux phénomènes de dissociation.* — Un certain nombre de phénomènes de dissociation présentent avec les phénomènes de vaporisation l'analogie la plus étroite : tout le monde connaît l'expérience de M. Debray qui mit cette analogie en si complète évidence par l'étude de la

dissociation du carbonate de chaux. La Thermodynamique n'a pas tardé à s'emparer de ces phénomènes et à leur étendre des considérations analogues à celles qu'elle avait appliquées d'une manière si heureuse à l'étude de la vaporisation. Mais beaucoup de phénomènes de dissociation se distinguent de ceux-là par une circonstance qui en complique singulièrement l'étude. Le système dont on étudie l'équilibre, au lieu de renfermer un seul corps gazeux, en renferme deux ou plusieurs qui se mélangent l'un à l'autre; à cette catégorie de phénomènes appartiennent la dissociation de la vapeur d'eau, de l'acide carbonique, de l'acide sulfureux, de l'oxyde de carbone, de l'acide chlorhydrique, dont l'étude avait conduit H. Sainte-Claire Deville à la conception des phénomènes de dissociation, la dissociation des sels ammoniacaux qui a été récemment étudiée avec tant de soins par M. Naumann, M. Hortsmann et M. Isambert. Il est évidemment du plus haut intérêt d'appliquer les considérations de la Thermodynamique à de semblables phénomènes.

L'intérêt que présente cette étude est encore accru par la circonstance suivante.

En 1840, M. Cahours observa que la densité de vapeur de l'acide acétique par rapport à l'air diminuait d'une manière très notable lorsque la température à laquelle cette densité était déterminée allait en croissant. Des faits semblables furent signalés dans l'étude d'un certain nombre de corps gazeux. MM. H. Sainte-Claire Deville et Troost étudièrent avec beaucoup de soin les variations de la densité de l'acide hypoazotique et de la vapeur de soufre. Pour cette dernière, ils trouvèrent que la densité augmentait du simple au triple lorsque la température baissait de 1000° à 500°. M. Crafts et Meier ont montré plus récemment que la densité de la vapeur d'iode variait du simple au double lorsque la température baissait de 1600° à 800°.

Beaucoup de physiciens ont pensé que de semblables variations ne devaient pas être simplement attribuées aux écarts que les vapeurs considérées présentent par rapport aux lois de Mariotte et de Gay-Lussac; ils ont cherché à en donner une explication d'ordre chimique : ils ont pensé que ces variations de densité étaient dues au dédoublement de polymères, dédoublement qui irait en s'accentuant lorsque la température augmente; ils ont rapproché par

là ces variations de densité des variations apparentes que présente la densité du perchlorure de phosphore gazeux, grâce à la décomposition graduelle de ce corps en protochlorure de phosphore et en chlore. Il était de première importance de développer la théorie de la dissociation des composés gazeux qui se résolvent en éléments gazeux, de façon à s'assurer si cette théorie pouvait fournir l'explication des phénomènes observés.

C'est cette théorie qui constitue l'une des principales applications de la méthode de M. Gibbs [1].

M. Gibbs suppose les gaz qu'il étudie, parvenus à cet état idéal où ils suivraient exactement les lois de Mariotte et de Gay-Lussac; il peut alors obtenir l'expression complète de leur potentiel thermodynamique et établir les lois de leur décomposition. Il n'obtient ainsi, il est vrai, qu'une théorie approchée; mais, tout approchées que soient les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, elles n'en sont pas moins dans l'étude des propriétés physiques des corps gazeux d'une utilité sans conteste. N'en est-il pas de même d'une théorie de la dissociation des composés gazeux, soumise aux mêmes approximations?

Nous ne voulons pas détailler ici la théorie de M. Gibbs. Qu'il nous suffise de dire que son auteur en a comparé les résultats numériques aux données des expériences faites sur le perchlorure de phosphore [2], et que cette comparaison a montré que la théorie présentait, avec l'expérience, une conformité aussi grande qu'on pouvait l'espérer. Une comparaison analogue a montré que l'hypothèse de la dissociation d'un polymère expliquait, d'une manière satisfaisante, les variations de densité de vapeur de l'acide hypo-azotique et de l'acide acétique.

3. *Application de la théorie de M. Gibbs à la pile voltaïque.* — M. Gibbs ne s'est pas borné à appliquer la théorie féconde qu'il avait inaugurée à l'étude de la dissociation. Il l'a appliquée également à l'étude de la capillarité et a montré que la

---

(1) Gibbs, *On the equilibrium of heterogeneous substances* (*Transactions of the Connecticut Academy of Sciences and Arts*, Vol. III, Part I, p. 210).

(2) Gibbs, *On the density of vapours, etc.* (*American Journal of Sciences and Arts*, Vol. XVIII; 1879).

Thermodynamique pouvait donner une signification nouvelle à la théorie en laquelle Gauss avait embrassé cette branche de la Physique. Mais c'est surtout dans l'étude de la force électromotrice d'une pile voltaïque que M. Gibbs a été conduit, par sa méthode, à de nouveaux et féconds résultats. Donnons une idée du problème qu'il s'agissait de résoudre et de la solution que M. Gibbs a proposée.

M. Edmond Becquerel avait eu le premier l'idée de relier la valeur de la force électromotrice d'une pile voltaïque à la grandeur des phénomènes thermiques qui accompagnent la réaction dont cette pile est le siège; voici la loi qu'il avait ainsi été conduit à énoncer :

Lorsqu'une charge électrique, égale à l'unité, traverse une pile, cette pile est le siège d'une certaine réaction chimique. Si cette réaction chimique ne produisait aucun courant, elle dégagerait une quantité de chaleur Q. *Si l'on désigne par* $\mathcal{E}$ *la force électromotrice de la pile, et par* E *l'équivalent mécanique de la chaleur, on a*

$$EQ = \mathcal{E}.$$

Cette loi si simple ne tarda malheureusement pas à être contredite par l'expérience. Favre prouva le premier, en 1858, qu'entre la *chaleur chimique* Q et ce qu'on a nommé depuis la *chaleur voltaïque* $\frac{\mathcal{E}}{E}$, existe une différence positive ou négative souvent très considérable. M. Raoult (1864-1865), M. Edlund (1869-1883), M. F. Braun (1878), ont montré, par un nombre considérable d'expériences, que l'immense majorité des couples voltaïques s'écartait de la règle posée par M. Edmond Becquerel; que ceux qui suivaient cette loi étaient l'exception.

Ce désaccord entre l'expérience et la théorie de M. Becquerel semblait inexplicable; car plusieurs de ceux qui l'avaient signalé, et entre autres Favre, croyaient que la formule de M. Becquerel était une conséquence rigoureuse des principes de la Thermodynamique. M. Braun eut l'idée que la raison de ce désaccord devait être demandée au théorème de Carnot qui conduirait à substituer à la règle de M. Edmond Becquerel une règle plus exacte. Mais la

règle qu'il proposa manquait de précision et plusieurs de ses conclusions sont aujourd'hui inacceptables. La règle véritable, qui devait être substituée à la règle de M. Edmond Becquerel, était donnée par M. Gibbs, au moment même où M. Braun publiait ses idées, dans la seconde Partie de son Mémoire *Sur l'équilibre des substances hétérogènes* (¹). Voici comment peut être énoncée cette règle fondamentale :

Lorsqu'une charge électrique égale à l'unité traverse une pile, cette pile est le siège d'une certaine réaction chimique. Si cette réaction chimique ne produisait aucun courant, elle produirait une variation $(\Phi_2 - \Phi_1)$ *du potentiel thermodynamique du système, telle que l'on ait*

$$\mathcal{E} = \Phi_1 - \Phi_2.$$

Ce postulatum fondamental est devenu le point de départ d'une théorie entièrement nouvelle de la pile galvanique, théorie à laquelle l'expérience a déjà apporté d'importantes confirmations. Comme nous l'avons dit, ce postulatum est dû à M. Gibbs; cependant la théorie qui en est issue porte ordinairement le nom de *Théorie d'Helmholtz*. Un Ouvrage que nous avons publié sur cette question, à une époque où nous n'avions malheureusement qu'une connaissance incomplète des travaux de M. Gibbs, n'est peut-être pas entièrement étranger à l'introduction de cette dénomination erronée; nous ne ferons donc qu'accomplir ici un devoir de justice en la rectifiant et en proclamant l'incontestable priorité de M. Gibbs.

Dans un couple hydro-électrique, la force électromotrice dépend de la concentration plus ou moins grande des liquides qui baignent les électrodes. Afin de préciser l'influence que la concentration des liquides exerce sur la force électromotrice, M. James Moser (²) entreprit l'étude de piles dans lesquelles la réaction produite à un

---

(¹) *On the equilibrium of heterogeneous substances* (*Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences*, Vol. III, Part II, p. 503).

(²) J. Moser, *Galvanische Ströme zwischen verschieden concentrirten Lösungen desselben Korpers und Spannungsreihen* (*Monatsber. der Berl. Akad.*, 8 nov. 1877; *Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie*, t. III, p. 216; 1878).

pôle est renversée à l'autre pôle. La force électromotrice dépend uniquement alors de la concentration des liquides. Deux vases, mis en communication par un siphon, renfermaient des dissolutions inégalement concentrées d'un même sel métallique. Deux électrodes, formées du métal qui entrait dans la constitution de ce sel, plongeaient dans ces vases. Tel est le type des piles dont M. Moser mesura la force électromotrice.

En même temps que M. Moser publiait les résultats de ces recherches expérimentales exécutées au laboratoire de M. Helmholtz, ce dernier ([1]) appliquait les propositions de la Thermodynamique aux phénomènes étudiés par M. Moser.

Les dissolutions, renfermées dans les deux vases dont se composait chacune des piles étudiées par M. Moser, avaient des tensions de vapeur différentes. M. Helmholtz montre que, de la variation que subissait la tension de vapeur de ces dissolutions lorsqu'on faisait varier leur concentration, on pouvait déduire la valeur de leur force électromotrice. La comparaison de la valeur ainsi calculée à la valeur déterminée par l'expérience conduisait à un accord satisfaisant.

Dans cette étude théorique, M. Helmholtz, il est vrai, avait fait usage du Théorème de Carnot; mais il n'avait point, pour cela, renoncé à la loi de M. Edmond Becquerel, ainsi qu'on peut le conclure du passage suivant ([2]) : « .. En vertu de la loi qui règle les autres phénomènes d'électrolyse, le travail produit dans ce cas par les forces chimiques doit agir comme force électromotrice. Ce travail peut se calculer au moyen de la théorie mécanique de la chaleur ... ». Lors donc que, l'année même (1878) où le Mémoire de M. Helmholtz avait paru dans les *Annalen der Physik und Chemie,* M. Gibbs formulait, d'une manière précise, le postulatum fondamental dont nous rapportions tout à l'heure l'énoncé, il devenait le véritable fondateur de la nouvelle théorie de la pile. Les belles conséquences que, quelques années plus

---

([1]) H. Helmholtz, *Ueber galvanische Ströme verursacht durch Concentrationsunterschiede. Folgerungen aus der mechanischen Wärmetheorie* (*Monatsber. der Berl. Akad.*, 26 nov. 1877; *Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie,* t. III, p. 201; 1878).

([2]) *Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie,* t. III, p. 203.

tard, M. Helmholtz a déduites de cette théorie ne doivent point faire oublier le nom de celui qui l'a créée et qui en a proclamé la rigueur et la généralité, tirant ainsi une conséquence de premier ordre de la méthode nouvelle qu'il avait inaugurée en Thermodynamique.

Tel est le point auquel étaient parvenues, après les travaux de M. Gibbs et de M. Helmholtz, cette méthode et ses principales applications. La voie était tracée et l'on savait qu'elle serait bonne. Il restait à montrer que les principes de la nouvelle méthode se déduisaient simplement des postulats de la Thermodynamique, à développer la théorie de la dissociation à laquelle elle avait conduit, à relier la proposition sur laquelle elle faisait reposer la théorie de la pile aux lois élémentaires de l'électricité, à pousser enfin dans toutes les branches de la Physique les conséquences de la nouvelle doctrine. Quel a été le fruit des efforts tentés dans ces diverses directions depuis les travaux de M. Gibbs et de M. Helmholtz? Ce n'est pas à nous qu'il appartient de le dire.

SUR L'EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE;

PAR M. GASTON DARBOUX.

Étant donné un nombre A, supposons que l'on ait trouvé, à une unité près et par défaut, sa racine carrée a; $a+x$ désignant la valeur exacte de la racine, on aura

$$A = (a+x)^2$$

et, par conséquent,

$$x = \frac{A-a^2}{2a+x}.$$

Prenons comme valeur approchée de x

$$\frac{A-a^2}{2a+1}.$$

Cette valeur est évidemment inférieure à x, et l'on a

$$x - \frac{A-a^2}{2a+1} = \frac{A-a^2}{2a+x} - \frac{A-a^2}{2a+1} = \frac{(A-a^2)(1-x)}{(2a+1)(2a+x)} = \frac{x(1-x)}{2a+1}.$$

x étant inférieure à l'unité, la valeur maximum du produit $x(1-x)$ est $\frac{1}{4}$. On aura donc

$$x - \frac{A - a^2}{2a+1} < \frac{1}{4}\,\frac{1}{2a+1}.$$

On peut déduire de cette formule un procédé rapide et régulier pour l'extraction de la racine carrée.

Supposons, en effet, que l'on ait trouvé p chiffres de la racine carrée d'un nombre A. On peut toujours admettre que l'on ait placé la virgule dans le nombre A, de telle manière que ces p chiffres représentent la partie entière de la racine.

Alors, si a se compose d'un seul chiffre, on aura

$$\frac{1}{4}\,\frac{1}{2a+1} \leq \frac{1}{12}.$$

Donc, le quotient $\frac{A - a^2}{2a+1}$ représente la racine à $\frac{1}{12}$ près, et, si l'on effectue la division en se bornant au chiffre des dixièmes, on obtient le chiffre suivant de la racine, ou un chiffre trop faible d'une unité seulement.

Lorsque a se compose de deux chiffres, il peut se présenter deux cas : si a est supérieur ou égal à 12, on a

$$\frac{1}{4}\,\frac{1}{2a+1} \leq \frac{1}{100},$$

et, par conséquent, si l'on prend pour valeur approchée de x le nombre formé par les deux premiers chiffres du quotient

$$\frac{A - a^2}{2a+1},$$

on commettra une erreur moindre que $\frac{2}{100}$. En d'autres termes, on obtiendra les deux chiffres suivants de la racine, soit en prenant les deux premiers chiffres du quotient, soit en augmentant d'une unité le nombre formé par ces deux chiffres.

Si a est égal à 10 ou à 11, on aura seulement

$$\frac{1}{4(2a+1)} \leq \frac{1}{84},$$

et il pourra arriver que, pour obtenir les deux chiffres suivants de la racine, on ait à augmenter de 2 unités le nombre formé par les deux premiers chiffres du quotient $\frac{A - a^2}{2a+1}$.

Supposons maintenant que a se compose de plus de 2 chiffres, soit p chiffres. Si le nombre formé par les trois premiers chiffres de a est égal ou supérieur à 125, on aura

$$4(2a+1) < 10^p$$

et, par suite,

$$\frac{1}{4(2a+1)} < \frac{1}{10^p}.$$

Par conséquent, si l'on évalue le quotient $\frac{A - a^2}{2a+1}$ à une unité près du $p^{\text{ième}}$ ordre, c'est-à-dire si l'on calcule, en tenant compte des zéros qui peuvent se présenter au début, les p premiers chiffres du quotient, on aura la valeur de x avec une erreur moindre que $\frac{2}{10^p}$. Par suite, on obtiendra exactement les p chiffres suivants de la racine, soit en prenant les p premiers chiffres du quotient, soit en augmentant d'une unité du dernier ordre le nombre formé par ces p chiffres.

Si les trois premiers chiffres de a forment un nombre inférieur à 125, l'erreur commise

$$\frac{1}{4(2a+1)}$$

sera seulement inférieure à $\frac{1}{8 \times 10^{p-1}}$ et il pourra se faire que, pour obtenir les p chiffres de la racine, on ait à augmenter de 2 unités du dernier ordre le nombre formé par les p premiers chiffres du quotient précédent $\frac{A - a^2}{2a+1}$. Mais ce cas est extrêmement rare, et un calcul facile montre que sa probabilité est inférieure à $\frac{1}{100}$.

Soit, d'une manière générale, q la valeur du nombre formé par ces p premiers chiffres. En faisant la division, on aura obtenu un reste r et l'on aura

$$A - a^2 = q(2a+1) + r.$$

Il nous reste à indiquer comment on reconnaîtra si tous les chiffres de $a + q$ sont exacts ou s'il faut augmenter le dernier. On

considère pour cela la différence

$$A - (a + q)^2,$$

qui est égale, si l'on tient compte de l'égalité précédente, à

$$q(1 - q) + r,$$

et la différence

$$A - \left(a + q + \frac{1}{10^p}\right)^2,$$

qui est égale à la précédente diminuée de

$$\frac{1}{10^p}\left(2a + 2q + \frac{1}{10^p}\right).$$

Si l'on a

$$q(1 - q) + r < \frac{1}{10^p}\left(2a + 2q + \frac{1}{10^p}\right),$$

tous les chiffres de la racine seront bons; sinon, il faudra forcer le dernier chiffre du nombre q, et il n'y aura plus d'incertitude; c'est-à-dire qu'il n'y aura plus lieu de forcer, sauf dans le cas où les trois premiers chiffres de a formeraient un nombre inférieur à 125.

Voici comment on reconnaîtra si l'inégalité précédente est vérifiée. Supposons, par exemple,

$$q = 012370.$$

On prendra le nombre complémentaire

$$987630,$$

obtenu en prenant le complément à 9 de tous les chiffres significatifs, sauf le dernier pour lequel on prendra le complément à 10.

Le produit de ces deux nombres représentera des unités de même ordre que r, on l'ajoutera à r et l'on vérifiera si le nombre obtenu est inférieur au double de la partie trouvée à la racine, $2(a + q)$, augmenté d'une unité du dernier ordre. S'il en est ainsi, les p chiffres trouvés sont tous exacts, sinon on retranchera

$$2a + 2q + 1$$

et l'on forcera le dernier chiffre de q. Il n'y aura lieu de recommencer cet essai que dans le cas extrêmement rare où les trois premiers chiffres de a formeraient un nombre inférieur à 125.

Dans tous les cas, le reste résultant de ces opérations est celui qu'il faudra employer pour continuer et pour obtenir de nouveaux chiffres de la racine carrée.

Les remarques précédentes permettront de comprendre la règle que nous allons proposer et que nous expliquerons sur un exemple numérique.

Soit à chercher la racine de 3. On calculera le premier chiffre par la méthode ordinaire, ce qui donne le premier chiffre 1 et le reste 2

```
 3        |1
 200      |3
   20      6        6
   24                4
   44               24
 - 33
   11
```

Pour obtenir le second chiffre, on abaisse la tranche suivante, c'est-à-dire deux zéros, et l'on divise 200 par le double de 1 augmenté de 1, c'est-à-dire 3, en se bornant à calculer un chiffre du quotient. On trouve ainsi le quotient 6 et le reste 20. On ajoute à 20 le produit 24 de 6 par le nombre complémentaire 4, ce qui donne 44; 44 est supérieur au double de la partie trouvée à la racine 16, augmenté de 1, c'est-à-dire à 33. On retranche 33, ce qui donne le reste 11 et l'on force le chiffre 6, ce qui donne 7 pour le second chiffre de la racine. On abaisse maintenant deux tranches, c'est-à-dire quatre zéros à la droite de 11 et l'on divise par le

```
 110000 |35          31
  050    31           69
    1500             279
  + 2139            186
    3639            2139
  - 3463
    176
```

double de la partie 17 trouvée à la racine, augmenté de 1, c'est-à-dire par 35, en continuant l'opération jusqu'à ce que l'on ait obtenu deux chiffres du quotient. On obtient ainsi un quotient 31

et un reste 1500 auquel on ajoute le produit 2139 de 31 par le nombre complémentaire 69. On trouve ainsi 3639. Le double de la partie trouvée à la racine 1731 augmenté de 1 est 3463; ce nombre étant inférieur à 3639, on le retranche et l'on obtient le reste 176. En forçant le chiffre 1, on a

1732

pour les quatre premiers chiffres de la racine. Pour déterminer les 4 suivants, on divisera le reste 176 suivi de 8 zéros par 3465

```
 17600000000 |3465        0507
   27500     |0507        9493
    32450000               1521
 +   4812951              4563
    37262951             2028
 - 34641015             4563
     2621936            4812951
```

jusqu'à ce que l'on ait obtenu 4 chiffres au quotient, ce qui donne un quotient 0507 et le reste 32450000 auquel on ajoutera le produit 4812951 de 0507 par le nombre complémentaire 9493. On trouve ainsi

37262951.

Si l'on augmente d'une unité le double de la partie obtenue à la racine 17320507, on obtient

34641015,

nombre inférieur au précédent. Il faut donc forcer le chiffre 7, ce qui donne

17320508,

pour les huit premiers chiffres de la racine, et le reste de l'opération sera le nombre

2621936.

Si l'on continue avec ce nouveau reste, comme nous l'avons expliqué, on obtiendra 8 nouveaux chiffres de la racine. Voici ce

dernier calcul :

```
26219360000000000000000 | 34641017
 197064810                 07568877
  238597250
   307511480
    303833440
     267053040
      245659210
        3172091000000000
      + 699599800958871
        ----------------
        1016808900958871
```

```
07568877
92431123
--------
22706631
15137754
 7568877
 7568877
22706631
30275508
15137754
68119893
--------
699599800958871
```

Le reste étant inférieur au double de la partie trouvée à la racine augmenté de 1, le dernier chiffre trouvé est exact. Le résultat final de ces opérations, toutes inscrites dans nos tableaux, est le nombre

$$1,732050807568877.$$

Nous ignorons si le procédé précédent, qui est très régulier, paraîtra suffisamment simple. Dans tous les cas, il est bon d'ajouter la remarque suivante.

Lorsqu'on a obtenu p chiffres de la racine, il peut se faire qu'on en veuille obtenir moins de p. Alors, si l'on veut déterminer seulement q chiffres nouveaux, il suffira d'abaisser les q tranches suivantes et d'appliquer la méthode sans aucune modification. En prenant $q = 1$, on est conduit à une règle nouvelle pour l'extraction de la racine carrée :

Lorsqu'on aura obtenu une certaine partie de la racine et le reste correspondant, on abaissera une nouvelle tranche de 2 chiffres à la droite de ce reste, comme dans la méthode ordinaire ; mais, au lieu de diviser par le double de la partie trouvée à la racine, on divisera par ce double augmenté d'une unité. On aura ainsi un quotient q d'un seul chiffre et un reste r. On ajoutera au reste le produit $q(10 - q)$; et, pour reconnaître si le chiffre q est exact, il suffira de comparer le résultat au double de la partie trouvée à la racine, augmenté de l'unité. Si ce dernier nombre ne peut pas être retranché,

q sera le chiffre exact. Si la soustraction est possible, on l'effectuera et l'on forcera d'une unité le chiffre q; q + 1 sera toujours le chiffre exact, et le reste obtenu servira à continuer l'opération.

Voici le tableau résultant de l'application de cette règle au nombre 3.

```
3          |17320508
200 |3
 20  6
 24
 44
—33
 1100 |35
  050  3
   21
   7100 |347
    160  2
     16
    17600 |3465
           0
    1760000 |34641
      27950  5
        25
    2797500 |346411
             0
    279750000 |3464101
      2621920  8
           16
      2621936
```

Le résultat est en parfait accord avec celui que nous avons trouvé précédemment.

La règle que nous avons exposée dans cet article a les rapports les plus étroits avec la méthode abrégée qui permet de doubler, par une simple division, le nombre des chiffres déjà obtenus à la racine. Nous devons dire, en terminant, que M. Hermite avait bien voulu appeler notre attention sur ce sujet, en nous signalant la possibilité d'employer cette méthode abrégée et de la transformer en un procédé régulier, propre à remplacer la règle usuelle.

Tableau du calcul de $\sqrt{\pi}$, d'après la méthode précédente.

```
3,14159265358979 |17724538
214 |3
  4  7        3 × 7 = 21
+21
 251592 |35        71
   65    71        29
   3092            639
  +2059           142
   5151           2059
  −3543
   1608653589 79 |3545          4537
    19065          4537          5463
     13403                      13611
      27685                    27222
       28708979               18148
      +24785631              22685
       53494610              24785631
      −35449075
       18045535

√π = 1,7724538
```

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

KÖNIGSBERGER. — Beweis von der Unmöglichkeit der Existenz eines anderen Functionaltheorems als des Abel'schen. Festschrift gewidmet der Universität Heidelberg zu ihrem fünfhundertjährigen Jubiläum. 88 p. in-4°; Berlin, Reimer, 1866 (1).

Ce Mémoire, destiné à célébrer, d'après un rite cher aux savants allemands, l'anniversaire de la fondation de l'Université de Heidelberg, cinq fois séculaire, peut être regardé comme le couronnement de longues recherches, dispersées dans le *Journal de Crelle*, dans les *Acta mathematica* et dans le Livre de l'auteur intitulé *Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen* (2).

L'existence du théorème d'Abel, pour les intégrales d'une fonction algébrique, conduit naturellement à poser la question suivante : Trouver une fonction telle que ses valeurs pour n arguments indépendants soient liées algébriquement à ces arguments d'une part et de l'autre aux valeurs qu'elle prend pour p arguments dépendant algébriquement des n arguments primitifs, p étant moindre que n. Le cas de $p = 1$ et celui de $p = 2$ sont traités avec tous les détails qui conviennent; les raisonnements qui permettent de conclure lorsque p est égal à deux valent encore lorsque p est plus grand que deux.

En excluant le cas des fonctions que regarde le théorème d'Abel, on montre que toute fonction qui admettrait un *théorème fonctionnel d'espèce p* devrait satisfaire à une équation différentielle algébrique d'ordre p, équation dont l'intégrale générale devrait être une fonction algébrique de p intégrales particulières : cette équation devrait, par conséquent, se ramener à une équation différentielle linéaire homogène d'ordre p, et l'on prouve que l'intégrale d'une telle équation ne peut avoir un théorème fonctionnel d'ordre p. Le résultat final auquel parvient M. Königsberger est le suivant : Toute fonction d'une variable qui admet

(1) Ce Mémoire a paru dans le t. 100 du *Journal de Crelle*.

(2) Voir *Bulletin*, t. VII_1, p. 5.

un théorème fonctionnel d'ordre p est l'intégrale d'une équation différentielle qui se ramène, par une substitution algébrique, à la forme

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x)\chi(x),$$

les fonctions $\omega(x)$ et $\chi(x)$ satisfaisant à l'une des trois conditions suivantes :

1° $\chi(x)$ est la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré et $\omega(x)$ l'inverse d'un radical de la même nature;

2° $\int \frac{dx}{\chi(x)}$ est une fonction algébrique et $\int \omega(x)\, dx$ est une intégrale abélienne de genre p, n'ayant que des discontinuités algébriques;

3° $\int \frac{dx}{\chi(x)}$ est le logarithme d'une fonction algébrique et $\int \omega(x)\, dx$, une intégrale abélienne de genre p, n'admettant que des discontinuités logarithmiques.

En résumé, on ne trouve pas d'autres fonctions d'une variable que celles auxquelles se rapporte le théorème d'Abel. J. T.

MONTEVERDE. — Elementi di Geometria proiettiva. 1 vol. in-8°, XIX-345 p., avec un atlas de XLVII planches. Genève, L. Beuf; Paris, Gauthier-Villars, 1886.

Le Livre de M. Monteverde, écrit avec beaucoup de soin, est bien un Traité *élémentaire* de Géométrie projective. Ce caractère se manifeste non seulement par les limites que l'auteur s'est imposées et par les détails apportés aux démonstrations, mais encore par ce fait que les propriétés métriques ne sont pas systématiquement séparées des propriétés descriptives. L'Auteur, après deux Chapitres d'Introduction, définit les cinq formes fondamentales de première et de seconde espèce; ces définitions suffisent pour introduire la notion de dualité; il consacre ensuite un Chapitre à la définition des opérations fondamentales, projection et intersection, ainsi qu'à la notion de *prospecticité*, et termine en montrant comment on peut relier deux figures *projectives*, par une suite de

figures telles que chacune soit *prospective* avec celle qui la précède et celle qui la suit. Il expose ensuite les propriétés du rapport anharmonique, de la division harmonique et du quadrilatère complet : l'ensemble de ces matières constitue le premier Livre.

Le second Livre comprend l'étude spéciale des formes fondamentales de première espèce : construction de deux formes projectives, similitude, égalité, formes homographiques superposées, involution, théorie des transversales. Le troisième et dernier Livre comprend l'étude des coniques et des cônes du second ordre, au point de vue de la Géométrie projective, et une exposition rapide des propriétés principales de la surface gauche du second ordre; la génération même de ces courbes ou surfaces montre qu'on peut en faire correspondre les éléments, points, tangentes ou génératrices, d'une façon univoque aux éléments d'une forme fondamentale de première espèce : l'examen des propriétés qui résultent d'une telle correspondance fournit deux des Chapitres les plus intéressants de ce Livre. L'Ouvrage se termine par quelques indications sur l'introduction des éléments imaginaires en Géométrie. J. T.

JURGENS (E.). — Zur Auflösung linearer Gleichungssysteme und numerischen Berechnung von Determinanten. Eine Festgabe zur fünften Säcular-Feier der Universität Heidelberg am 2. August 1886. Gewidmet von der Königlichen technischen Hochschule zu Aachen. 18 p. in-4°; Aix-la-Chapelle, Palm, 1886.

Voici encore un travail publié à l'occasion du cinquième centenaire de l'Université de Heidelberg; on est un peu étonné, en le lisant, de voir un double filet rouge courir autour des pages; les Mémoires de Mathématiques n'ont pas, d'habitude, un pareil air de fête; mais, après tout, ce petit ornement n'enlève rien à l'intérêt du texte.

L'Auteur s'est proposé de donner un moyen pour résoudre, par approximations successives, un système d'équations du premier degré. Il commence par transformer ces équations, au moyen d'un système de multiplicateurs qu'il apprend à former, en d'autres équations

$$b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \ldots + b_{in}x_n = c_i. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

dans lesquelles les coefficients b vérifient les inégalités suivantes ($i = 1, 2, \ldots, n$) :

$$b_{ii} > \mu \Sigma \, | b_{ki} |,$$
$$b_{ii} > \nu \Sigma \, | b'_{ik} | :$$

les deux barres signifient qu'on prend la valeur absolue de la quantité qu'elles comprennent; dans les seconds membres, k doit prendre toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$, sauf la valeur i; enfin μ et ν sont des nombres positifs que l'on *doit* supposer plus grands que un, mais qu'il y a intérêt à supposer le plus grands possibles.

Le déterminant d'un pareil système d'équations est manifestement différent de zéro; mais, en outre, il est aisé de montrer que toutes les inconnues sont, en valeur absolue, moindres que

$$\frac{\nu}{\nu - 1} \left| \frac{v_g}{b_{gg}} \right|,$$

où l'indice g est choisi parmi les nombres $1, 2, \ldots, n$, de manière que la quantité

$$\left| \frac{v_g}{b_{gg}} \right|$$

soit la plus grande parmi ses pareilles.

Ceci posé, voici la marche du calcul; supposons que le second membre ait la plus grande valeur absolue dans la $k^{\text{ième}}$ équation; on substituera $x_k + b_k$ à x_k en désignant par b_k le nombre entier qui s'approche le plus de $\frac{v_k}{b_{kk}}$; on aura alors remplacé le système d'équations proposé par un autre système dans lequel la somme des valeurs absolues des seconds membres est moindre que dans le premier système; en continuant d'appliquer le même procédé, on parviendra, au bout d'un nombre fini d'opérations, à un système pour lequel le procédé sera impraticable, chacun des nombres $2\frac{v_i}{b_{ii}}$ étant, en valeur absolue, moindre que un. On multipliera alors tous les seconds membres par une même puissance de 10, ce qui implique que les valeurs trouvées ensuite pour les inconnues devront être divisées par cette même puissance de 10, et l'on continuera l'application du même procédé, jusqu'à ce qu'on ait obtenu l'approximation désirée. On a, à chaque fois, une limite supérieure de l'erreur commise, et les calculs se font assez rapidement.

J. T.

MÉLANGES.

LES « DÉFINITIONS » DU PSEUDO-HÉRON;

PAR M. PAUL TANNERY.

1. Les extraits que j'ai donnés, d'après le manuscrit arabe de Leyde, du Commentaire de Héron sur Euclide, pourraient peut-être produire l'impression que ce travail aurait été moins un commentaire proprement dit qu'une suite de lemmes analogues, dans une certaine mesure, à ceux que Pappus nous a conservés sur les Ouvrages d'Analyse géométrique des anciens, au Livre VII de sa *Collection mathématique*.

Pour montrer que cette impression serait inexacte, il me serait facile de faire de nouvelles citations décisives des scolies héroniens relatifs aux propositions [1]; mais je préfère indiquer ceux qui subsistent sur les définitions des Livres autres que le premier, le commentaire arabe sur celles du Livre I étant perdu, comme je l'ai dit.

Sur la définition II, 1, Héron remarque que la raison pour laquelle Euclide la limite au parallélogramme rectangle est que la mesure de la surface de ce rectangle est donnée par le produit des deux côtés de l'angle droit.

Sur III, déf. 1, où Euclide définit l'égalité des cercles par celle des diamètres ou par celle des rayons, Héron prouve que ces deux définitions n'en font qu'une.

Sur III, déf. 4 (égalité de distance des cordes au centre), il remarque que la distance d'un point à une droite se mesure par la perpendiculaire abaissée du point sur la droite, en raison de la propriété de cette perpendiculaire d'être la plus courte ligne allant du point à la droite.

Sur III, déf. 9, il observe que l'expression d'Euclide « un angle a pour base un arc » (ἐπὶ περιφερείας λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία) s'ap-

---

[1] En fait, la plus grande partie de ces scolies consiste à répéter les démonstrations euclidiennes dans d'autres cas des figures ou à prouver l'impossibilité des cas auxquels ces démonstrations ne s'appliqueraient pas.

plique en fait, soit à l'angle qui a son sommet au centre, soit à ceux qui ont leur sommet à la circonférence.

Après III, déf. II, il distingue comme figures dérivées du cercle par son intersection avec une droite ou avec un cercle le segment, la lunule et l'amphicyrte ([1]).

Enfin sur IV, déf. 1 et 2 (figures inscrites ou circonscrites à une figure), nous lisons : « Quelques personnes ont demandé pourquoi le géomètre a donné ces définitions, puisqu'il ne voulait traiter que de l'inscription ou de la circonscription par rapport à un cercle; nous répondrons qu'il a agi de la sorte pour la perfection de son enseignement. »

Je n'insiste pas sur le caractère de ces divers scolies; évidemment, ils proviennent d'un véritable commentaire et l'on peut ajouter d'un commentaire dont le niveau n'était guère élevé. Mais on remarquera qu'en tous cas il n'y a aucun rapport entre ces scolies et le contenu de l'opuscule des *Définitions des termes de Géométrie*, attribué à Héron.

2. Cet Opuscule nous est présenté comme constituant des *Prolégomènes aux Éléments de Géométrie* et comme correspondant à des *Prolégomènes aux Éléments d'Arithmétique*, écrits par le même auteur, et que nous n'avons plus. C'est une compilation des diverses définitions géométriques; dans cette compilation, si les formules adoptées par Euclide sont généralement énoncées avant les autres, l'ordre d'Euclide n'est nullement respecté; des idées qui lui sont étrangères sont introduites et dérangent souvent cet ordre. Si donc ces *Prolégomènes* avaient été rédigés par Héron, ils l'auraient été, en tous cas, indépendamment de son commentaire sur Euclide, dont les fragments qui nous restent ne témoignent d'ailleurs d'aucune communauté d'origine avec l'Opuscule contesté.

([1]) C'est-à-dire la partie commune aux deux cercles qui se coupent, les lunules étant au contraire les parties non communes. Avant cette distinction, vient une remarque assez inintelligible. « Nous savions déjà que, quand deux segments sont égaux, les angles inscrits sont égaux; réciproquement, si les angles sont égaux, les segments le seront. » Héron avait-il énoncé déjà sur III, déf. 9, le théorème de l'égalité des angles inscrits dans le même segment?

L'existence du commentaire de Héron sur Euclide n'est donc, en fait, nullement favorable à l'attribution au même géomètre de l'Opuscule qui nous occupe. Cette attribution repose d'ailleurs sur deux motifs : l'un est l'inscription que portent les manuscrits; l'autre est que l'ensemble du texte, en faisant abstraction de quelques additions et remaniements postérieurs, paraît bien correspondre, en réalité, à une époque voisine de celle de Héron.

Ce second motif peut être écarté, si l'on admet que l'auteur des *Prolégomènes,* auquel on doit, semble-t-il, attribuer la majeure partie des remaniements dont j'ai parlé, a copié une compilation faite dans le courant du 1er siècle avant l'ère chrétienne ou bien effectué lui-même cette compilation sur un Ouvrage plus étendu, par exemple celui de Geminus.

Quant à l'inscription des manuscrits, on peut l'expliquer de différentes façons. Je me bornerai à développer celle qui me paraît aujourd'hui la plus plausible.

Dans les manuscrits, l'Opuscule des *Définitions* précède toujours des extraits d'Anatolius et de Proclus, mais dans l'intervalle sont insérés : 1° une Table métrologique sur le modèle de celles de Héron; 2° des extraits des *Introductions de Géométrie* de Héron, tirés de son grand Ouvrage de Géométrie pratique; 3° les postulats et les notions communes d'Euclide. L'ensemble de la compilation étant anonyme, le nom de Héron inscrit en regard soit du préambule de la Table métrologique, soit des extraits authentiques qui suivent, a très bien pu, du fait d'un copiste déjà ancien, passer en tête de l'ensemble.

3. Peut-on aller plus loin et former quelque conjecture sur la véritable origine de l'Opuscule des *Définitions?* J'ai parlé plus haut de Geminus; c'est que nous pouvons, par le commentaire de Proclus, nous faire une idée assez exacte de ce que disait Geminus sur ce sujet, de l'ordre qu'il suivait, des notions qu'il développait. Or, si l'on compare l'Opuscule en question, on y retrouve tous les caractères que l'on est amené à reconnaître comme propres au travail de Geminus : les mêmes définitions y sont recueillies; le même ordre est adopté; les idées qui paraissent le plus spéciales sont pareilles. On ne peut dénier la communauté d'origine.

Dira-t-on que Geminus aurait pu utiliser un travail antérieur de Héron, et que ce travail aurait été, par la suite, singulièrement mutilé pour être ramené à sa forme actuelle? Ce serait le seul moyen de sauver l'attribution à Héron. Mais une telle conjecture, bien improbable en elle-même, ne peut guère résister à un examen plus approfondi.

Si l'on se demande, en effet, à quelle époque et par qui l'Opuscule des *Définitions* a été amené, sinon à sa forme actuelle, du sans doute au compilateur postérieur à Proclus, au moins à celle que lui avait donnée l'auteur des *Prolégomènes*, il faut au moins, eu égard à la Table métrologique qui suit, descendre au IIIe siècle de notre ère. Dès lors, on pense naturellement à Anatolius, des écrits duquel le dernier compilateur a tiré la presque totalité de ce qu'il n'a pas copié dans Proclus, qu'il ait d'ailleurs ou non marqué l'origine de ces extraits.

Or nous avons vu (1) qu'Anatolius avait lui-même compilé Geminus : quoi de plus naturel dès lors que de conjecturer que c'est lui qui est le véritable auteur des *Prolégomènes* (2), et qu'il en a extrait la substance de la *Théorie des Mathématiques*, utilisée de même plus tard par Proclus?

4. En résumé, comme fonds, l'Opuscule des *Définitions* remonte bien au Ier siècle avant l'ère chrétienne, et c'est là ce qui en fait la valeur. Comme forme, il se trouve incorporé dans des *Prolégomènes* rédigés au plus tôt vers le IIIe siècle de notre ère et introduits à leur tour dans une compilation postérieure au Ve.

Le rédacteur des *Prolégomènes* (Anatolius?) a puisé, non pas dans un Ouvrage de Héron, mais bien dans celui de Geminus, en sorte que les extraits qu'il nous a conservés, relatifs aux Définitions géométriques, complètent heureusement ceux que nous donne Proclus sur le même sujet.

Dès lors, pour restituer, autant qu'il est possible, l'histoire des

---

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1885, p. 96 et suiv.

(2) Dans cette hypothèse, le Διονύσιος λαμπρότατος, auquel sont dédiés les *Prolégomènes*, pourrait être identifié avec Denys, l'évêque d'Alexandrie, contemporain d'Anatolius.

Définitions, il faut s'appuyer sur ces deux documents, Proclus et le Pseudo-Héron, en les comparant constamment et en les utilisant sur le même pied, puisqu'à vrai dire ils n'en représentent qu'un seul, Geminus.

Il ressort de ce fait qu'après la période alexandrine les questions relatives aux Définitions ont été considérées comme épuisées dans l'antiquité. Euclide est dès lors classique sans aucune restriction, et la Géométrie élémentaire, regardée comme parfaite, reste absolument stationnaire.

Est-il possible maintenant, au moins pour cette question des Définitions, de faire la part des deux périodes antérieures, avant et après Euclide? C'est ce qu'il nous reste à examiner.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. GOMES TEIXEIRA A M. JULES TANNERY.

.... La quantité

$$\frac{1-x^m}{1+x^m},$$

inverse de celle que vous avez considérée dans votre lettre à M. Weierstrass [1], donne lieu à l'observation suivante : L'identité

$$\frac{1-x^m}{1+x^m}=\frac{2(1-x)}{2(1+x)}+\frac{2x(1-x)}{(1+x)(1+x^2)}+\ldots+\frac{2x^{m-1}(1-x)}{(1+x^{m-1})(1+x^m)}$$

montre que la somme de la série

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{2x^{m-1}(1-x)}{(1+x^{m-1})(1+x^m)}$$

est égale à $+1$ ou à -1 suivant que l'on a

$$|x|<1 \qquad \text{ou} \qquad |x|>1,$$

---

[1] WEIERSTRASS, *Abhandlungen aus der Functionenlehre*, p. 102. C'est à M. Seidel (*Journal de Crelle*, t. 73; 1871) que l'on doit d'avoir remarqué quelle était la limite de cette quantité pour m infini; voir, à ce sujet, dans le tome 22 des *Mathematische Annalen*, un article de M. Pringsheim. J. T.

en sorte que cette série peut jouer le même rôle que celle que vous avez considérée [1]; mais on peut considérer cette série à un autre point de vue d'où elle me paraît acquérir une importance propre.

Si l'on veut former une fonction d'une variable réelle qui soit ponctuellement discontinue par la méthode de la *condensation des singularités* de Hankel, il faut construire d'abord une fonction qui soit nulle pour $x = 0$, et qui tende vers deux limites différentes quand x tend vers zéro par des valeurs positives ou des valeurs négatives : or, sans recourir à la théorie des séries trigonométriques, on a une série dont les termes sont des fonctions rationnelles de x et qui satisfait aux conditions imposées : c'est précisément la série précédente dans laquelle on remplace x par $x + 1$; la somme de cette série est égale, quelle que soit la variable réelle x supérieure à -1, à la limite, pour m infini, de

$$\frac{1-(x+1)^m}{1+(x+1)^m},$$

c'est-à-dire à $+1$, 0 ou -1 suivant que x est négatif, nul ou positif.

SUR UN POINT DE LA THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

PAR M. ÉMILE PICARD.

On sait que le système d'équations différentielles

$$(A)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \end{array}\right.$$

où les f sont des fonctions holomorphes de $x, y_1, y_2, \ldots, y_m$

[1] Après M. Schroder (*Schlomilch's Zeitschrift*, [illegible] année, p. 184). J. T.

dans le voisinage de

$$x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0,$$

admet un système d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$, holomorphes dans le voisinage de x_0 et prenant respectivement pour $x = x_0$ les valeurs $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$.

Dans le cas d'une seule équation ($m = 1$), MM. Briot et Bouquet démontrent, dans leur Mémoire bien connu sur les équations différentielles, qu'il n'existe pas d'autre intégrale que l'intégrale holomorphe, satisfaisant aux conditions initiales. Ainsi, soit l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

f étant holomorphe dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$. Il n'existe pas d'autre intégrale que l'intégrale holomorphe, s'annulant pour $x = 0$. Il n'est d'ailleurs pas inutile de préciser ce qu'on doit entendre par intégrale s'annulant à l'origine; on doit désigner ainsi une fonction y tendant d'une manière continue vers zéro, quand x tend vers l'origine en suivant un certain chemin C de longueur *finie*. Rappelons rapidement la démonstration de Briot et Bouquet : y_1 désignant l'intégrale holomorphe, soit $y = y_1 + z$ une autre intégrale que l'intégrale holomorphe, z s'annulera pour $x = 0$, et l'équation en z aura la forme

$$\frac{dz}{dx} = z\,\varphi(z, x);$$

dans $\varphi(z, x)$ on remplace z par sa valeur, et l'on peut écrire

$$\frac{dz}{dx} = z\,\psi(x).$$

$\psi(x)$ étant une fonction continue de x, le long du chemin C. L'équation précédente donne

$$\log z - \log z_0 = \int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx,$$

résultat impossible; car, quand x tend vers zéro, le second membre reste fini et le premier grandit sans limite, puisque z tend vers zéro.

On voit que la démonstration précédente est essentiellement

bornée au cas de $m = 1$. Le théorème est exact cependant dans le cas général, et je me permets d'indiquer ici la marche que je suis dans mon cours à la Faculté des Sciences.

Bornons-nous d'abord au cas de deux équations. Soit donc le système

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z), \end{cases}$$

f et φ étant holomorphes dans le voisinage de $x = y = z = 0$. Nous supposons qu'on remplace y par $y_1 + y'$ et z par $z_1 + z'$, en désignant par (y_1, z_1) l'intégrale holomorphe. Par suite, les équations (1) prendront, après suppression des accents, une forme analogue, mais de plus $f(x, y, z)$ et $\varphi(x, y, z)$ s'annuleront alors pour $y = 0$, $z = 0$, quel que soit x. Partons donc de suite des équations (1) ainsi préparées.

Nous allons effectuer le changement de fonctions

$$y = P(u, x),$$
$$z = v + Q(u, x),$$

u et v désignant les nouvelles fonctions, P et Q étant pour le moment des fonctions holomorphes de u et x, dans le voisinage de $u = 0$, $x = 0$, et s'annulant pour ces valeurs que nous allons déterminer dans un instant. Les équations (1) deviennent

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial P}{\partial x} = f(x, P, Q) + v\,F(P, Q, x), \\ \dfrac{dv}{dx} + \dfrac{\partial Q}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \varphi(x, P, Q) + v\,\Phi(P, Q, x). \end{cases}$$

Or posons

$$\frac{\partial P}{\partial x} = f(x, P, Q),$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \varphi(x, P, Q);$$

on peut choisir des fonctions de x et u vérifiant ces deux équations. Soit, par exemple,

$$P = u, \qquad Q = u, \qquad \text{pour } x = 0$$

On tirera des équations P et Q fonctions holomorphes de x et u, dans le voisinage de $x = 0$, $u = 0$; de plus, les coefficients de toutes les puissances de x contiendront u en facteur, c'est-à-dire que

$$P(0, x) = 0, \qquad Q(0, x) = 0, \qquad \text{quel que soit } x.$$

D'ailleurs $\frac{\partial P}{\partial u}$ se réduit à l'unité pour $u = 0$, $x = 0$.

La première des équations (2) montre donc que $\frac{du}{dx} = K v$, K étant holomorphe en u, v et x, et, en substituant dans la seconde, on a pareillement

$$\frac{dv}{dx} = K_1 v,$$

K_1 étant également holomorphe. On peut maintenant suivre la marche employée par Briot et Bouquet; on en conclut que v et par suite u sont identiquement nulles, et il en est de même alors pour y et z.

Les considérations précédentes s'appliquent à un nombre quelconque d'équations. Partant du système (A), où nous supposons de suite que les f s'annulent pour

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad y_m = 0,$$

quel que soit x, on fera le changement de fonctions

$$\begin{aligned}
y_1 &= P_1(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, x),\\
y_2 &= P_2(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
y_{m-1} &= P_{m-1}(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, x),\\
y_m &= v + P_m(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, x),
\end{aligned}$$

les P satisfaisant aux équations

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_1}{\partial x} &= f_1(x, P_1, P_2 \ldots, P_m),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{\partial P_m}{\partial x} &= f_m(x, P_1, P_2, \ldots, P_m).
\end{aligned}$$

On pourra se donner arbitrairement $P_1, P_2, \ldots, P_m$ pour $x = 0$, soit, par exemple,

$$P_1 = u_1, \qquad P_2 = u_2, \qquad \ldots, \qquad P_{m-1} = u_{m-1}, \qquad P_m = 0;$$

on aura alors pour $P_1, P_2, \ldots, P_m$ des fonctions holomorphes de $x, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$, qui s'annuleront pour

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_{m-1} = 0,$$

quel que soit x.

Le système (A) devient alors

$$\begin{gathered}
\frac{\partial P_1}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial P_1}{\partial u_{m-1}}\frac{du_{m-1}}{dx} = A_1 v, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{\partial P_{m-1}}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial P_{m-1}}{\partial u_{m-1}}\frac{du_{m-1}}{dx} = A_{m-1} v, \\
\frac{dv}{dx} + \frac{\partial P_m}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial P_m}{\partial u_{m-1}}\frac{du_{m-1}}{dx} = A_m v,
\end{gathered}$$

les A étant holomorphes. D'ailleurs le déterminant fonctionnel $\frac{D(P_1, P_2, \ldots, P_{m-1})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1})}$ n'est pas nul, puisqu'il se réduit à l'unité pour $x = 0$, $u_1 = \ldots = u_{m-1} = 0$.

On tirera donc des $(m-1)$ premières équations

$$\frac{du_1}{dx} = K_1 v, \qquad \ldots, \qquad \frac{du_{m-1}}{dx} = K_{m-1} v,$$

et enfin de la dernière

$$\frac{dv}{dx} = K_m v,$$

K_m étant holomorphe; la démonstration s'achève alors comme plus haut.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Berloty (B.). — *Théorie des quantités complexes à n unités principales.* In-4°, 125 p. Paris, Gauthier-Villars.

Berthold, Ewald, Rich. — *Ueber den Umdrehungskegel, welcher ein System dreier conjugirten Durchmesser einer dreiachsigen Ellipsoïdes enthält, nebst Anwendungen.* Inaugural Dissertation, 34 p. in-4°. Erlangen.

Gruey. — *Leçons d'Astronomie, rédigées conformément au programme de la licence.* In-4°, 362 p. Paris, Hermann.

Hermes (O.). — *Das Sechsflach. Ein Beitrag zur analytischen Geometrie des Raumes.* In-4°, 25 p. Berlin, Gaertner, 1 M.

Legendre (A.-M.). — *Zahlentheorie.* Traduit en allemand par *H. Maser.* 2 vol. gr. in-8°, Leipsig, Teubner, 11 M. 60 pf. chaque vol.

Weltzien (C.). — *Zur Theorie der homogenen Substitutionen.* In-4°, 20 p. Berlin, Gaertner, 1 M.

Zeuthen (H.-G.). — *Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthum.* Traduit en allemand par *R. Fischer-Benzon.* Gr. in-8°, 320 p. Kopenhagen, Höst et Sohn. 15 M.

Cerrutti (V.). — *Sur la déformation d'une sphère homogène isotrope.* In-8°, 12 p. Paris, Chaix.

Frolow. — *Les carrés magiques; nouvelle étude.* In-8°, 46 p. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr.

Gunther (S.). — *Grundlinien der Mathematischen Geographie und elementaren Astronomie.* 2e édit., gr. in-8°, 157 p. München, Th. Ackermann. 2 M.

Jourjon (C.). — *La divisibilité des fonctions entières démontrée sans les imaginaires.* In-8°, 47 p. Paris, Gauthier-Villars. 2 fr.

Möbius (A.-F.). — *Gesammelte Werke.* 3t Band, herausgegeben von *F. Klein.* In-8°, 580 p. Leipsig, Hirzel. 14 M.

Neuberg (J.). — *Sur les surfaces anallagmatiques.* In-8°, 10 p. Paris, Chaix.

NEUMANN (C.). — *Ueber die Kugelfunctionen* P_n *und* Q_n, *insbesondere über die Entwicklung der Ausdrücke*

$$P_n\left(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi\right)$$

und

$$Q_n\left(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi\right),$$

nach dem Cosinus der Vielfachen von Φ. Gr. in-8°, 76 p. Leipsig, Hirzel, 2 M. 40 pf.

SIACCI (F.). — *Un procédé d'intégration des formules balistiques.* In-8°, 10 p. Nancy, Berger-Levrault et Cie.

WEINOLDT (ERNST). — *Ueber Functionen welche gewissen Differenzengleichungen n Ordnung Genüge leisten.* Inaugural Dissertation. 41 p. Kiel.

WEST (E.). — *Exposé des méthodes générales en Mathématiques; résolution et intégration des équations, applications diverses, d'après Hoëné Wronski.* 314 p. Paris, Gauthier-Villars. 12 fr.

MATHIEU (E.). — *Théorie du potentiel et ses applications à l'électrostatique et au magnétisme.* IIe Partie : *Électrostatique et Magnétisme.* In-4°, 235 p. Paris, Gauthier-Villars. 12 fr.

BURMESTER (L.). — *Lehrbuch der Kinematik.* 1re livraison. 1 vol. gr. in-8°, avec atlas. Leipsig, Felix. 16 M.

TANNERY (J.). — *Deux leçons de Cinématique.* In-4°, 40 p. Paris, Gauthier-Villars. 2 fr. 50.

1re Part

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

STOLZ (O.). — VORLESUNGEN UEBER ALLGEMEINE ARITHMETIK, NACH DEN NEUEREN ANSICHTEN. Erster Theil : Allgemeines und Arithmetik der reellen Zahlen. 1 vol. in-8°, VI-344 p. Zweiter Theil : Arithmetik der complexen Zahlen mit geometrischen Anwendungen. 1 vol. in-8°, VIII-326 p. Leipzig, Teubner, 1885-1886.

La première Partie du Livre de M. Stolz traite des nombres, des opérations à effectuer sur les nombres, de la mesure des grandeurs, des séries et des produits infinis à termes réels; elle est manifestement l'œuvre d'un mathématicien philosophe et ne peut manquer d'intéresser vivement tous ceux qui se préoccupent des questions d'enseignement. Les concepts de grandeur, de nombre et d'opération sont soumis à une critique subtile et pénétrante, ainsi que les idées émises à ce sujet par Grassmann et par Hankel. Dans le Chapitre relatif à la mesure des grandeurs, les postulats que l'on admet d'habitude plus ou moins explicitement sont dégagés et précisés de la façon la plus heureuse; ceux qui ont à enseigner les éléments des Mathématiques trouveront là, comme dans l'exposition de la théorie des proportions d'après Euclide, l'objet d'utiles réflexions. La théorie des nombres irrationnels repose sur les fondements qu'ont adoptés M. Heine et M. G. Cantor : c'est une introduction indispensable à la théorie des fonctions d'une variable réelle et à celle des séries, qui termine le premier Volume.

La seconde Partie est consacrée à la théorie des nombres complexes et des fonctions d'une variable complexe; après avoir étudié les nombres formés au moyen de deux unités, M. Stolz expose les résultats négatifs obtenus récemment par M. Dedekind et M. Weierstrass sur les nombres complexes formés au moyen de n unités; il passe ensuite à la représentation géométrique des nombres complexes ordinaires : c'est l'occasion de dire quelques mots de la méthode des équipollences et d'en indiquer diverses applications à la Trigonométrie et à la Géométrie. Le concept de fonction et les notions qui s'y rapportent sont ensuite étendus au cas d'une variable complexe. L'étude des fonctions rationnelles

entières, celle des séries ordonnées suivant les puissances entières d'une variable sont faites ensuite avec les développements qu'elles comportent, les fonctions exponentielles, circulaires, logarithmiques, fournissent des exemples essentiels des considérations précédentes; enfin l'Ouvrage se termine par deux Chapitres sur les produits infinis et les fractions continues.

La qualification *nach den neueren Ansichten*, ajoutée par M. Stolz au titre de son Livre, est pleinement justifiée par la rigueur de l'exposition, la profondeur des aperçus et la richesse des renseignements qu'il a su rassembler. J. T.

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES, publiées par un Comité de rédaction composé des professeurs de Mathématiques, de Physique et de Chimie de la Faculté. In-4°. Paris, Gauthier-Villars, 1887.

Dans la séance de l'Académie des Sciences du 21 mars de la présente année, M. Hermite a présenté en ces termes le premier fascicule des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse :*

« Ce Recueil paraît sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique et de la municipalité de Toulouse, avec le concours des Conseils généraux de la Haute-Garonne et des Hautes-Pyrénées. Les premiers articles qu'il contient ont pour titres :

» *Sur les équations différentielles linéaires et les groupes algébriques de transformations;* par M. E. PICARD.

» *Sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible;* par M. P. APPELL.

» *Sur un problème relatif aux courbes à double courbure;* par M. E. GOURSAT.

» *Spectres d'absorption des chromates alcalins et de l'acide chromique;* par M. P. SABATIER.

» *Questions d'Hydrodynamique;* par M. MARCEL BRILLOUIN.

» Les géomètres et les physiciens apprécieront la valeur de ces travaux et l'Académie accordera volontiers sa sympathie à une publication qui accroîtra le mouvement scientifique dont la ville

de Toulouse est maintenant le siège, mouvement qui est dû, pour une grande part, au mérite des professeurs de la Faculté des Sciences et au zèle éclairé de leur doyen, M. Baillaud. »

M. Joseph Bertrand a ajouté qu'il suffisait aux *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* pour n'avoir rien à envier aux meilleures publications des universités étrangères, de rester à la hauteur où les place immédiatement leur premier fascicule.

La grande autorité des maîtres qui ont prononcé ces paroles si encourageantes nous dispensera d'insister sur la valeur de ces *Annales;* nous nous contenterons d'indiquer le caractère de la publication : elle est essentiellement consacrée aux Mathématiques, à la Physique et à la Chimie; le Comité de rédaction est formé des professeurs titulaires de la Faculté. Les professeurs, chargés de cours et maîtres de conférences qui enseignent actuellement à la Faculté des Sciences de Toulouse sont : MM. Baillaud, Legoux, Stieltjes, Andoyer, Rouquet pour les Mathématiques; MM. Berson et Chauvin pour la Physique; MM. Sabatier et Destrem pour la Chimie; parmi les hommes qui, dans ces dernières années, ont enseigné à la même Faculté, et qui lui restent attachés par les souvenirs mêmes qu'ils y ont laissés et l'illustration qu'ils lui ont donnée, il convient de citer MM. Tisserand, Émile Picard, Goursat, G. Kœnigs, Brillouin.

On voit que les maîtres qui ont appartenu et qui appartiennent à la Faculté de Toulouse suffiraient amplement à alimenter le Recueil que l'on vient de fonder; ce Recueil toutefois reste ouvert aux savants étrangers à la Faculté, comme le montrent suffisamment les deux fascicules parus.

Les Mémoires contenus dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* seront analysés dans la seconde Partie du *Bulletin;* mais nous tenons à signaler de suite une innovation très heureuse qui rendra ce Recueil précieux aux travailleurs : le Comité de rédaction annonce, dans la Préface, des articles de bibliographie sur des sujets spéciaux; ces articles ne seront pas des listes de titres de Mémoires et d'Ouvrages, mais bien des résumés succincts des principaux résultats de la Science sur le sujet traité, avec les renseignements bibliographiques désirables,

en sorte qu'ils mettront le lecteur en mesure d'étudier à fond ce sujet. Le premier fascicule contient un article de ce genre, du plus haut intérêt, sur l'Hydrodynamique : il est dû à M. Brillouin ; notre collaborateur, M. G. Kœnigs, donnera dans la suite un article sur les complexes de droites.

Ajoutons que M. Gauthier-Villars a donné tous ses soins au côté matériel de l'entreprise. On ne peut, en France, que le comparer à lui-même ; mais, pour la beauté de l'exécution typographique, les *Annales de Toulouse* sont au niveau des belles publications qui honorent sa maison. J. T.

BIERMANN (O.). — THEORIE DER ANALYTISCHEN FUNCTIONEN. 1 vol. in-8°, x-457 p. Leipzig, Teubner, 1887.

Le Livre de M. Biermann est un *manuel* de la théorie des fonctions, d'après la doctrine de M. Weierstrass. Les publications de M. Weierstrass et de ses élèves permettent, il est vrai, de reconstruire à peu près entièrement cette doctrine : un Traité d'ensemble, comme celui de M. Otto Biermann, ordonné, concis et complet, n'en rendra pas moins de grands services.

L'Ouvrage est divisé en huit Chapitres :

Le premier, consacré aux éléments de l'Arithmétique, commence à la notion de nombre entier, développe la notion de nombre irrationnel et de nombre complexe et se termine par la considération des sommes et produits d'un nombre infini d'éléments ou de fonctions. Le deuxième Chapitre se rapporte à la notion de variable, le champ de la variable peut être illimité ou limité : dans ce dernier cas, s'introduit la notion d'ensemble de points (*Punktmenge*). L'auteur traite ensuite des propriétés élémentaires des fonctions rationnelles, entières ou non. Le troisième Chapitre concerne les séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de la variable ; après avoir établi les propriétés essentielles d'une telle série, on montre comment elle constitue un *élément* de fonction, laquelle fonction s'obtient par *continuation* ; on acquiert ainsi la notion de *fonction analytique monogène*. Les équations algébriques, les équations différentielles ordinaires, les équations aux dérivées partielles se résolvent au

moyen de fonctions analytiques : c'est ce qui fait l'objet du quatrième Chapitre. Le cinquième traite des fonctions transcendantes élémentaires. Le suivant se rapporte à la représentation des fonctions analytiques uniformes; on y trouvera le théorème de M. Weierstrass sur la décomposition en facteurs primaires, le théorème de M. Laurent et celui de M. Mittag-Leffler. La théorie des fonctions doublement périodiques est la matière de la première partie du septième Chapitre; la seconde partie est une introduction à la théorie des fonctions qui se reproduisent quand on fait subir à la variable une substitution linéaire. Enfin le dernier Chapitre est consacré à la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables. J. T.

MÉLANGES.

NOTE SUR LA THÉORIE DES QUANTITÉS COMPLEXES FORMÉES AVEC n UNITÉS PRINCIPALES;

PAR M. ÉDOUARD WEYR.

1. Considérons des quantités complexes de la forme

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n,$$

formées avec n unités linéairement indépendantes $e_1, e_2, \ldots, e_n$, les lettres grecques désignant des quantités réelles ou imaginaires.

Définissons la somme et la différence de deux telles quantités

$$a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, \qquad b = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$$

par les formules

$$a + b = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_j) e_j, \qquad a - b = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \beta_j) e_j.$$

et leur produit par

$$ab = \sum_{(i,k)} \alpha_j \beta_k e_j e_k \qquad (j, k = 1, \ldots, n)$$

en supposant

$$e_j e_k = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{ijk} e_i,$$

les n^3 quantités réelles ou imaginaires ε_{ijk} étant choisies de manière qu'on ait

$$(e_i e_j) e_k = e_i (e_j e_k).$$

Dans un tel système de quantités complexes la multiplication est associative sans être nécessairement commutative.

2. Soit

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$$

une quantité donnée. Formons ses puissances successives

$$x^2 = \sum_{j=1}^{n} \xi'_j e_j, \qquad x^3 = \sum_{j=1}^{n} \xi''_j e_j, \qquad \ldots.$$

Soit

$$(1) \qquad x^{m+1} + \gamma_1 x^m + \ldots + \gamma_m x = 0. \qquad (m \geq n)$$

l'équation de degré minimum satisfaite par x, c'est-à-dire supposons les m systèmes de n quantités (ξ), (ξ'), ..., $(\xi^{(m-1)})$ linéairement indépendants, tandis qu'on a

$$(\xi^{(m)}) + \gamma_1 (\xi^{(m-1)}) + \ldots + \gamma_m (\xi) = (0).$$

en désignant par (0) un système de n zéros.

Soit maintenant donnée la série

$$(2) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu.$$

et *proposons-nous de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle définisse une quantité complexe.*

A l'aide de l'équation (1), il viendra

$$\sum_{\nu=1}^{s} \alpha_\nu x^\nu = \alpha_m^{(s)} x^m + \alpha_{m-1}^{(s)} x^{m-1} + \ldots + \alpha_1^{(s)} x.$$

$$\sum_{\nu=s+1}^{s+s'} \alpha_\nu x^\nu = \beta_m^{(s,s')} x^m + \beta_{m-1}^{(s,s')} x^{m-1} + \ldots + \beta_1^{(s,s')} x.$$

La série (2) définira une quantité complexe si, étant donnée une quantité positive arbitraire ε, on peut assigner un entier p tel que, pour tout entier $s > p$, les m valeurs absolues

$$|\beta_h^{(s,s')}| \qquad (h = 1, \ldots, m)$$

soient plus petites que ε.

Cette condition est évidemment suffisante, et elle est nécessaire parce que les m quantités $x, x^2, \ldots, x^m$ sont linéairement indépendantes. Il s'agit maintenant de voir dans quelles circonstances cette condition se trouve remplie.

Pour les systèmes de quantités complexes considérés par M. *Weierstrass* dans sa Note *Zur Theorie der aus n Hauptcinheiten gebildeten complexen Grössen* (*Göttinger Nachrichten,* 1884), le problème proposé se résout immédiatement si l'on décompose x en ses composants, comme l'a remarqué M. Berloty dans sa thèse *Théorie des quantités complexes à n unités principales* (n° 84); Paris, 1884.

Pour le résoudre dans le cas général, posons

$$\varphi(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \zeta^\nu.$$

ζ étant une quantité complexe ordinaire située dans le cercle de convergence de cette série, et appelons $0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ les racines de l'équation

$$(3) \qquad \mu^{m+1} + \gamma_1 \mu^m + \ldots + \gamma_m \mu = 0.$$

Pour que (2) *définisse une quantité complexe, il faut et il suffit que les racines* $\mu_1, \ldots, \mu_m$ *se trouvent dans le cercle de convergence de la série* $\varphi(\zeta)$.

A la vérité, ces racines peuvent même être sur la circonférence de ce cercle, si toutefois la série $\varphi(\zeta)$ et ses dérivées considérées plus bas convergent pour $\zeta = \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, comme cela découle immédiatement de la démonstration qu'on va lire.

3. Pour rendre la démonstration plus commode, supposons d'abord que l'équation (3) n'ait que des racines simples.

On a évidemment

$$\sum_{\nu=s+1}^{s+s} \alpha_\nu \mu_k^\nu = \beta_m^{(s,s')} \mu_k^m + \ldots + \beta_1^{(s,s')} \mu_k \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

Si donc on suppose les μ_k dans le cercle de convergence de la série $\varphi(\zeta)$, on peut prendre s assez grand pour que l'on ait

$$|\beta_m^{(s,s')} \mu_k^m + \ldots + \beta_1^{(s,s')} \mu_k| < \varepsilon' \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

ε' étant une quantité positive arbitraire. On aura donc

$$(4) \qquad \beta_m^{(s,s')} \mu_k^m + \ldots + \beta_1^{(s,s')} \mu_k = \varepsilon' \eta_k \qquad (k = 1, \ldots, m),$$

les m quantités η_k ayant des valeurs absolues plus petites que 1.

Posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_1^m, & \mu_1^{m-1}, & \ldots, & \mu_1 \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \mu_m^m, & \mu_m^{m-1}, & \ldots, & \mu_m \end{vmatrix},$$

et remarquons que le déterminant Δ est différent de zéro; de plus appelons $\Delta_k^{(h)}$ le mineur de Δ correspondant à l'élément μ_k^h. On tire de (4)

$$\Delta \beta_h^{(s,s')} = \varepsilon' (\eta_1 \Delta_1^{(h)} + \ldots + \eta_m \Delta_m^{(h)}) \qquad (h = 1, \ldots, m).$$

Si l'on désigne donc par ε'' celle des valeurs absolues

$$\left| \frac{1}{\Delta} (\Delta_1^{(h)} + \ldots + \Delta_m^{(h)}) \right| \qquad (h = 1, \ldots, m),$$

qui est la plus grande, on aura

$$|\beta_h^{(s,s')}| < \varepsilon' \varepsilon'' \qquad (h = 1, \ldots, m),$$

ce qui montre que les conditions énoncées sont suffisantes. Mais elles sont aussi nécessaires; car, si l'on peut rendre toutes les valeurs $|\beta_h^{(s,s')}|$ aussi petites qu'on veut, en mettant pour s un entier suffisamment grand, la même chose a lieu pour

$$|\beta_m^{(s,s')} \mu_k^m + \ldots + \beta_1^{(s,s')} \mu_k| \qquad (k = 1, \ldots, m),$$

c'est-à-dire pour

$$\left| \sum_{\nu=s+1}^{s+s} \alpha_\nu \mu_k^\nu \right|.$$

ce qui montre qu'alors en effet les séries $\varphi(\mu_k)$ sont convergentes.

On a maintenant

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu = \bar{\alpha}_m x_m + \bar{\alpha}_{m-1} x^{m-1} + \ldots + \bar{\alpha}_1 x,$$

en désignant par $\bar{\alpha}_h$ la limite de $\alpha_h^{(s)}$ pour $s = \infty$.

On a de même

$$\varphi(\mu_k) = \bar{\alpha}_m \mu_k^m + \ldots + \bar{\alpha}_1 \mu_k \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

ou bien

$$\frac{\varphi(\mu_k)}{\mu_k} = \bar{\alpha}_m \mu_k^{m-1} + \ldots + \bar{\alpha}_1.$$

On trouve donc, à l'aide de la formule de Lagrange,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu = x \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi(\mu_k)}{\mu_k \, P'(\mu_k)} \frac{P(x)}{x - \mu_k},$$

où $P(x)$ désigne le produit

$$(x - \mu_1) \ldots (x - \mu_m),$$

et $P'(x)$ sa dérivée prise comme si x était une variable complexe ordinaire.

4. Envisageons maintenant le cas général où l'équation (3) possède les racines distinctes $0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\tau$, leurs degrés de multiplicité étant $1 + \rho, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\tau$, de sorte que

$$\rho + \rho_1 + \ldots + \rho_\tau = m.$$

On a

$$\gamma_m = 0, \qquad \gamma_{m-1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \gamma_{m-\rho+1} = 0, \qquad \gamma_{m-\rho} \lessgtr 0.$$

et la relation (1) devient

$$x^{m+1} + \gamma_1 x^m + \ldots + \gamma_{m-\rho} x^{\rho+1} = 0.$$

A l'aide de cette relation, on aura, dès que s surpasse ρ,

$$\sum_{\nu=s+1}^{s+s'} \alpha_\nu x^\nu = \beta_m^{(s,s')} x^m + \beta_{m-1}^{(s,s')} x^{m-1} + \ldots + \beta_{\rho+1}^{(s,s')} x^{\rho+1}.$$

de sorte que

$$\beta_\rho^{(s,s')} = 0, \qquad \beta_{\rho-1}^{(s,s')} = 0, \qquad \ldots, \qquad \beta_1^{(s,s')} = 0.$$

Supposons les racines $\mu_1, \ldots, \mu_\tau$ dans le cercle de convergence de la série $\varphi(\zeta)$; alors non seulement la série $\varphi(\mu_k)$ sera convergente, mais aussi ses dérivées $\varphi'(\mu_k)$, $\varphi''(\mu_k)$, ... On peut donc prendre s assez grand pour que les sommes

$$\sum_{\nu=s+1}^{s+s'} \alpha_\nu \mu_k^\nu, \quad \frac{d}{d\mu_k} \sum_{\nu=s+1}^{s+s'} \alpha_\nu \mu_k^\nu, \quad \frac{d^2}{d\mu_k^2} \sum_{\nu=s+1}^{s+s'} \alpha_\nu \mu_k^\nu, \quad \ldots$$
$$(k = 1, \ldots, \tau)$$

deviennent aussi petites que l'on veut, quel que soit s'.

Mais on a pour toute valeur de μ

$$\sum_{\nu=s+1}^{s+s'} \alpha_\nu \mu^\nu = B(\mu)\chi(\mu) + \beta_m^{(s,s')}\mu^m + \ldots + \beta_{\rho+1}^{(s,s')}\mu^{\rho+1},$$

en désignant par $\chi(\mu)$ le polynôme

$$\mu^{m+1} + \gamma_1\mu^m + \ldots + \gamma_{m-\rho}\mu^{\rho+1},$$

et par $B(\mu)$ une fonction rationnelle et entière de μ.

Si l'on dérive cette identité $(\rho_k - 1)$ fois de suite suivant μ et si l'on fait après $\mu = \mu_k$, on a les ρ_k équations

$$S = \beta_m^{(s,s')}\mu_k^m + \ldots + \beta_{\rho+1}^{(s,s')}\mu_k^{\rho+1},$$
$$\frac{dS}{d\mu_k} = m\beta_m^{(s,s')}\mu_k^{m-1} + \ldots + (\rho+1)\beta_{\rho+1}^{(s,s')}\mu_k^\rho,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{d^{\rho_k-1}S}{d\mu_k^{\rho_k-1}} = m(m-1)\ldots(m-\rho_k+2)\beta_m^{(s,s')}\mu_k^{m-\rho_k+1} + \ldots + (\rho_k-1)\ldots 2.1.\beta_{\rho_k-1}^{(s,s')},$$

où l'on a écrit S au lieu de $\sum_{\nu=s+1}^{s+s'} \alpha_\nu \mu_k^\nu$. On a ainsi, en donnant à k les valeurs $1, 2, \ldots, \tau$, en somme $\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_\tau = m - \rho$ équations. On peut rendre toutes ces $m - \rho$ expressions aussi petites qu'on veut en prenant pour s un entier assez grand, et comme le déterminant des coefficients de $\beta_m^{(s,s')}, \ldots, \beta_{\rho+1}^{(s,s')}$ dans

ces expressions est différent de zéro [1], on en conclut, comme au n° 3, que les $m-\rho$ quantités $\beta_m^{(s,s')}, \ldots, \beta_{\rho+1}^{(s,s')}$ deviennent aussi petites qu'on veut, pour des entiers s suffisamment grands. Les conditions énoncées à la fin du n° 2 sont donc suffisantes pour que la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu$ définisse une quantité complexe; on voit facilement, comme au n° 3, qu'elles sont nécessaires. Par cela notre proposition se trouve démontrée.

Maintenant, en partant de l'identité

$$\sum_{\nu=1}^{s} \alpha_\nu \mu^\nu = A(\mu)\chi(\mu) + \alpha_m^{(s)}\mu^m + \ldots + \alpha_{\rho+1}^{(s)}\mu^{\rho+1} + \alpha_\rho \mu^\rho + \ldots + \alpha_1 \mu,$$

où $A(\mu)$ désigne une fonction rationnelle et entière de μ, on voit que la somme $\sum_{\nu=1}^{s} \alpha_\nu \mu^\nu$ et ses $\rho_k - 1$ premières dérivées suivant μ coïncident pour $\mu = \mu_k$ respectivement avec le polynôme

$$\alpha_m^{(s)}\mu^m + \ldots + \alpha_1 \mu,$$

et ses $\rho_k - 1$ premières dérivées pour $\mu = \mu_k$. Si l'on fait croître s à l'infini, on voit que $\varphi(\mu_k)$ et ses $\rho_k - 1$ premières dérivées sont respectivement égales au polynôme

$$\bar{\alpha}_m \mu_k^m + \ldots + \bar{\alpha}_{\rho+1}\mu_k^{\rho+1} + \alpha_\rho \mu_k^\rho + \ldots + \alpha_1 \mu_k.$$

et à ses dérivées, en désignant par $\bar{\alpha}_m, \ldots, \bar{\alpha}_{\rho+1}$ les limites de $\alpha_m^{(s)}, \ldots, \alpha_{\rho+1}^{(s)}$ pour $s = \infty$. On trouve donc enfin

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu = \bar{\alpha}_m x^m + \ldots + \bar{\alpha}_{\rho+1} x^{\rho+1} + \alpha_\rho x^\rho + \ldots + \alpha_1 x,$$

les valeurs $\bar{\alpha}_m, \ldots, \bar{\alpha}_{\rho+1}$ étant déterminées par les conditions suivantes.

---

[1] En effet, il est facile de montrer que ce déterminant est égal au produit de certaines puissances des racines $\mu_1, \ldots, \mu_\rho$ et de certaines puissances des différences de ces racines.

Si l'on fait, pour abréger,

$$f(\mu) = \bar{\alpha}_m \mu^m + \ldots + \bar{\alpha}_{\rho+1} \mu^{\rho+1} + \alpha_\rho \mu^\rho + \ldots + \alpha_1 \mu,$$

on doit avoir

$$f(\mu_k) = \varphi(\mu_k), \quad \frac{d f(\mu_k)}{d\mu_k} = \varphi'(\mu_k), \quad \ldots \quad \frac{d^{\rho_k - 1} f(\mu_k)}{d\mu_k^{\rho_k - 1}} = \varphi^{(\rho_k - 1)}(\mu_k),$$
$$(k = 1, \ldots, \tau);$$

de plus, on a évidemment

$$f(0) = 0, \quad \left[\frac{d f(\mu)}{d\mu}\right]_{\mu=0} = \varphi'(0), \quad \ldots \quad \left[\frac{d^\rho f(\mu)}{d\mu^\rho}\right]_{\mu=0} = \varphi^{(\rho)}(0).$$

La fonction $f(\mu)$ de degré m doit donc prendre pour $\mu = 0, \mu_1, \ldots, \mu_\tau$ des valeurs déterminées et y avoir aussi des dérivées déterminées jusqu'aux ordres respectifs ρ, $\rho_1 - 1$, $\rho_2 - 1, \ldots, \rho_\tau - 1$, ce qui fait en somme

$$1 + \rho + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_\tau = m + 1,$$

conditions qui, comme on le sait d'après la formule de Lagrange un peu généralisée, déterminent complètement la fonction $f(\mu)$.

5. Faisons la supposition qu'il existe dans le système de quantités complexes considéré une quantité u, telle qu'on ait

$$ux = xu = x,$$

quel que soit x; supposons de plus qu'il existe la quantité x^{-1}, c'est-à-dire une quantité telle que $xx^{-1} = u$, et envisageons la série

$$(5) \qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu,$$

en y entendant par x^0 la quantité u. Il s'agit de décider sous quelles conditions cette série définit une quantité complexe, respectivement à évaluer cette quantité à l'aide de la fonction $\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_\nu \zeta^\nu$.

Dans le cas actuel, il est impossible que, dans l'équation de degré minimum (1) satisfaite par x, il manque le terme en x, c'est-

à-dire qu'on ait $\gamma_m = 0$. En effet, si l'équation (1) était

$$x^{m+1} + \gamma_1 x^m + \ldots + \gamma_{m-\rho} x^{\rho+1} = 0, \tag{6}$$

ρ étant plus grand que zéro, on en tirerait, en multipliant par $x^{-\rho}$

$$x^{m+1-\rho} + \gamma_1 x^{m-\rho} + \ldots + \gamma_{m-\rho} x = 0,$$

équation de degré moindre que (6), ce qui serait contre l'hypothèse. On a donc bien $\gamma_m \gtrless 0$ et

$$x^{m+1} + \gamma_1 x^m + \ldots + \gamma_m x = 0; \tag{7}$$

si l'on multiplie cette équation par x^{-m-2}, on a

$$x^{-1} + \gamma_1 x^{-2} + \ldots + \gamma_m x^{-(m+1)} = 0, \tag{8}$$

et c'est là l'équation de degré minimum satisfaite par x^{-1}; car de toute équation de degré moindre on tirerait sur le champ une équation satisfaite par x et de degré moindre que $m+1$.

Posons maintenant

$$\varphi(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \zeta^\nu, \qquad \psi(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{-\nu} \zeta^{-\nu},$$

et supposons que la première série converge pour les ζ dont la valeur absolue est moindre que R, la seconde tant que

$$|\zeta^{-1}| < R_1^{-1};$$

soit de plus $R > R_1$.

La série

$$\varpi(\zeta) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu \zeta^\nu$$

convergera dans l'aire comprise entre les deux cercles décrits autour du point O avec les rayons R et R_1,

Pour que (5) définisse une quantité complexe, il faut que la même chose ait lieu pour les deux séries

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu, \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{-\nu} x^{-\nu}.$$

Pour cela, il faut et il suffit que les racines différentes de zéro

des équations

$$(7') \qquad \mu^{m+1} + \gamma_1 \mu^m + \ldots + \gamma_m \mu = 0,$$

$$(8') \qquad \nu + \gamma_1 \nu^2 + \ldots + \gamma_m \nu^{m+1} = 0$$

se trouvent respectivement dans les cercles de convergence des séries $\varphi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$. Mais les racines différentes de zéro de l'équation (8') sont les réciproques des racines différentes de zéro $\mu_1, \ldots, \mu_\tau$ de (7'); donc *il faut et il suffit que les racines de l'équation* (7') *se trouvent dans l'aire comprise entre les deux cercles.*

Dans ce cas la série (5) définit une quantité complexe qu'on évaluera absolument de la même manière que l'on a évalué $\sum_1^\infty \alpha_\nu x^\nu$ au n° 4. En effet, en désignant par $\chi(\mu)$ le membre gauche de l'équation (7'), on a identiquement

$$\sum_{\nu=-s}^{\sigma} \alpha_\nu \mu^\nu = C(\mu)\chi(\mu) + \alpha_m^{(s,\sigma)}\mu^m + \ldots + \alpha_1^{(s,\sigma)}\mu,$$

$C(\mu)$ étant une somme de la forme $\sum_{\nu=-s-1}^{\sigma-m-1} \delta_\nu \mu^\nu$. De là on conclut que la somme $\sum_{-s}^{\sigma} \alpha_\nu \mu^\nu$ et ses $\rho_k - 1$ premières dérivées coïncident pour $\mu = \mu_k$ avec le polynôme

$$\alpha_m^{(s,\sigma)}\mu^m + \ldots + \alpha_1^{(s,\sigma)}\mu,$$

et ses $\rho_k - 1$ premières dérivées, si l'on y met μ_k à la place de μ. En faisant croître s et σ à l'infini, on voit que $\varpi(\mu)$ et ses $\rho_k - 1$ premières dérivées pour $\mu = \mu_k$ sont respectivement égales au polynôme

$$\bar{\alpha}_m \mu^m + \ldots + \bar{\alpha}_1 \mu,$$

et à ses $\rho_k - 1$ premières dérivées pour $\mu = \mu_k$; ici $\bar{\alpha}_m, \ldots, \bar{\alpha}_1$ désignent les limites de $\alpha_m^{(s,\sigma)}, \ldots, \alpha_1^{(s,\sigma)}$ pour $\lim s = \infty$ et $\lim \sigma = \infty$. On a donc enfin

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu = \bar{\alpha}_m x^m + \ldots + \bar{\alpha}_1 x;$$

les coefficients $\bar{\alpha}_m, \ldots, \bar{\alpha}_1$ sont déterminés par cette condition, que le polynôme

$$\bar{\alpha}_m \mu^m + \ldots + \bar{\alpha}_1 \mu$$

et ses $\rho_k - 1$ premières dérivées doivent coïncider pour $\mu = \mu_k$ respectivement avec les valeurs $\varpi(\mu_k), \varpi'(\mu_k), \ldots, \varpi^{(\rho_k - 1)}(\mu_k)$, l'indice k parcourant la série $1, 2, \ldots, \tau$.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

LEGENDRE (A.-M.). — *Zahlentheorie*. Traduit en allemand par M. Maser. Teubner.

LILIENTHAL (R. v.). — *Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der krummen Oberflächen und geradlinigen Strahlensysteme*. Bonn, Weber, 4 M.

BOHM (K.). — *Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpuncte und ihrer Gestaltung*. Leipzig, Hirzel. 2 M.

SIMONS (HEINR.). — *Die harmonische Reihe. Ein Beitrag zur algebraïschen Analysis*. Inauguraldissertation. Halle.

TANNERY (P.). — *La coudée astronomique et les divisions du cercle*. Paris, Leroux.

HERMES (O.). — *Das Sechsflach. Beitrag zur analytischen Geometrie des Raumes*. Programm des Köllnischen Gymnasiums.

ISENKRAHE (C.). — *Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen*. Programm des Realprogymnasiums zu Bonn.

KURSTEN (J.-B.). — *Theorie der magischen Zahlen-Quadrate und Kreise*. Cologne, Theissing. 1 M.

LADRASCH. — *Summation der Reihe, deren Glieder die Potenzen desselben Grades der natürlichen Zahlen mit positiven ganzzahligen Exponenten sind*. Programm des Realgymnasiums zu Dortmund.

SCHULER (W.-F.). — *Die allgemeine Derivation; ein neuer Grund-*

begriff der Funcktionenrechnung, hier insbesondere der Differentialrechnung. Ansbach, Brüger u. Sohn. 3 M.

LERSAWY (W.). — *Ueber den Zusammenhang zwischen den vollständigen Integralen und der allgemeinen Lösung bei partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung.* Wien, Gerold's Sohn. 1 M. 80 pf.

TANNERY (JULES). — *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable.* Paris, Hermann.

WEILLER. — *Études électriques et mécaniques sur les corps solides.* Paris, Michelet, 7 fr. 50.

DUHEM (P.). — *Le potentiel thermodynamique et ses applications à la mécanique chimique et à l'étude des phénomènes électriques.* Paris, Hermann.

ABDANK-ABAKANOWICZ (BR.). — *Les intégraphes; la courbe intégrale et ses applications, étude sur un nouveau système d'intégrateurs mécaniques.* Paris, Gauthier-Villars.

BÖGER (RUD.). — *Ueber Büschel und Netze von ebenen Polarsystemen zweiter Ordnung.* Inauguraldissertation. Leipzig.

BRÜCKNER (MAX.). — *Ueber eine besondere Art der conformen Abbildung einer Ebene auf eine andere.* Inauguraldissertation. Leipzig.

FIEDLER (ERNST-WILH.). — *Ueber eine besondere Classe irrationaler Modulargleichungen der elliptischen Functionen.* Inauguraldissertation. Leipzig.

FINE (HENRY-B.). — *On the singularities of curves of double curvature.* Inauguraldissertation. Leipzig.

GRASSMANN (HARM.). — *Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumcurven und krummen Flächen.* Programm der Hauptschule in Halle.

HAENTZSCHEL (E.). — *Zur Theorie der Funktionen des elliptischen Cylinders.* Programm des Realgymnasiums in Duisburg.

NIMSCH (PAUL). — *Ueber die Perioden der elliptischen Integrale 1. und 2. Gattung als Funktionen der rationalen Invarianten.* Inauguraldissertation. Leipzig.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LAISANT. — Théorie et applications des équipollences. 1 vol. in-8°; xvi-299 p. Paris, Gauthier-Villars, 1887.

M. Laisant avait déjà contribué à faire connaître en France la théorie des équipollences en traduisant le Livre où Bellavitis en avait exposé les principes; il nous donne, aujourd'hui, sur le même sujet, une œuvre personnelle. Son exposition est claire et très agréable à lire; il est à souhaiter qu'elle soit lue, en particulier, de nos professeurs de lycée; ce n'est pas que, à mon avis, cette théorie tout entière, avec son appareil et ses détails, doive pénétrer dans notre enseignement classique, mais les professeurs de Mathématiques spéciales ont plusieurs fois l'occasion d'y toucher; rien ne les empêche d'en introduire les éléments, sans le dire, s'ils le veulent, et de jeter quelques indications qui germeront dans l'esprit de leurs élèves. Quelques-uns de ceux-ci pourront même fort bien lire le Livre de M. Laisant, qui n'est nullement au-dessus de leur portée.

L'exposition de la théorie tient dans une soixantaine de pages; les applications remplissent donc la plus grosse partie du Livre. Elles sont intéressantes et bien choisies. Les unes se rapportent aux propriétés des triangles et des polygones, d'autres à la théorie des courbes, d'autres aux représentations conformes les plus simples, d'autres enfin au mouvement d'une figure plane dans son plan. Ces dernières reproduisent, avec de légères modifications, un Mémoire de l'auteur inséré dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XVII.

Les divers Chapitres sont suivis d'exercices dont les solutions sont quelquefois brièvement indiquées, et qui seront très utiles aux lecteurs qui veulent se familiariser avec la méthode de Bellavitis.

M. Laisant, avec une grande modestie, veut qu'on rapporte au géomètre italien tout le mérite de son Livre. Si ce dernier vivait encore, il serait assurément touché du pieux souvenir que lui consacre son disciple, en même temps qu'il se réjouirait de cette lu-

mineuse exposition, de ces nombreuses et nouvelles illustrations qui viennent montrer la portée de sa méthode. J. T.

HECKER (J.). — Ueber Ruffini's Beweis für die Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung der allgemeinen Gleichung von einem höheren als dem vierten Grade. Dissertation inaugurale. 29 p. in-8°. Bonn, 1886.

On sait que Ruffini a, le premier, énoncé et cherché à démontrer l'impossibilité de résoudre algébriquement l'équation générale d'un degré supérieur à quatre. Ses recherches, parues à Modène en 1813, sont intitulées : *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali.*

Dans son Mémoire resté inachevé *Sur la résolution algébrique des équations*, Abel (1) dit que les raisonnements de Ruffini sont tellement compliqués qu'il est très difficile de juger de leur justesse. M. Hecker montre qu'on peut toutefois tirer parti de ces raisonnements en les éclairant, il est vrai, des résultats dus à Abel; au surplus, M. Sylow (2) avait déjà remarqué que le point faible de la démonstration de Ruffini consistait en ce qu'il suppose, sans démonstration, que les radicaux qui concourent à la résolution de l'équation s'exprimaient rationnellement par les racines. Or c'est là, comme on sait, le premier point sur lequel Abel a porté ses efforts (3); depuis, M. Kronecker (4), par une analyse très simple, a mis ce résultat essentiel en pleine lumière, en décrivant une forme spéciale qui peut être donnée à toute expression explicitement algébrique vérifiant une équation entière $f(x) = 0$, dont les coefficients appartiennent à un domaine de rationnalité donné : cette forme laisse voir clairement d'une part l'enchaînement des radicaux qui figurent dans l'expression algé-

(1) *Œuvres*, 2e éd., t. II, p. 218.
(2) *Ibid.*, p. 93.
(3) T. I, p. 75.
(4) *Vereinfachung des Abel'schen Beweises « der Unmöglichkeit algebraische Gleichungen von höherem Grades als dem vierten allgemein aufzulösen »*, dans les *Monatsberichte* de l'Académie de Berlin, p. 295; 1879.

brique, de l'autre la propriété qu'ont ces radicaux d'être des fonctions entières des racines de l'unité et des racines de l'équation $f(x) = 0$.

M. Hecker commence donc par exposer les recherches de M. Kronecker, puis il reproduit, en les précisant sur quelques points, les explications qu'Abel a données, dans son Mémoire inachevé [1] sur la formation de l'équation irréductible à laquelle satisfait une expression explicitement algébrique donnée. Après avoir ensuite établi l'irréductibilité de l'équation générale du $m^{\text{ième}}$ degré, il arrive à la part de Ruffini, qu'il fait consister dans le théorème suivant :

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_m$ des variables indépendantes, soient F *et f des fonctions rationnelles de ces variables, entre lesquelles existe la relation*

$$f^n = \mathrm{F},$$

où n est un entier positif; si les substitutions

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ x_4 & x_5 & x_1 \end{pmatrix}$$

laissent invariable la fonction F, *ces substitutions ne changent pas non plus la fonction f.*

Encore Ruffini a-t-il eu le tort d'énoncer ce théorème sans supposer que les fonctions f et F fussent rationnelles. Quant à la démonstration que M. Hecker donne du théorème de Ruffini, elle repose sur ce fait que, des deux substitutions cycliques à trois éléments que l'on y considère, on peut déduire une substitution cyclique à cinq éléments. C'est le même principe qu'avait utilisé M. Kronecker dans la partie de sa Communication citée plus haut qui regarde la théorie des substitutions. Ce théorème, joint aux propositions d'Abel, permet de conclure aisément à l'impossibilité de résoudre algébriquement l'équation générale d'un degré supérieur au quatrième.

L'intéressante dissertation de M. Hecker qui, bien que consacrée à Ruffini, se trouve tourner à la plus grande gloire d'Abel,

[1] T. II, p. 230.

élucide un point de l'histoire d'une des plus belles découvertes mathématiques de ce siècle. Au surplus, on ne saurait contester à Ruffini le mérite d'avoir commencé à poser (bien qu'imparfaitement) une question essentielle, et ce mérite est sans doute considérable, s'il est vrai, comme le voulait Abel, que la solution d'une question soit presque entièrement contenue dans la manière de poser cette question. J. T.

P. MANSION. — ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS, AVEC DE NOMBREUX EXERCICES. Quatrième édition, 80 pages in-8°. Paris, Gauthier-Villars.

La première édition de cet opuscule a paru en 1875; la deuxième (première édition allemande) en 1878; la troisième en 1880. Le plan des Éléments est toujours resté le même et le texte de la troisième édition n'a guère été changé, sauf par l'addition de quelques exercices et de quelques démonstrations. Mais la nouvelle édition est précédée d'un Chapitre préliminaire à l'usage des commençants où les premières propriétés des déterminants à deux et à trois lignes sont exposées d'une manière extrêmement élémentaire. Voici les principales subdivisions. *Introduction*. 1. Déterminants à deux lignes et équations linéaires à deux inconnues. 2. Déterminants à trois lignes. 3. Propriétés immédiates. 4. Propriétés des mineurs. 5. Équations linéaires à trois inconnues. 6. Principe de l'addition des lignes. — *Chapitre I*. 1. Permutations d'éléments à un seul indice. 2. Permutations distinctes d'éléments à deux indices. 3. Définition d'un déterminant. 4. Propriétés immédiates. — *Chapitre II*. 1. Propriété des mineurs. 2. Principe de l'addition des lignes ou colonnes. 3. Sommes et produits de déterminants. (Les exercices contiennent le résumé de la théorie des déterminants spéciaux : adjoints, bisymétriques, cyclosymétriques, gauches, hémisymétriques, persymétriques, circulants, continuants.) — *Chapitre III*. Applications. 1. Résolution des équations linéaires. 2. Élimination, dans le cas où les équations sont linéaires (une pouvant être quadratique). 3. Élimination entre deux équations quelconques : méthode dialytique et méthode

de Cauchy. Théorème de Bézout sur l'élimination. — *Appendice.* Définition d'un déterminant par les produits symboliques. Index des termes spéciaux.

P. MANSION. — Théorie de l'élimination entre deux équations algébriques, au moyen des déterminants. I. Théorie *a priori.* II. Théorie *a posteriori,* 86 pages in-8°. Paris, Gauthier-Villars, 1884.

Réunion (avec quelques additions relatives au cas où les racines communes sont multiples) de cinq Notes analysées antérieurement.

V. DWELSHAUVERS-DERY. — Principes de la résistance des matériaux (Deuxième Partie du Cours de Mécanique appliquée professé à l'Université de Liège), 180 pages. Liège, Desoer, 1884.

Le but de l'Ouvrage est de démontrer les formules fondamentales que Reuleaux met en œuvre dans son constructeur. Voici le sommaire des dix-huit sections du Livre. — *Préliminaires.* Rappel des principes de Mécanique nécessaires ultérieurement. 1. Définitions, hypothèses et conventions. 2. Extension ou compression simple. 3. Glissement ou cisaillement simple. 4. Flexion simple. 5. Torsion simple. 6. Flexion et extension composées. 7. Flexion et torsion composées. 8. Enveloppes. 9. Pièces pressées à leurs abouts. 10. Pièce droite reposant sur plusieurs appuis, soumise à des charges parallèles. 11. Déformation de pièces primitivement courbes. 12. Théorie des ressorts. — *Notes.* 1. Intégration graphique (méthode de Rossin et Solin). 2. Résolution graphique des équations. 3. Sur les lignes d'égale tension. 4. Sur le calcul des courroies. 5. Sur le calcul des tourillons. La méthode employée, dans ces deux dernières Notes, est probablement nouvelle et conduit à des résultats que l'expérience a permis de vérifier.

MÉLANGES.

SUR LES CUBIQUES GAUCHES;

PAR M. FERDINAND CASPARY.

Dans un Mémoire inséré au tome C du Journal de M. Kronecker, j'ai donné un théorème général sur la génération des courbes de l'espace, et j'en ai déduit quelques générations pour les cubiques gauches. La méthode employée, basée seulement sur les principes les plus simples de l'intuition, est le résultat de l'étude des Mémoires excellents de M. H. Grassmann qui font partie du volume XLIX du journal cité.

Je me propose ici d'employer la même méthode purement géométrique, dont M. Carvallo [1] vient de donner une exposition aussi élégante que claire, pour déduire quelques propriétés des cubiques gauches que je crois nouvelles et intéressantes. Dans un Mémoire prochain, j'exposerai les principes algébriques qui font la base de ladite méthode et qui forment le lien existant entre la géométrie analytique et la géométrie synthétique.

Quant à ce Mémoire, je vais expliquer dans le premier paragraphe la notation et les principes que j'emploie dans la suite, en renvoyant pour une étude approfondie aux travaux de M. Grassmann, de M. Carvallo et aux miens.

1. *Notations employées. Principes.* — En désignant par P, Q, R, S, ... des *points* dans l'espace, je désignerai par [PQ] la *droite* joignant les deux points P et Q; par [PQR] le *plan* passant par les trois points P, Q, R et par [PQRS] le *tétraèdre* dont les quatre points P, Q, R, S forment les sommets.

Si le volume de ce tétraèdre est égal à zéro, les quatre points P, Q, R, S sont situés dans un plan. Pour cette raison j'exprimerai par l'égalité

$$[PQRS] = 0$$

---

[1] Voir *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XV, p. 158.

que les quatre points P, Q, R, S sont situés dans le même plan. Donc, si π désigne le plan [QRS], ou si q et p désignent les droites [PQ] et [RS], les égalités

$$[P\pi] = 0, \qquad [pq] = 0$$

veulent dire que le point P est situé sur le plan π et que les deux droites p et q se rencontrent.

De plus, le plan qui passe par la droite $p = [RS]$ et le point Q étant désigné par $[pQ]$ ou [QRS], j'exprimerai par les égalités

$$[pQ] = 0, \qquad [QRS] = 0$$

que la droite p passe par le point Q, ou que les trois points Q, R, S sont situés sur la même droite.

D'une façon analogue, en désignant par π, $\varkappa$, ρ, ... des *plans* quelconques, je désignerai par $[\pi\varkappa]$ la *droite* qui est l'intersection de deux plans π et $\varkappa$; je désignerai de plus par $[\pi\varkappa\rho]$ le *point* où les trois plans π, $\varkappa$, ρ se coupent. En conséquence, si la droite $[\pi\varkappa]$ est désignée par r, l'expression $[r\rho]$ désignera le *point* où la droite r rencontre le plan ρ.

On peut résumer les notations précédentes de la manière suivante.

En désignant les points et les droites respectivement par les majuscules et les minuscules de l'alphabet latin; en désignant de plus les plans par les minuscules de l'alphabet grec; un élément dans l'espace, fût-il un point, une droite ou un plan, provenant soit de la jonction, soit de l'intersection des éléments originaux, est désigné par la juxtaposition des lettres représentant les éléments originaux, lesquelles lettres sont renfermées dans deux crochets. Si les éléments sont *incidents,* c'est-à-dire si l'un est situé sur l'autre, l'expression renfermée dans les deux crochets est posée égale à zéro.

Quand une expression renfermée dans deux crochets est composée par des éléments, composés eux-mêmes, j'omettrai quelquefois, pour simplifier la notation, les crochets intérieurs qui renferment les éléments composants.

Par exemple, soient P′, Q′, R′ les points d'intersection de trois droites, situées dans un plan, savoir

$$[A'B'],\ [D'E'];\quad [B'C'],\ [E'F'];\quad [C'D'],\ [F'A'];$$

au lieu de représenter la droite $[P'Q']$ par l'expression

$$[[[A'B'][D'E']]\ [[B'C'][E'F']]],$$

je la représenterai plus simplement ainsi :

$$[A'B'\ D'E'\quad B'C'\ E'F'].$$

De la même manière, j'écrirai l'expression

$$[P'Q'R'] = 0,$$

comme il suit :

$$[A'B'\ D'E'\quad B'C'\ E'F'\quad C'D'\ F'A'] = 0.$$

Cette égalité, exprimant le théorème de *Pascal*, représente, quand le point A' est mobile et quand les autres points sont fixes, une courbe plane du deuxième degré décrite par le point mobile et passant par les cinq points fixes.

Plus généralement, dans le plan, chaque égalité de la forme

$$[PQR] = 0 \qquad \text{ou} \qquad [pqr] = 0,$$

dans laquelle un point mobile entre n fois, représente une courbe plane algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré; dans l'espace, chaque égalité de la forme

$$[PQRS] = 0 \qquad \text{ou} \qquad [\pi\varkappa\rho\sigma] = 0,$$

dans laquelle un point mobile entre n fois, représente une surface algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré. Ces deux théorèmes féconds sont dus à M. Grassmann (¹).

J'ai ajouté dans mon Mémoire précité celui-ci que, dans l'espace, chaque égalité de la forme

$$[PQR] = 0 \qquad \text{ou} \qquad [\pi\varkappa\rho] = 0$$

représente une courbe gauche dont le degré dépend de la nature des éléments $P, Q, \ldots, \rho$ (²).

2. *Théorèmes sur sept points situés sur une cubique gauche.* — La courbe d'intersection de deux quadriques réglées qui ont

(¹) Voir *Journal de Crelle*, t. XLII, XLIX.
(²) Voir *Ibid.*, t. C.

une génératrice commune est une *cubique gauche*. Cette courbe à double courbure est rencontrée par un plan quelconque en trois points. Donc, chaque cône qui passe par la courbe et dont le sommet est situé sur elle sera du second ordre, parce que tout plan mené par le sommet de ce cône ne le coupe que suivant deux arêtes. En conséquence, si l'on désigne par X ; A, B, C, D, E, F sept points de la cubique gauche, dont le premier soit mobile et les autres soient fixes, les lignes droites [XA], ..., [XF] formeront six arêtes d'un cône du second ordre. Donc, les six points A′, B′, C′, D′, E′, F′ où ces arêtes sont coupées par un plan quelconque seront situés sur une conique. Dès lors on a, en vertu du théorème de *Pascal,* l'égalité suivante :

$$[A'B'\ D'E'\quad B'C'\ E'F'\quad C'D'\ F'A'] = 0. \tag{1}$$

En posant

$$\left\{\begin{array}{l} [A'B'\quad D'E'] = P', \\ [B'C'\quad E'F'] = Q', \\ [C'D'\quad F'A'] = R', \end{array}\right. \tag{2}$$

l'égalité (1) se transforme dans l'égalité

$$[P'Q'R'] = 0, \tag{3}$$

qui exprime que les trois points d'intersection P′, Q′, R′ sont situés sur une ligne droite g'. Si l'on mène par le point X et la droite g' un plan ξ, les quatre points X, P′, Q′, R′ seront situés dans le plan ξ et conséquemment ce plan contiendra les trois lignes droites [XP′], [XQ′], [XR′]. Or, la première des égalités (2) montre que le point P′ est situé sur la droite [A′B′] et sur la droite [D′E′]; donc, la droite [XP′] est située dans le plan [XA′B′] et dans le plan [XD′E′]. Par conséquent, comme les plans [XA′B′] et [XD′E′] sont les mêmes que les plans [XAB] et [XDE], la droite [XP′] est l'intersection de ces deux plans.

De la même manière on trouve que les droites [XQ′] et [XR′] sont les intersections des plans [XBC], [XEF] et [XCD], [XFA]. Donc, on a

$$\left\{\begin{array}{l} [XP'] = [XAB\quad XDE], \\ [XQ'] = [XBC\quad XEF], \\ [XR'] = [XCD\quad XFA]. \end{array}\right. \tag{4}$$

Comme les lignes droites [XP′], [XQ′], [XR′] sont situées dans le plan ξ, on obtient ce théorème connu (¹) :

Si l'on mène par un point X *d'une cubique gauche et par les côtés d'un hexagone inscrit dans cette courbe six plans, les trois lignes d'intersection des plans opposés seront situées dans un plan* ξ *passant par le point* X.

La ligne d'intersection des deux plans [XAB] et [XDE] rencontre les lignes [AB] et [DE]; donc cette ligne passe par les deux points [XAB DE] et [XDE AB].

Par conséquent, en posant

$$(5)\qquad \begin{cases} [XAB\ \ DE] = L, & [XDE\ \ AB] = L', \\ [XBC\ \ EF] = M', & [XEF\ \ BC] = M, \\ [XCD\ \ FA] = N, & [XFA\ \ CD] = N', \end{cases}$$

les égalités (4) se transforment dans les suivantes :

$$(6)\qquad \begin{cases} [XP'] = [LL'], \\ [XQ'] = [MM'], \\ [XR'] = [NN']. \end{cases}$$

Comme les trois lignes [XP′], [XQ′], [XR′] situées dans le même plan ξ se coupent au point X, on obtient

$$(7)\qquad [LL'\ MM'\ NN'] = 0,$$

et l'on a l'énoncé suivant (²) :

Soit un hexagone inscrit dans une cubique gauche. En menant par un point X *de cette courbe et par chaque côté de l'hexagone un plan qui coupe le côté opposé, on obtient six points situés dans un plan et formant un hexagone de Brianchon dont le point de Brianchon est le point* X.

On peut donner à ce théorème un autre énoncé géométrique. En effet, l'égalité (7) prouve que les six points L, M, N; L′, M′, N′ forment deux triangles perspectifs dont le centre de perspective est le point X.

(¹) *Voir* Cremona, *Journal de Crelle*, t. LVIII, p. 144. Reye, *Leçons sur la Géométrie de position*, traduites par O. Chemin. Deuxième Partie, p. 111.

(²) *Voir* Cremona, *loc. cit.*

Or, deux triangles perspectifs donnent naissance à un troisième triangle, lui-même perspectif aux deux premiers. Les sommets de ce troisième triangle sont formés par les points

$$L'' = [MN' \quad M'N],$$
$$M'' = [NL' \quad N'L],$$
$$N'' = [LM' \quad L'M].$$

Comme le point M est situé sur la droite [BC] et le point N' sur la droite [CD], la droite [MN'] est située dans le plan [BCD]; de plus, elle est située dans le plan ξ; donc

$$[MN'] = [\xi \quad BCD].$$

De la même manière, on trouve

$$[M'N] = [\xi \quad EFA],$$

et conséquemment le point L'' est le point d'intersection des trois plans ξ, [BCD], [EFA]. Donc, on a

$$(8) \qquad \begin{cases} L'' = [\xi \quad BCD \quad EFA], \\ M'' = [\xi \quad CDE \quad FAB], \\ N'' = [\xi \quad DEF \quad ABC]. \end{cases}$$

Les considérations précédentes conduisent au théorème suivant :

Soit un hexagone inscrit dans une cubique gauche. En menant par un point X *de cette courbe et par le premier, le troisième et le cinquième côté de l'hexagone des plans, coupés respectivement par le quatrième, le sixième et le deuxième côté, et* vice versâ, *on aura les sommets de deux triangles perspectifs, situés dans le même plan* ξ *passant par le point* X.

Si l'on mène de plus par trois sommets consécutifs de l'hexagone un plan, et par les trois autres sommets consécutifs un autre plan, ces trois couples de plans se rencontreront suivant trois lignes droites dont les intersections avec le plan ξ *forment les sommets d'un troisième triangle, lui-même perspectif à deux autres. Ces trois triangles forment la configuration connue de Desargues.*

En vertu de cette configuration bien étudiée, on peut obtenir

aisément beaucoup de théorèmes sur sept points d'une cubique gauche, théorèmes que je me borne ici à signaler.

3. *Hyperboloïdes à une nappe dont la cubique gauche est la courbe d'intersection. Détermination de la sécante fixe g. Nouvelle construction de la cubique gauche passant par six points donnés.* — Le plan ξ passant par le point X de la cubique gauche rencontrera cette courbe encore en deux points. En désignant par g la sécante qui joint ces deux points, la droite g sera située dans le même plan ξ que les trois droites [LL'], [MM'], [NN']. Donc, on a

$$[LL'g] = 0, \qquad [MM'g] = 0, \qquad [NN'g] = 0.$$

Comme ces droites [LL'], [MM'], [NN'] sont respectivement les lignes d'intersection des plans [XAB], [XDE]; [XBC], [XEF]; [XCD], [XFA], on obtient les égalités

$$[XAB\ XDE\ g] = 0, \qquad [XBC\ XEF\ g] = 0, \qquad [XCD\ XFA\ g] = 0,$$

ou, ce que l'intuition prouve immédiatement, aussi les suivantes :

$$(9) \qquad \begin{cases} [X[AB]g[DE]X] = 0, \\ [X[BC]g[EF]X] = 0, \\ [X[CD]g[FA]X] = 0. \end{cases}$$

En désignant pour le moment par P le point $[X[AB]g]$, on voit que la droite [XP] rencontre les droites [AB] et g; et comme, à cause de la première égalité (9), on a

$$[P[DE]X] = 0,$$

la droite [XP] rencontre aussi la droite [DE].

Donc, la droite [XP], rencontrant les trois droites [AB], g, [DE], décrira un hyperboloïde à une nappe ayant ces trois droites comme génératrices.

De là il suit que les égalités (9) représentent trois hyperboloïdes à une nappe qui ont la droite g comme génératrice commune et dont la courbe d'intersection est la cubique gauche passant par les six points donnés A, B, C, D, E, F.

Il est évident que l'hyperboloïde

$$[X[AB]g[DE]X] = 0$$

passe par les points A, B, D, E; pour la faire passer aussi par les points C et F, il est nécessaire que cette égalité soit satisfaite pour $X = C$ et $X = F$. Donc, on a

$$[CAB\ g\ DEC] = 0, \qquad [FAB\ g\ DEF] = 0,$$

ce qui prouve que la droite g rencontre les deux droites

$$[ABC\ \ CDE], \quad [ABF\ \ DEF].$$

De la même manière les deux autres égalités (9) démontrent que la droite g doit rencontrer les droites

$$[ABC\ \ AEF], \quad [BCD\ \ DEF],$$
$$[BCD\ \ ABF], \quad [CDE\ \ AEF].$$

Donc, la droite g passe par les deux points fixes

$$(10) \qquad \begin{cases} H = [ABC\ \ CDE\ \ EFA], \\ I = [BCD\ \ DEF\ \ FAB], \end{cases}$$

de sorte que l'on a

$$(11) \qquad \begin{cases} g = [HI], \\ \xi = [Xg]. \end{cases}$$

Ces résultats donnent une nouvelle construction de la cubique gauche passant par six points donnés. En effet, comme les points L, M′, N sont situés dans le plan ξ, on a

$$[L\xi] = 0, \qquad [M'\xi] = 0, \qquad [N\xi] = 0$$

ou, à cause des égalités (5),

$$[X[AB][DE]\xi] = 0, \qquad [X[BC][EF]\xi] = 0, \qquad [X[CD][FA]\xi] = 0.$$

De là suit que l'on a

$$[\xi[DE][AB]X] = 0, \qquad [\xi[EF][BC]X] = 0, \qquad [\xi[FA][CD]X] = 0,$$

et conséquemment

$$(12) \qquad X = [\xi[DE][AB]\ \ \xi[EF][BC]\ \ \xi[FA][CD]] = 0,$$

où le plan ξ est défini par les égalités (10) et (11). Donc :

Pour construire la cubique gauche passant par les six points A, B, C, D, E, F, *on mène un plan quelconque* ξ *par la droite qui joint les deux points*

$$H = [ABC \quad CDE \quad EFA],$$
$$I = [BCD \quad DEF \quad FAB].$$

Ce plan mobile coupera les droites [DE], [EF], [FA] *en trois points. En menant respectivement par ces points et par les droites* [AB], [BC], [CD] *trois plans, leur point d'intersection décrira la cubique gauche.*

4. *Théorèmes de M. Chasles et de M. Reye. Autres constructions de la cubique gauche passant par six points, dues à M. Schröter.* — J'ai démontré que les sept points L, M′, N, L′, M, N′, X sont situés dans un plan. Donc, à plus forte raison, quatre de ces points sont situés dans un plan. En choisissant pour ces quatre points les points M, N′, L, X, on a

$$[M N' L X] = 0$$

ou, à l'aide des égalités (5),

$$(13) \qquad [XEF \; BC \quad XFA \; CD \quad XAB \; DE \quad X] = 0.$$

Donc :

Quand un heptagone a ses sommets X, A, ..., F *sur une cubique gauche, le plan de l'un quelconque des angles* X *de l'heptagone, et les plans des deux angles adjacents* A *et* F, *rencontrent respectivement les côtés opposés en trois points qui sont dans un plan passant par le sommet du premier angle* X.

Ce théorème est donné sous cette forme, sans démonstration, par M. *Chasles* (¹). En l'employant successivement pour les six

(¹) *Aperçu historique*, 2ᵉ édit., p. 404.

sommets A, ..., F et en posant

$$(14)\quad \begin{cases} [XAB\ \ DE] = L, \\ [ABC\ \ EF] = S, \\ [BCD\ \ FX] = T, \\ [CDE\ \ XA] = U, \\ [DEF\ \ AB] = V, \\ [EFX\ \ BC] = M, \\ [FXA\ \ CD] = N', \end{cases}$$

on obtient

$$(15)\quad \begin{cases} [N'\ L\ S\ A] = 0, \\ [L\ S\ T\ B] = 0, \\ [S\ T\ U\ C] = 0, \\ [T\ U\ V\ D] = 0, \\ [U\ V\ M\ E] = 0, \\ [V\ M\ N'\ F] = 0, \end{cases}$$

$$(16)\quad [M\ N'\ L\ X] = 0.$$

Il y a beaucoup de conséquences géométriques qui résultent de ces égalités; je vais en expliquer quelques-unes. On déduit d'abord des égalités (15) et (16) le théorème suivant, dont l'énoncé est dû à M. *Reye* (¹) :

Si un heptagone est inscrit dans une cubique gauche, ses côtés coupent leurs faces opposées aux sommets d'un second heptagone. Les sommets du premier heptagone sont situés dans les faces du second, et vice versâ, *de façon que les deux heptagones sont inscrits et circonscrits l'un à l'autre.*

Comme on a, d'après les égalités (14),

$$[BCD\ \ FX] = T, \qquad [CDE\ \ XA] = U,$$

la droite [TU] est située dans le plan

$$[FXA] = \varphi.$$

Or on a, d'après la troisième et la quatrième égalité (15),

$$[S\ T\ U\ C] = 0, \qquad [T\ U\ V\ D] = 0.$$

(¹) *Loc. cit.*, p. 290.

ce qui prouve que la droite [TU] rencontre les droites [SC] et [VD]; donc, la droite [TU] passe par les deux points

$$[\varphi\, SC] \quad \text{et} \quad [\varphi\, VD].$$

De plus, la troisième et la quatrième égalité (14) montrent que les points T et U sont situés respectivement dans les plans [BCD] et [CDE]; donc on a

$$T = [[\varphi\, SC]\ [\varphi\, VD]\ [BCD]],$$
$$U = [[\varphi\, SC]\ [\varphi\, VD]\ [CDE]].$$

et le point X sera, d'après les mêmes égalités, le point d'intersection de deux droites [FT] et [AU]. En conséquence :

Si l'on construit les deux points

$$S = [ABC\ \ EF], \qquad V = [DEF\ \ AB],$$

et un plan mobile passant par la droite [FA], *si l'on construit de plus la droite passant par les points*

$$[\varphi\, SC], \quad [\varphi\, VD],$$

et si l'on coupe enfin cette droite par les deux plans

$$[BCD], [CDE],$$

on obtiendra deux points T *et* U. *Le point d'intersection de deux droites* [FT] *et* [AU] *décrira une cubique gauche passant par les six points* A, B, C, D, E, F.

Cette construction, sauf une légère simplification que j'ai employée, est due à M. Schröter (¹).

Pour arriver à l'autre construction, donnée par cet éminent géomètre, soit posé

$$[FXA] = \varphi, \qquad [VXF] = \psi, \qquad [XSA] = \chi.$$

D'après la première et la sixième égalité (15), on a

$$[\chi L] = 0, \qquad [\psi M] = 0.$$

(¹) *Voir* Schröter, *Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung*, p. 241. Leipzig, 1880.

De plus, on déduit de la première, de la sixième et de la septième égalité (14)

$$L = [\chi\ DE], \qquad M = [\psi\ BC], \qquad N' = [\varphi\ CD],$$

et

$$[X\ A\ B\ L] = 0, \qquad [X\ E\ F\ M] = 0, \qquad [X\ F\ A\ N'] = 0,$$

d'où suit

$$X = [ABL\ \ EFM\ \ FAN'].$$

Donc [1] :

En construisant le plan φ *et les points* S *et* V *de la construction précédente, en construisant de plus le point*

$$N' = [\varphi\ CD],$$

et les plans

$$[N'SA] = \chi, \qquad [VN'F] = \psi,$$

et enfin les points

$$L = [\chi\ DE], \qquad M = [\psi\ BC],$$

les trois plans

$$[ABL], \quad [EFM], \quad [FAN']$$

se couperont au point X *qui décrit la cubique gauche passant par les six points* A, ..., F *pendant que le plan mobile* φ *tourne autour de la droite fixe* [FA].

5. *Cônes du second degré qui passent par les six points donnés. Surface du quatrième degré qui est le lieu géométrique de leurs sommets.* — En substituant dans la première des égalités (15) les expressions des points N', L, S, données par les égalités (14), on obtient

$$(17) \qquad [[FXA\ CD]\ \ [XAB\ DE]\ \ [ABC\ EF]\ A] = 0$$

ou, par une simple transformation,

$$(18) \qquad [X[AF][CD]\ \ [ABC\ AEF]\ \ [DE][BA]\ X] = 0.$$

Cette égalité, dans laquelle le point X entre deux fois, représente une surface du deuxième degré; et, comme elle est satisfaite pour $[XAF] = 0$ et $[XAB] = 0$, cette surface du deuxième degré sera une quadrique réglée, contenant les droites [AF] et [BA].

---

(1) Schröter, *loc. cit.*, p. 244.

Or, ces droites se rencontrent au point A. Donc l'égalité (17) ou (18) représente *un cône du second degré dont le sommet est le point* A.

De la même manière les autres égalités (15) représentent des cônes du second degré ayant pour sommets les points B, ..., F; par exemple, la deuxième égalité (15) représente le cône

$$[X[BA][DE] \quad [ABC\ BEF] \quad [CD][FB]X] = 0,$$

dont le sommet est le point B.

Ces six cônes se coupent, deux à deux, suivant la cubique gauche passant par les six points A, ..., F et, de plus, suivant une des quinze droites qui joignent ces points.

L'égalité (16)

$$(16) \qquad [M\,N'\,L\,X] = 0$$

ou l'égalité (13)

$$(13) \qquad [XEF\ BC \quad XFA\ CD \quad XAB\ DE \quad X] = 0,$$

dans laquelle le point X entre quatre fois, représente une surface $\mathcal{F}$ du quatrième degré, qui est *le lieu géométrique des sommets des cônes du second degré qui passent par les six points* A, ..., F.

La surface $\mathcal{F}$ peut être mise sous différentes formes, en exprimant que trois quelconques des six points L, M′, N, L′, M, N′ sont situés dans le même plan que le point X et, de plus, en échangeant de toutes les manières possibles les lettres A, B, ..., F.

Pour déduire les propriétés suivantes de la surface $\mathcal{F}$, je la mets sous la forme

$$(19) \qquad [M'\,N'\,L\,X] = 0.$$

En désignant par δ le signe de variation, l'égalité

$$\delta[M'\,N'\,L\,X] = 0,$$

ou l'égalité

$$(20) \quad [M'\ N'\ L\ \delta X] + [M'\ N'\ \delta L\ X] + [M'\ \delta N'\ L\ X] + [\delta M\ N'\ L\ X] = 0,$$

sera la première surface polaire de la surface $\mathcal{F}$, par rapport à un point quelconque δX.

Pour $X = A$, on obtient, d'après les égalités (5),

$$L = 0, \qquad N' = 0,$$

et l'on voit que, pour ces valeurs, les égalités (19) et (20) sont satisfaites. Donc le point A est un *nœud* de la surface $\mathcal{F}$ et, comme dans les égalités représentant la surface $\mathcal{F}$ le changement des lettres A, ..., F est permis, on obtient cette proposition :

La surface $\mathcal{F}$, lieu géométrique des sommets des cônes du second degré qui passent par six points donnés de l'espace, possède en ces six points six nœuds.

Ce théorème est dû à M. Chasles qui l'a donné en 1861 dans les *Comptes rendus*, t. LII, p. 1159.

Pour trouver le cône tangentiel à la surface $\mathcal{F}$ au nœud A, je forme l'expression

$$\delta^2[M'N'LX] = 0,$$

ou

$$\begin{aligned}&[M'\ N'\ \delta L\ \delta X] + [M'\ \delta N'\ L\ \delta X] + [M'\ \delta N'\ \delta L\ X]\\ &+ [\delta M\ N'\ L\ \delta X] + [\delta M\ N'\ \delta L\ X] + [\delta M'\ \delta N'\ L\ X] = 0,\end{aligned}$$

ce qui donne pour $X = A$, et conséquemment

$$L = 0, \qquad N' = 0, \qquad M' = [ABC\ EF] = S,$$

l'égalité

$$[S\ \delta N'\ \delta L'\ A] = 0,$$

qui est précisément l'égalité (17), sauf la notation du point variable. Donc :

Les cônes tangentiels à la surface $\mathcal{F}$ aux six nœuds sont les cônes qui passent par cinq des six points donnés et qui ont pour sommet le sixième point qui est le nœud.

Comme on peut satisfaire à l'égalité (13) en prenant

$$[XEF] = 0, \qquad \text{ou} \qquad [XFA] = 0, \qquad \text{ou} \qquad [XAB] = 0, \qquad \ldots,$$

on trouve que *les quinze droites joignant les points* A, ..., F, *deux à deux, sont situées sur la surface $\mathcal{F}$* (¹).

De la même manière on voit que *les dix droites d'intersection*

(¹) *Voir* Chasles, *loc. cit.*

des couples de plan déterminés par les six points, pris trois à trois, sont situées elles-mêmes sur la surface $\mathfrak{F}$.

Ces résultats sont mis en évidence par la forme suivante de l'égalité (13)

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{l} [XABC]\,[XADE]\,[XBEF]\,[XCDF] \\ -[XACD]\,[XBCF]\,[XABE]\,[XDEF] = 0. \end{array}\right.$$

où [XABC] est le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_1 & A_1 & B_1 & C_1 \\ X_2 & A_2 & B_2 & C_2 \\ X_3 & A_3 & B_3 & C_3 \\ X_4 & A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix},$$

et où X_i, A_i, B_i, C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) désignent les coordonnées homogènes des points X, A, B, C [1].

Cependant, pour transformer rapidement l'égalité (13) dans l'équation (21), on a besoin de quelques-uns des principes algébriques sur lesquels la méthode que je viens d'employer est fondée, principes très simples que j'expliquerai dans un Mémoire prochain.

L'application de ces principes conduit aux résultats algébriques que l'on doit à MM. Joachimstahl, P. Serret, Sturm, Laguerre, Appell, Tannery et à d'autres célèbres géomètres.

Je termine ce Mémoire par la remarque suivante. J'ai obtenu les résultats précédents en transformant la relation fournie par le théorème de Pascal en relations entre les sept points X; A, ..., F. Or, quand les six points A′, ..., F′ introduits au commencement du deuxième paragraphe sont situés sur une conique, ils donnent naissance à la configuration de l'hexagramme mystique dont le théorème de Pascal est une seule proposition. Donc, en transformant par la méthode même que je viens d'employer les résultats dus à MM. Steiner, Cayley, de Staudt, Kirkmann, Veronese, on obtient pour les cubiques gauches de nouveaux théorèmes dont je me borne ici à signaler l'existence.

---

(1) *Voir* Cayley, *Comptes rendus*, t. LII, p. 1216; Darboux, t. I de ce Journal, p. 354; Hierholzer, *Math. Ann.*, t. II, p. 563, et t. IV, p. 172; Hunyady, *Journal de M. Kronecker*, t. XCII, p. 304.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BERMBACH (W.). — Ueber n-mal nacheinander angewandte Substitutionen, durch welche drei Quadrate in sich selbst transformit werden. Inaugural-Dissertation; 50 p. in-8°. Bonn, Georgi, 1887.

Le travail de M. Bermbach comprend deux Parties : dans la première, il compare brièvement aux belles recherches de M. Lipschitz, sur les transformations par lesquelles une somme de n carrés se reproduit, la méthode géométrique sur laquelle Hamilton a fondé la doctrine des quaternions; dans la seconde, il traite le problème suivant : « Soit donnée une substitution de déterminant $+1$ par laquelle se reproduise une somme de trois carrés, trouver toutes les substitutions de la même nature, telles que, en appliquant n fois de suite l'une quelconque d'entre elles, on retombe sur la substitution donnée. »

C'est grâce à une expression remarquablement simple de la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un quaternion que M. Bembach parvient au résultat. J. T.

PEANO (G.). — Applicazione geometriche del Calcolo infinitesimale. 1 vol. in-8°; XII-334 p. Turin, Bocca frères, 1887.

L'auteur de ces *Applications géométriques du Calcul différentiel* a moins cherché à accumuler dans son Livre des faits mathématiques qu'à éclaircir les définitions et à donner des notions à la fois générales et précises : il est, à cet égard, intéressant et satisfaisant; au surplus, la publication antérieure du Livre intitulé : *Calcolo differenziale e principii di Calcolo integrale*, dont il a été rendu compte dans le *Bulletin* (¹), avait déjà montré quelles étaient ses préoccupations.

Les *Applications géométriques* comprennent une Introduction et sept Chapitres.

(¹) *Voir* t. IX, p. 170.

L'Introduction se rapporte aux opérations exécutées sur les segments : équipollence, addition géométrique, produit géométrique (d'après Resal) ou produit intérieur (d'après Grassmann), de deux segments, aire d'un parallélogramme et volume d'un parallélépipède regardés, ainsi que le fait Grassmann, comme des fonctions alternées des deux ou trois segments qui définissent le parallélogramme ou le parallélépipède. Dans le premier Chapitre, l'auteur traite des segments de droite considérés comme des fonctions d'une variable, des dérivées géométriques; il termine en donnant l'interprétation cinématique de la formule de Taylor, et des fonctions qu'il appelle *interpolaires*. Ainsi, en désignant par $f(t)$ un segment qui dépende de la variable numérique t et en posant

$$f(t_1 t_2) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1},$$

$$f(t_1 t_2 t_3) = \frac{f(t_1 t_3) - f(t_1 t_2)}{t_3 - t_2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

où il faut entendre que les différences $f(t_2) - f(t_1)$, $f(t_1 t_3) - f(t_1 t_2)$ ont la signification géométrique, on a, en supposant que les quantités $t_1, t_2, \dots, t_n$ aient t pour limite commune,

$$\lim f(t_1 t_2 \dots t_n) = \frac{1}{1.2\dots(n-1)} f^{(n-1)}(t);$$

dans le second membre, $f^{n-1}(t)$ désigne la $(n-1)^{\text{ième}}$ dérivée géométrique du segment $f(t)$. Les trois Chapitres qui suivent contiennent les premiers éléments de la théorie des courbes planes ou gauches et des surfaces : tangente, plan tangent, paramètre différentiel du premier ordre, etc. Le Chapitre V porte ce titre : *Grandeurs géométriques*. C'est peut-être le plus important et le plus intéressant, celui, du moins, par lequel le Livre de M. Peano se distingue davantage des Traités classiques : les définitions qui se rapportent aux *champs de points*, aux points extérieurs, intérieurs ou limites par rapport à un champ, aux fonctions distributives (coexistantes d'après Cauchy), à la longueur (à l'aire ou au volume) externe, interne ou propre d'un champ, la notion d'intégrale étendue à un champ sont présentées sous une forme abstraite, très précise et très claire. Notons encore, dans le même Chapitre,

la façon dont sont établies les formules d'approximation pour le calcul des aires planes; M. Peano y donne l'expression du reste, obtenue par M. Mansion [1].

Les deux derniers Chapitres sont consacrés à la théorie de la courbure et à celle des enveloppes.

Chaque Chapitre est accompagné d'exercices en général assez faciles. J. T.

L. BURMESTER. — LEHRBURCH DER KINEMATIK. 1er Volume, 1er et 2e fascicule. A. Felix, 1886.

La grande diversité des théories qui peuvent être groupées sous le titre de *Cinématique* explique les divergences des nombreux Traités qui portent ce titre. Prise d'un certain côté, la Cinématique ouvre accès à une catégorie de questions de géométrie abstraite, qui se rattachent plus ou moins directement aux propriétés d'ordre mécanique. L'auteur s'est placé à un point de vue différent, autant du moins que nous en pouvons juger d'après les deux fascicules que nous avons sous les yeux. Il expose d'abord géométriquement la théorie classique du déplacement d'une figure plane dans son plan. Mais les principaux, les plus considérables développements ont trait à la description des mécanismes nombreux dont la théorie du déplacement d'une figure plane peut expliquer le jeu. Nous n'entrerons pas ici dans une énumération détaillée et technique de ces mécanismes variés; disons seulement que l'auteur montre les liens généraux qui les rattachent entre eux et enseigne à les engendrer par la composition de mécanismes élémentaires. Ce Livre offre, on le voit, un certain air de parenté avec le Traité bien connu de M. Reuleaux; mais il est construit sur un tout autre plan.

Ajoutons que des planches très soignées, aides indispensables dans cet ordre de questions, contribuent à la compréhension du texte. G. K.

---

[1] *Bulletin de l'Acad. de Belgique*, p. 293; 1886.

ADAM (P.). — Mémoire sur les systèmes triples orthogonaux. In-4°. Paris, Gauthier-Villars, 1887.

Ce Mémoire, présenté comme thèse à la Faculté des Sciences de Paris, a pour objet principal la formation de l'équation aux dérivées partielles des systèmes orthogonaux dans un système particulier de coordonnées tangentielles.

Partant de l'équation

$$Ax + By + Cz + \xi = 0,$$

où A, B, C sont trois fonctions déterminées de deux variables α et β, et ξ une fonction quelconque de α, β et d'un paramètre ρ, laquelle équation représente ainsi un plan enveloppant telle famille de surfaces que l'on veut, l'auteur cherche d'abord la condition analytique nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire ξ pour conduire à une famille faisant partie d'un système triple orthogonal.

A cet effet, il s'appuie sur le beau théorème de Dupin complété par M. Darboux :

Pour qu'une famille de surfaces appartienne à un système orthogonal, il faut et il suffit qu'il existe une seconde famille la rencontrant à angle droit et suivant ses lignes de courbure, et il parvient à une équation aux dérivées partielles *du troisième ordre* dans laquelle le premier membre est la somme de trois déterminants du troisième ordre.

L'auteur particularise alors les trois fonctions A, B, C, en prenant pour α et β les paramètres des génératrices rectilignes de la sphère en représentation sphérique, ce qui le mène à l'équation suivante, d'une simplicité digne de remarque,

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\xi}{\alpha-\beta}\right)_{1.3} & s + \dfrac{p-q}{\alpha-\beta} & r \\ \dfrac{1}{\alpha-\beta}\left(\dfrac{r}{t}\right)_3 & \dfrac{4}{\alpha-\beta}\dfrac{r}{t} + \left(\dfrac{r}{t}\right)_2 & \dfrac{4}{\alpha-\beta}\dfrac{r}{t} + \left(\dfrac{r}{t}\right)_1 \\ \left(\dfrac{\xi}{\alpha-\beta}\right)_{2.3} & t & s + \dfrac{p-q}{\alpha-\beta} \end{vmatrix} = 0$$

(p, q, r, s, t sont les dérivées partielles premières et secondes

de ξ et les indices 1, 2 et 3 indiquent des dérivations respectivement par rapport à α, β et ρ).

L'équation (1) suppose α et $-\frac{1}{\beta}$ conjugués pour un point réel de la sphère, parce que, dans ces conditions, le calcul qui y conduit est plus simple et plus symétrique. Mais on passe facilement au cas où α et β seraient conjugués, et il vient ainsi l'équation ci-après, qui n'est guère plus compliquée que la précédente et qui est plus avantageuse dans les applications :

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \left(\frac{\xi}{1+\alpha\beta}\right)_{1.3} & s+\frac{\xi-p\alpha-q\beta}{1+\alpha\beta} & r \\ \frac{1}{1+\alpha\beta}\left(\frac{r}{t}\right)_3 & -\frac{4\alpha}{1+\alpha\beta}\frac{r}{t}+\left(\frac{r}{t}\right)_2 & \frac{4\beta}{1+\alpha\beta}\frac{r}{t}+\left(\frac{r}{t}\right)_1 \\ \left(\frac{\xi}{1+\alpha\beta}\right)_{2.3} & t & s+\frac{\xi-p\alpha-q\beta}{1+\alpha\beta} \end{vmatrix} = 0.$$

M. Adam fait ensuite cette remarque, que l'on peut abréger beaucoup l'écriture des équations (1) et (2) développées, dans le cas des familles de surfaces réelles. Pour cela et en supposant, par exemple, α et β conjugués, il établit ce lemme :

Pour qu'à une fonction ξ corresponde une famille réelle, il faut et il suffit que cette fonction ne change pas quand on y remplace α par β, β par α et i par $-i$ dans les coefficients.

Comme conséquence, il donne à l'équation (2) la forme suivante, relative aux familles réelles,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left[\left(s+\frac{\xi-p\alpha-q\beta}{1+\alpha\beta}\right)^2-rt\right](r_3t-t_3r) \\ &\quad+\left[\left(s+\frac{\xi-p\alpha-q\beta}{1+\alpha\beta}\right)\left(\frac{4\alpha}{1+\alpha\beta}rt+vr-ut\right)\right. \\ &\qquad\left.+t\left(\frac{4\beta}{1+\alpha\beta}rt+ut-wr\right)\right]\left(p_3-\frac{\beta\xi_3}{1+\alpha\beta}\right)=\Theta, \end{aligned}$$

u, w, w, v étant les dérivées partielles du troisième ordre de la fonction ξ, et Θ représentant une fonction de α, β, ρ assujettie seulement à ne pas changer quand on y remplacera α par β, β par α et i par $-i$ dans les coefficients.

Ainsi, en prenant pour Θ une constante réelle, ou $\alpha+\beta$, ou $\alpha\beta$, etc., si l'équation correspondante admet des solutions ξ

donnant des familles réelles, ces familles appartiendront certainement à des systèmes orthogonaux.

La suite du Mémoire que nous analysons a trait à des applications de l'équation (2).

En premier lieu, l'auteur forme l'équation aux dérivées partielles des familles de surfaces homothétiques conduisant à des systèmes orthogonaux; au sujet de ces familles, il énonce ce théorème :

Si une famille de surfaces homothétiques par rapport à un certain centre O *fait partie d'un système orthogonal, les deux familles conjuguées sont composées de surfaces homothétiques par rapport au même centre.*

Ce théorème, dont la démonstration analytique sert de vérification à ce qui précède, était d'ailleurs presque évident, car la famille considérée ne changeant pas quand on la soumet à une transformation homothétique de centre O, les familles conjuguées doivent aussi rester indifférentes à cette transformation et, par suite, être homothétiques par rapport au point O.

En cherchant les familles de surfaces homothétiques pour lesquelles $r = t$, M. Adam obtient la famille de cyclides homothétiques par rapport à l'origine

$$z = \frac{x^2}{\lambda\rho - z} + \frac{y^2}{\mu\rho - z},$$

λ et μ étant deux constantes, et il établit que les conjuguées de cette famille sont deux autres familles de cyclides.

En second lieu, l'auteur s'occupe des familles de surfaces qui, appartenant à des systèmes orthogonaux, résultent de la translation d'une surface invariable de forme.

Après avoir établi l'équation aux dérivées partielles de ces familles, il démontre le théorème suivant :

Pour qu'une surface invariable de forme puisse, par translation, engendrer une famille capable de faire partie d'un système orthogonal, il est nécessaire que la translation s'effectue en ligne droite.

En cherchant encore, dans le cas actuel, les familles qui répondent à l'équation $r = t$, on obtient une série de surfaces, sortes

d'hélicoïdes, à lignes de courbure planes, circulaires dans un système, transcendantes dans l'autre; les deux familles conjuguées sont une famille de cyclides et une famille de surfaces transcendantes à lignes de courbure planes.

La fin du Mémoire de M. Adam est consacrée à la recherche de certaines familles à lignes de courbure planes et appartenant à des systèmes orthogonaux.

MÉLANGES.

NOTE SUR LES DIFFÉRENTIELLES EXACTES HOMOGÈNES;

PAR M. ED. COMBESCURE.

Soit

$$df = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_n\,dx_n,$$

où les fonctions X satisfont aux conditions ordinaires d'intégrabilité

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial X_h}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_h}.$$

Je supposerai que ces mêmes fonctions sont homogènes, leur degré commun d'homogénéité étant désigné par m. On aura, d'après cela,

$$x_1\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \ldots + x_n\frac{\partial X_1}{\partial x_n} = mX_1,$$

et, par suite, en ajoutant X_1 aux deux membres et ayant égard aux conditions (α), on pourra écrire cette équation de la manière suivante :

$$\frac{\partial(x_1X_1 + x_2X_2 + \ldots + x_nX_n)}{\partial x_1} = (m+1)X_1.$$

En faisant, pour abréger,

$$x_1X_1 + x_2X_2 + \ldots + x_nX_n = V,$$

on aura donc les équations compatibles

$$(a)\quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = (m+1)X_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial x_2} = (m+1)X_2, \qquad \ldots \qquad \frac{\partial V}{\partial x_n} = (m+1)X_n.$$

Multipliant par $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ et ajoutant, il viendra ($m+1$ étant supposé différent de zéro)

$$dV = (m+1)\,df.$$

donc

$$f = \frac{x_1 X_1 + x_2 X_2 + \ldots + x_n X_n}{m+1} + \text{const.}$$

Lorsque $m+1$ est égal à zéro, les équations (a) fournissent

$$(b)\qquad V = a,$$

a étant une constante donnée quelconque. Si l'on fait la substitution

$$x_2 = x_1 y_2, \qquad \ldots, \qquad x_n = x_1 y_n,$$

on pourra écrire

$$X_1 = \frac{1}{x_1} Y_1, \qquad X_2 = \frac{1}{x_1} Y_2, \qquad \ldots \qquad X_n = \frac{1}{x_1} Y_n.$$

les Y ne dépendant que des $(n-1)$ variables $y_2, \ldots, y_n$. L'équation (b) deviendra

$$Y_1 + y_2 Y_2 + \ldots + y_n Y_n = a,$$

ce qui constitue une relation nécessaire entre les fonctions Y. On aura ensuite

$$X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n = (Y_1 + y_2 Y_2 + \ldots + Y_n y_n)\frac{dx_1}{x_1} + Y_2\,dy_2 + \ldots + Y_n\,dy_n,$$

c'est-à-dire

$$X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_1 = a\frac{dx_1}{x_1} + Y_2\,dy_2 + \ldots + Y_n\,dy_n,$$

les fonctions $Y_2, \ldots, Y_n$ satisfaisant naturellement aux conditions d'intégrabilité, conformément à leur définition ci-dessus.

NOTE SUR LES DIFFÉRENTIELLES BINOMES;

PAR M. ED. COMBESCURE.

Soit la différentielle binôme

$$dV = x^m(a + bx^n)^p\,dx.$$

On peut l'écrire

$$dV = x^{m+\frac{np}{2}}\left(ax^{-\frac{n}{2}} + bx^{\frac{n}{2}}\right)^p dx.$$

En posant

$$ax^{-\frac{n}{2}} + bx^{\frac{n}{2}} = t,$$

d'où

$$ax^{-\frac{n}{2}} - bx^{\frac{n}{2}} = \sqrt{t^2 - 4ab},$$

la différentiation de la première de ces relations donnera

$$-\frac{n}{2}\left(ax^{-\frac{n}{2}} - bx^{\frac{n}{2}}\right)\frac{dx}{x} = dt$$

et, par suite

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2}{n}\frac{dt}{\sqrt{t^2 - 4ab}}.$$

On aura donc

$$dV = -\frac{2}{n}x^{m+1+\frac{np}{2}}\frac{t^p\,dt}{\sqrt{t^2 - 4ab}},$$

où il faut introduire l'expression de x déduite de l'une ou de l'autre des relations équivalentes

$$2bx^{\frac{n}{2}} = t - \sqrt{t^2 - 4ab},$$

$$2ax^{-\frac{n}{2}} = t + \sqrt{t^2 - 4ab},$$

En prenant la première, par exemple, on aura

$$dV = -\frac{2}{n}\frac{1}{(2b)^{\frac{2(m+1)}{n}+p}}\left(t - \sqrt{t^2 - 4ab}\right)^{\frac{2(m+1)}{n}+p}\frac{t^p\,dt}{\sqrt{t^2 - 4ab}}.$$

On voit que, si

$$\frac{2(m+1)}{n} + p$$

est un nombre entier positif ou négatif, la différentielle proposée

sera ramenée à des différentielles à un seul paramètre r, savoir

$$\frac{t^r\,dt}{\sqrt{t^2-4ab}},$$

l'exposant r pouvant être réduit à être compris entre 0 et 1.

Exemples : 1° Pour $m=0$, $n=6$, $p=-\frac{1}{3}$, la différentielle proposée, savoir

$$\frac{dx}{(a-bx^6)^{\frac{1}{3}}},$$

est ramenée, sauf un facteur numérique, à

$$\frac{t^{-\frac{1}{3}}\,dt}{\sqrt{t^2-4ab}},$$

ou, en posant $t=z^{\frac{3}{2}}$ et négligeant toujours un facteur numérique, à

$$\frac{dz}{\sqrt{z^3-4ab}},$$

2° Pour $m=0$, $n=3$, $p=-\frac{2}{3}$, la différentielle

$$\frac{dx}{(a+bx^3)^{+\frac{2}{3}}}$$

est ramenée à

$$\frac{t^{-\frac{2}{3}}\,dt}{\sqrt{t^2-4ab}},$$

ou, en posant $t=z^{-\frac{3}{2}}$, à

$$\frac{dz}{\sqrt{1-4abz^3}},$$

expression qui se ramène à la précédente par une substitution $z=gy$, g étant une constante. Ces exemples sont ceux que M. Serret a traités par deux substitutions un peu différentes. La substitution que j'ai présentée en commençant peut être considérée comme une généralisation de celle de M. Serret, pour le premier cas.

Il n'est pas inutile de rappeler que les différentielles binômes des exemples 1° et 2° peuvent être réduites autrement aux intégrales elliptiques, comme l'a fait voir M. Cayley (*The Messenger of Mathematics*, t. XI, 1881-82). (Voir le *Bulletin*, t. X, 2e série).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Stieltjes (Th.). — *Recherches sur quelques séries semi-convergentes* Paris, Gauthier-Villars.

Thévenet (A.). — *Étude analytique du déplacement infiniment petit d'un corps solide*. Paris, Hermann.

Zumkley (Franz). — *Analytische Untersuchung einer Gruppe verwandter Umhüllungslinien*. Programm des Realprogymnasiums in Eupen.

Robin (G.). — *Sur la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs fermés et des conducteurs ouverts*. Paris, Gauthier-Villars.

Ameseder (A.). — *Zur Auflösung der Gleichungen 4. und 5. Grades durch Bewegungsmechanismen*. Wien, Gerold's Sohn, 40 pf.

Ameseder (A.). — *Ueber Configurationen und Polygone auf biquadratischen Curven*. Wien, ibid. 50 pf.

Ameseder (A.). — *Zur Theorie der Thetacharakteristiken*. Wien, ibid., 20 pf.

Autenheimer (F.). — *Elementarbuch der Differential- und Integralrechnung mit zahlreichen Anwendungen aus der Analysis, Geometrie, Mechanik, Physik, etc.* Weimar, Voigt, 9 M.

Bobek (K.). — *Ueber hyperelliptische Curve*. Wien, Gerold's Sohn. 40 pf.

Feil (M.). — *Ueber Euler'sche Polyeder*. Wien, Gerold's Sohn, 50 pf.

Halphen (G.-H.). — *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*. — Ire Partie : *Théorie des fonctions elliptiques et de leurs développements en séries*. Paris, Gauthier-Villars. 15 fr.

HOFMANN (P.). — *Die Constructionen doppelt berührender Kegelschnitte, mit imaginären Bestimmungsstücken.* Leipsig, Teubner. 3 M. 20 pf.

JACOBI (C.-G.-J.). — *Gesammelte Werke.* 4. Band, herausgegeben von K. Weierstrass. Berlin, G. Reiner. 18 M.

KOHN (G.). — *Ueber das Vierseit und sein associirtes Viereck, das Fünffach und sein associirtes Fünfeck.* Wien, Gerold's Sohn, 60 pf.

MERTENS (F.). — *Ueber die bestimmenden Eigenschaften der Resultante von n Formen mit n veränderlichen.* Wien, Gerold's Sohn, 60 pf.

MERTENS (F.). — *Ueber die Invarianten dreier ternären quadratischen Formen.* Wien, ibid., 35 pf.

REY (C.). — *L'omniformule de cubature.* Paris, Delagrave.

WIRTINGEN (W.). — *Ueber rationale Raumcurven 4. Ordnung.* Wien, Gerold's Sohn, 40 pf.

HENNEBERG (L.) und SMREKER (O.). — *Lehrbuch der technischen Mechanik,* 9 M.

ROBEK (K.). — *Ueber das verallgemeinerte Correspondenz-Princip.* Wien, Gerold's Sohn, 30 pf.

KRAUSE (M.). — *Die Transformation der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung nebst Anwendungen.* Leipsig, Teubner, 10 M.

MARIE (MAX.). — *Histoire des Sciences mathématiques et physiques.* T. IX : *de Lagrange à Laplace.* Paris, Gauthier-Villars. 6 fr.

REYE (TH.). — *Geometrie der Lage,* 3. Auf. Leipsig, Baumgartner, 7 M.

TARRY (G.). — *Représentation géométrique de coniques et quadriques imaginaires.* Paris, Gauthier-Villars. 1 fr. 50.

TODHUNTER (L.). — *A History of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to the present time.* London, Cambridge, Warehouse, 25 sh.

1re - Fo. 1 -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BERTRAND (J.). — THERMODYNAMIQUE. 1 vol. in-8°. Paris, Gauthier-Villars, 1887.

M. J. Bertrand vient de publier les belles Leçons sur la Thermodynamique qu'il a professées au Collège de France durant l'année 1886-1887. Pour rendre compte de cet important Ouvrage, suivons pas à pas l'ordre adopté par son auteur.

L'exposé des principes fondamentaux de la Théorie mécanique de la chaleur forme l'objet des quatre premiers Chapitres; dans cet exposé, M. J. Bertrand suit dans ses grands traits la marche des découvertes qui, partant d'une part des divinations de Sadi Carnot, dignement commentées par Clapeyron, d'autre part des idées de Robert Mayer, ont abouti, grâce à la synthèse de R. Clausius, à créer la Thermodynamique moderne.

Toutefois, en prenant l'ordre historique pour fil conducteur, M. J. Bertrand ne s'est point astreint à le suivre jusque dans les dernières minuties. « Si j'ai groupé, dit-il, les explications principales autour de trois noms dont le temps a consacré la gloire, Sadi Carnot, Mayer et Clausius, je n'ai pas voulu, dans une œuvre récente encore, chercher la tâche et faire la part de chacun. Les meilleurs juges sont divisés avec passion. L'omission de certains noms sur lesquels on ne se partage pas, celui de sir W. Thomson particulièrement, montre suffisamment ce parti pris de ne pas écrire l'histoire de la théorie nouvelle. »

I. L'étude des *gaz parfaits* a été le point de départ de la Théorie de la chaleur. Laplace et Poisson, dans des travaux dont on ne saurait trop admirer la sagacité, en ont établi les plus beaux résultats. L'idée d'associer une chaleur spécifique particulière à chaque mode de transformation d'un corps, la découverte de la relation qui existe entre les deux chaleurs spécifiques sous pression constante et sous volume constant, d'une part, et les lois de la détente, d'autre part, l'application de cette relation à la théorie de la propagation du son, sont autant de titres qui, à eux seuls, suffiraient à placer les deux illustres géomètres au premier rang parmi les physiciens du siècle.

Tous ces résultats cependant ont été obtenus en partant d'une hypothèse erronée, aujourd'hui condamnée. Pour Laplace et pour Poisson, les phénomènes de la chaleur étaient les manifestations d'un fluide impondérable, le calorique. Lorsqu'un corps perdait ou gagnait une certaine quantité de chaleur, il perdait ou gagnait une certaine quantité de calorique. Lorsque, après avoir parcouru un cycle de transformations, le corps revenait à son état initial, il avait, en y arrivant, la même quantité de chaleur ou de calorique qu'en le quittant. L'expression de *quantité de chaleur contenue en un corps* avait alors un sens; elle représentait une fonction uniforme de l'état du corps.

Heureusement, une circonstance que les progrès ultérieurs de la Thermodynamique ont permis de préciser laisse toute leur valeur aux conséquences que Laplace et Poisson ont déduites de cette hypothèse erronée, toutes les fois que, pour les obtenir, ils n'ont fait subir au corps que des transformations infiniment petites.

Il n'en est pas de même de toutes les conséquences que l'on peut déduire de cette hypothèse. Ainsi Sadi Carnot en a déduit la loi suivante : Les deux chaleurs spécifiques d'un gaz, à pression constante et à volume constant, ont une différence constante; chacune d'elles varie, à une même température, proportionnellement au logarithme du volume occupé par la masse gazeuse. Cette loi est aujourd'hui inacceptable : les expériences de Regnault ont appris que, pour les gaz parfaits, la chaleur spécifique sous pression constante est à peu près indépendante du volume occupé par la masse de gaz.

« Carnot, dit M. Bertrand, dans le travail mémorable dont l'importance a été si grande, regardait le calorique comme une substance. Il admettait, par une conséquence nécessaire, que les caloriques spécifiques d'un gaz croissaient proportionnellement au logarithme du volume. Toutes les parties de sa théorie étaient logiquement enchaînées. Aucun raisonnement, sans l'intervention d'expériences précises, ne pouvait en démontrer l'inexactitude. »

II. Cette hypothèse inexacte, plus féconde en conséquences vraies que bien des vues exactes, domine les *idées de Carnot*.

Carnot, frappé par l'importance, de jour en jour grandissante,

des moteurs à feu, et des projets chimériques et ruineux engendrés par le désir de perfectionner indéfiniment ces moteurs et d'accroître leur rendement, se propose de trouver la limite supérieure de ce rendement. Persuadé que la chaleur ne saurait se détruire, Carnot admet que tout moteur à feu est un moyen d'emprunter au foyer une certaine quantité de chaleur et de la restituer intégralement au réfrigérant. Pendant ce transport, le moteur effectue un certain travail. Le rapport du travail effectué à la *quantité de chaleur mise en jeu* est le coefficient économique.

Pour que le coefficient économique soit maximum, d'après Carnot, il faut tout d'abord que toute la chaleur fournie au moteur le soit à une même température T_1, que toute la chaleur cédée par le moteur à l'extérieur le soit à une autre même température T_0, c'est-à-dire que la série des états par lesquels passe le moteur pendant une période entière de fonctionnement forme ce qu'on a appelé depuis un cycle de Carnot. Il faut ensuite, Carnot l'admet sans démonstration, que le cycle ainsi décrit soit *réversible;* ainsi est introduite, pour la première fois, en Thermodynamique, cette notion de réversibilité dont la définition précise et l'emploi rigoureux dans les démonstrations donnent lieu à des difficultés bien grandes et pourtant bien négligées des physiciens.

Ces conditions une fois remplies par le moteur à feu, Carnot énonce cette conséquence, qui dut paraître, au moment où fut publié l'écrit *Sur la puissance motrice du feu,* un bien étrange paradoxe : le coefficient économique d'un moteur ne dépend point des substances dont la transformation assure la marche de ce moteur; il dépend exclusivement des deux températures auxquelles ont lieu le gain et la perte de chaleur.

« Si, écrit M. Bertrand, interprétant le raisonnement par lequel Carnot est arrivé à ce résultat, une machine thermique parfaite, dans sa marche directe, offrait plus d'avantages qu'une autre, également parfaite, c'est-à-dire si, pour une même quantité de chaleur dépensée et pour une même chute de température, elle produisait plus de travail, l'autre, dans la marche inverse, prendrait l'avantage et permettrait, avec moins de travail, de faire remonter du corps froid sur le corps chaud la chaleur transportée par la première. On pourrait ainsi, en associant les deux machines, l'une dans le sens direct, l'autre dans le sens inverse, créer, sans dépense

de chaleur et sans chute de température, une quantité de travail égale à l'excès du travail produit par la première machine sur celui que dépense la seconde. »

« Clapeyron, en appliquant le théorème de Carnot, dit M. Bertrand, a considéré exclusivement des cycles infiniment petits. Le choix présente deux avantages.... L'autre avantage attaché à l'emploi d'un cycle infiniment petit a été fortuit. Clapeyron ne l'a ni prévu ni connu, mais il en a profité. L'énoncé de Carnot contient une erreur.... La quantité de chaleur désignée par Q y représente indifféremment la quantité de chaleur versée pendant le parcours de l'un des côtés isothermes du cycle, ou abandonnée sur l'autre. Pour Clapeyron, comme pour Carnot, l'égalité de ces quantités de chaleur est évidente. Cette erreur pouvait avoir de graves conséquences. La différence, regardée comme nulle, est, en vertu d'un théorème aujourd'hui démontré, proportionnelle à la surface du cycle. Elle est donc, pour un cycle infiniment petit, infiniment petite du second ordre et, grâce à cette circonstance, les conséquences d'un principe que personne aujourd'hui ne voudrait accepter peuvent être, dans ce cas, suivies sans erreur. »

Au nombre de ces conséquences doit être rangée une équation, due à Clapeyron, dont l'importance en Physique est aujourd'hui incontestée. Je veux parler de la relation

$$L = \frac{1}{\Phi(T)}(s - \sigma)\frac{dp}{dT},$$

qui lie la chaleur L de vaporisation d'un liquide aux volumes spécifiques s et σ de la vapeur et du liquide, à la tension p de la vapeur saturée et à une certaine fonction $\Phi(T)$ de la température, fonction à laquelle on a donné le nom de *fonction de Carnot*.

Clapeyron n'a point déterminé cette fonction. Aujourd'hui, elle est connue; Clausius a montré qu'elle était le quotient de l'équivalent mécanique de la chaleur par la température absolue. Mais cette détermination repose sur l'idée de la transformation de la chaleur en travail que Clapeyron ne possédait pas. M. Bertrand fait remarquer que l'idée, admise par Clapeyron, que le calorique est indestructible, peut, elle aussi, conduire à la détermination de cette fonction. Le résultat, très différent de celui qui est admis aujourd'hui, conduit à cette conséquence que le coefficient éco-

nomique d'un moteur parfait est proportionnel à la différence des logarithmes des deux températures auxquelles ont lieu les échanges de chaleur.

« Le raisonnement seul, dit M. Bertrand, permettrait de condamner la forme de la fonction déduite du principe de Carnot. Une remarque, aujourd'hui décisive, aurait été, sans doute, il y a un demi-siècle, jugée sans importance. La fonction $lT_1 - lT_0$, égale au logarithme du rapport $\frac{T_1}{T_0}$, peut grandir sans limite si la température T_0 de la source froide est suffisamment rapprochée du zéro absolu. Si la formule est acceptée, le rapport de la quantité de travail produit à la chaleur mise en œuvre n'aurait pas de limite supérieure; la puissance de travail d'un corps chaud serait infinie. »

III. Les idées de Carnot nécessitent donc un complément; les *idées de Robert Mayer* leur ont apporté ce complément. Mais, comme si aucun grand progrès n'eût pu s'accomplir dans la théorie de la chaleur sans que le nom de Sadi Carnot y fût attaché, les vues de Carnot avaient devancé celles de Mayer. Quelques notes manuscrites, publiées seulement en 1871 par le frère de Carnot, ont révélé ce nouveau titre de gloire du physicien français, sans diminuer en rien ceux de l'illustre médecin de Heilbronn.

« La chaleur n'est autre chose que la puissance motrice, écrit Carnot, ou plutôt que le mouvement qui a changé de forme; c'est un mouvement dans les particules du corps. Partout où il y a destruction de puissance motrice, il y a en même temps production de chaleur en quantité précisément proportionnelle à la quantité de puissance motrice détruite. Réciproquement, partout où il y a destruction de chaleur, il y a production de puissance motrice...

» On peut poser, en thèse générale, que la puissance motrice est en quantité invariable dans la nature; qu'elle n'est jamais, à proprement parler, produite ou détruite. A la vérité, elle change de forme, c'est-à-dire qu'elle produit tantôt un genre de mouvement, tantôt un autre, mais elle n'est jamais anéantie. »

» D'après quelques idées que je me suis formées sur la théorie de la chaleur, la production de 1 unité de puissance motrice

(1000^{kg} élevés à 1^{m}) nécessite la destruction de 2,70 unités de chaleur. »

Carnot avait nettement défini l'équivalent mécanique de la chaleur et la mesure qu'il en donne surpasse en exactitude celle que Robert Mayer obtint quinze ans plus tard.

Robert Mayer, après avoir défini l'équivalent mécanique de la chaleur, se propose d'en déterminer la grandeur; la comparaison des deux chaleurs spécifiques d'un gaz lui en fournit le moyen. L'excès de la quantité de la chaleur employée pour échauffer un gaz à pression constante sur la quantité de chaleur employée pour l'échauffer à volume constant représente la quantité de chaleur équivalente au travail subi par la pression extérieure pendant que le gaz se dilate à température constante.

Cette proposition, prise par Mayer comme point de départ de la détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur, doit son exactitude à ce fait que l'expansion d'un gaz à température constante n'entraîne aucun travail intérieur. Mayer connaissait-il l'expérience de Gay-Lussac qui démontre cette absence de travail intérieur? On l'a nié; on a affirmé que c'était par un hasard heureux, dont il n'avait pas le mérite, que Mayer a évité l'erreur; le jugement est injuste; comme il arrive souvent, ceux qui ont condamné Mayer n'avaient pas ouvert son livre; ils auraient pu y lire le passage suivant :

« Gay-Lussac a montré qu'un fluide élastique qui s'écoule d'un vase plein dans un autre vase de même volume où, préalablement, on a fait le vide, se refroidit dans le premier ballon autant qu'il se réchauffe dans le second. Il en résulte qu'un poids donné de fluide élastique peut doubler, quadrupler de volume, ou occuper un espace plus grand encore sans qu'il y ait changement de température, et que l'expansion d'un gaz ne produit par elle-même aucune dépense de chaleur. Le gaz, au contraire, quand il se dilate en *surmontant une pression,* subit un changement de température. »

Après avoir cité ce passage, M. Bertrand ajoute :

« Les mots *unter einem Drucke* sont imprimés en lettres capitales. Mayer prévoyait-il qu'on ne les regarderait pas? »

La méthode de Mayer pour déterminer l'équivalent mécanique de la chaleur était peu précise. Joule inventa, pour en trouver la

valeur avec précision, d'admirables méthodes expérimentales, devenues aujourd'hui classiques, qui ont assuré au nouveau principe toute la confiance des physiciens.

« IV. Clausius, dit M. Bertrand, a fait preuve de modestie en conservant au *théorème* qui fait l'objet de ce Chapitre le nom illustre de Carnot. Carnot, dans son admirable Opuscule, a étudié seulement le cycle qui porte son nom. Dans l'énoncé des théorèmes relatifs à ce cycle il laisse subsister une fonction inconnue; Clausius a transformé l'énoncé, l'a rendu applicable à tous les cas, déterminé la fonction inconnue et remplacé, dans la démonstration, des hypothèses inacceptables par un *postulatum* qui n'a jamais été mis en défaut. »

Pour apprécier la portée immense de l'œuvre de Clausius, représentons-nous l'état de la science de la chaleur au moment où parut son premier Mémoire.

Cette science se composait alors de deux parties disparates et contradictoires. L'une partait de cette hypothèse qu'un corps pris dans un état donné renferme une quantité déterminée de calorique. Elle était riche en grandes découvertes. Elle avait fourni la théorie des gaz et les théorèmes fondamentaux sur la puissance motrice du feu. Elle avait pour elle l'autorité de Laplace, de Poisson, de Carnot et de Clapeyron.

L'autre soutenait que la chaleur peut être détruite pour engendrer une quantité équivalente de travail. Inaugurée par Mayer, elle était appuyée par les belles expériences de Joule, et Helmholtz, dans son Opuscule *Sur la conservation de la force,* en poussait les conséquences dans toutes les branches de la Physique.

Que devait faire le physicien en présence de ce désaccord? Comment adopter à la fois deux théories dont les principes étaient incompatibles? Comment rejeter l'une ou l'autre de ces théories si fécondes? Le meilleur parti n'était-il pas de suivre sans idée préconçue les conséquences de chacune d'elles, comptant sur les découvertes expérimentales de l'avenir pour résoudre la question? C'est du moins celui que Sir W. Thomson proposait dans un Mémoire important où il poursuivait les vues de Carnot et de Clapeyron, malgré les idées de Mayer et de Joule dont il admettait l'exactitude.

C'est au milieu de ce trouble que paraît le Mémoire de R. Clausius *Sur la puissance motrice de la chaleur*. Après avoir énoncé, pour la première fois, d'une manière nette et précise, le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail, en introduisant la notion d'énergie interne, le jeune professeur de Bonn affirmait que ce nouveau principe, en détruisant les fondements de la théorie de Sadi Carnot, en laissait subsister les conséquences en les complétant. L'hypothèse inacceptable de l'invariabilité du calorique devait seulement être remplacée par un postulatum obtenu en généralisant ce que nous enseigne l'expérience la plus vulgaire : dans un système donné, un corps de température déterminée ne peut s'échauffer aux dépens d'un corps à plus basse température si l'énergie interne du système ne subit aucune variation et si les forces externes n'effectuent aucun travail.

Moyennant ce postulatum, Clausius démontrait que le rapport du travail effectué à la chaleur fournie par le foyer a pour valeur, dans un moteur qui fonctionne suivant un cycle de Carnot entre les températures T_0 et T_1,

$$\frac{E(T_1 - T_0)}{T_1},$$

E étant l'équivalent mécanique de la chaleur, ce qui était la forme nouvelle du principe de Carnot. L'équation donnée par Clapeyron entre la chaleur de vaporisation devenait alors, par la détermination de la fonction de Carnot,

$$L = \frac{1}{E} T(s - \sigma) \frac{dp}{dT}.$$

Clausius en déduisait les valeurs de la densité de la vapeur d'eau saturée et les expériences ingénieuses de Fairbairn et Tate, faites en même temps par des physiciens qui ignoraient les travaux de Clausius, apportaient à l'équation ainsi précisée une puissante confirmation, tandis que J. Thomson, prévoyant au moyen de la même équation la variation du point de fusion de la glace avec la pression, préparait un nouveau triomphe à la théorie. Enfin, dans ce même premier Mémoire, Clausius introduisait la notion de la chaleur spécifique de vapeur saturée, montrait au moyen des données fournies par Regnault que, pour la vapeur d'eau, cette

chaleur spécifique devait être négative et en déduisait cette conséquence, si paradoxale en apparence, mais si féconde pour la théorie de la machine à vapeur, que la vapeur d'eau saturée et sèche se condense en partie dans une détente adiabatique; conséquence qui, vérifiée plus tard par les expériences de M. Hirn, doit être placée au nombre des grandes vérités que la théorie a fait prévoir.

Quelques années plus tard, Clausius complétait ce premier Mémoire en étendant l'énoncé du théorème de Carnot à tous les cycles possibles. Pour toutes les transformations réversibles, le quotient $\frac{dQ}{T}$ de la quantité de chaleur absorbée par la température absolue est la différentielle totale d'une fonction de l'état du système, l'*entropie*, en sorte que, pour tout cycle fermé réversible, l'intégrale $\int \frac{dQ}{T}$ est nulle; elle est négative pour tout cycle fermé non réversible.

Sadi Carnot a prévu les deux grandes lois de la Thermodynamique. Clausius les a énoncées sous une forme précise et générale, en a compris l'accord et en a déduit une théorie de la chaleur. Ces deux grands noms dominent toute la Thermodynamique : l'un en a été le précurseur, l'autre le législateur; ils sont inséparables, et, si nous osions émettre ici notre humble avis, nous demanderions à M. J. Bertrand la permission de ne point trouver injuste l'usage commençant, qui, en donnant à la seconde loi de la théorie de la chaleur la dénomination de *principe de Carnot-Clausius,* unit au nom de notre illustre compatriote le nom de celui qui a vraiment fait revivre ses découvertes et en a assuré la fécondité.

En affirmant nettement et hautement la grandeur du rôle joué par Clausius dans la création de la science qui nous occupe, M. Bertrand a ramené aux lois de la justice et de l'impartialité l'histoire de la Thermodynamique, qui semblait s'en être affranchie.

V. Dans les sept Chapitres suivants, intitulés : *Équations différentielles. Fonctions caractéristiques. Quelques théorèmes. Quelques problèmes. Quelques applications. La condensation pendant la détente. Cycle de la vapeur et diagramme des machines,* M. J. Bertrand étudie les conséquences

générales ou particulières des principes posés dans les quatre premiers Chapitres.

Pour ne point prolonger au delà de toute limite ce compte rendu, nous nous bornerons à exposer les plus neuves parmi ces conséquences : elles ont trait à la recherche des formules propres à représenter, en fonction de la température, la tension de vapeur saturée d'un liquide.

Une première formule est démontrée par M. Bertrand en supposant constante la chaleur spécifique du liquide et en appliquant à la vapeur toutes les lois relatives aux gaz parfaits. La formule à laquelle on parvient ainsi a été autrefois indiquée par Athanase Dupré. Elle est la suivante

$$\log p = a - \frac{b}{T} - c \log T,$$

a, b, c étant trois constantes.

Cette formule représente avec une assez grande exactitude, lorsqu'on y donne à a, b, c des valeurs convenablement choisies, les tensions de vapeur de l'eau, de l'éther, de l'alcool, de l'éther chlorhydrique, du chloroforme, du sulfure de carbone, du chlorure de carbone, de l'acide sulfureux, de l'ammoniaque, du protoxyde d'azote, de l'acide carbonique, de l'essence de térébenthine, de l'hydrogène sulfuré, de l'esprit-de-bois, du mercure et du soufre.

« La formule obtenue par Dupré, dit M. Bertrand, s'accorde avec l'expérience d'une manière très remarquable. L'erreur ne dépasse, dans aucun cas, les incertitudes des mesures les plus soigneusement prises.

» Il n'en faut pas conclure l'exactitude théorique de la loi ainsi exprimée. Nous avons, pour trouver cette loi, attribué, contrairement aux faits, les propriétés des gaz parfaits aux vapeurs voisines du point de saturation. L'hypothèse n'est pas justifiée.

» Pour apprécier l'importance de l'accord obtenu, il ne faut pas oublier que trois constantes ont été laissées arbitraires dans la formule. Le calcul les rattachait aux propriétés spécifiques du corps étudié; nous n'en avons pas tenu compte. Les constantes ont été choisies de manière à rendre la formule exacte pour trois valeurs de la température. »

Voici maintenant une autre formule dans laquelle une place bien moindre est laissée au choix arbitraire des constantes :

Supposons que les deux chaleurs spécifiques d'une vapeur soient fonction seulement de la température et non de la pression. Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire, d'après M. Bertrand, que l'on ait entre la pression, le volume et la température de la vapeur la relation

$$\frac{pv}{T+\mu} = \text{const.},$$

μ étant une constante. Pour la vapeur d'eau, on trouve que l'on a sensiblement

$$\frac{pv}{T+127} = 2,47,$$

ce qui semble montrer que l'hypothèse faite sur les caloriques spécifiques est, dans ce cas, voisine de la vérité.

Cela étant, de la relation générale

$$L = AT(s-\sigma)\frac{dp}{dT},$$

et de l'équation

$$L = 800 - 0,705\,T,$$

qui représente fort exactement le résultat des recherches de Regnault sur la chaleur de vaporisation de l'eau, on trouve la formule

$$p = G\frac{T^{79,714}}{(T+127)^{88,635}}.$$

G étant une constante qui se détermine par un cas particulier, en exprimant par exemple que, pour $T = 373$, on a $p = 760$.

« La formule, comparée aux Tables, dit M. Bertrand, donne des résultats remarquablement exacts. »

Le rapport $\frac{Ap(s-\sigma)}{L}$ n'est pas, en général, pour un liquide, une quantité indépendante de T ; les Tables de Zeuner montrent cependant que ce rapport est à peu près constant pour certains liquides entre certaines limites de température. Pour ces liquides, on doit avoir, comme le démontre M. Bertrand,

$$p = GT^{\mu},$$

G et μ étant deux constantes. Cette formule concorde avec l'expérience précisément dans les limites où l'hypothèse prise pour point de départ est vérifiée.

Pour la plupart des liquides, le rapport $\frac{Ap(s-\sigma)}{L}$ n'est pas constant; mais il peut être représenté par une formule linéaire de la forme

$$\frac{Ap(s-\sigma)}{L} = \alpha T + \beta.$$

On a alors, comme le démontre M. Bertrand, pour relation entre la tension de vapeur saturée et la température,

$$p = G\left(\frac{T}{T + \frac{\beta}{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Cette relation s'applique très exactement à l'eau, à l'alcool, à l'éther, à l'acide carbonique, au chloroforme, à l'ammoniaque, au sulfure de carbone, au chlorure de carbone, à l'acide sulfureux, au soufre, au mercure, au chlorure de bore, au chlorure de silicium, au chlorure de cyanogène, au chlorure de phosphore, à l'éther chlorhydrique, au protoxyde d'azote, à l'esprit-de-bois, à l'hydrocarbure de brome, à l'éther bromhydrique, à la benzine, à l'hydrogène sulfuré et à l'essence de térébenthine.

M. J. Bertrand applique ensuite des considérations analogues aux phénomènes de dissociation et parvient à représenter les tensions de dissociation des chlorures ammoniacaux par des formules semblables à celles qu'il a adoptées pour les tensions de vapeur.

VI. « Je serai très bref, dit M. Bertrand, sur les *cycles irréversibles;* les démonstrations et les énoncés mêmes de leurs propriétés me paraissent jusqu'ici manquer de rigueur et de précision....

Je m'étendrai moins encore sur un théorème dont on a fait de nombreuses applications. Les démonstrations proposées jusqu'ici ne rendent pour moi le théorème ni certain, ni vraisemblable.

» L'intégrale $\int \frac{dQ}{T}$, qui est nulle pour un cycle fermé réversible, a pour tout autre une valeur négative. L'auteur d'un excellent Livre sur la Théorie mécanique de la chaleur, M. de Saint-Robert, sans exprimer une opinion contraire à la théorie devenue presque classique, s'est borné à transcrire la page consacrée par

Verdet à la démonstration sur laquelle il semble par là décliner toute responsabilité personnelle....

» En m'abstenant de traiter les questions auxquelles on a mêlé la considération de cycles irréversibles, je donnerai deux résultats obtenus en cherchant à préciser cette étude, restée pour moi trop difficile et trop vague. »

Le premier de ces résultats est le suivant : lorsque les divers points d'un corps sont à des températures différentes, les échanges de chaleur qui s'effectuent par conductibilité entre les diverses parties de ce corps ont toujours pour effet d'accroître la somme des entropies des éléments en lesquels ce corps peut être décomposé.

Le second de ces résultats peut s'énoncer ainsi : La somme des entropies de deux masses du même gaz qui occupent des volumes différents, sous des pressions différentes à des températures différentes, est moindre que l'entropie du mélange que l'on obtient en laissant communiquer les deux récipients.

« Les deux exemples précédents, ajoute M. Bertrand, sont dignes d'intérêt, mais ils n'autorisent pas à regarder le théorème général comme démontré.

» Il faudrait commencer par préciser l'énoncé, et, dans beaucoup de cas, cela paraît fort difficile. »

L'Ouvrage se termine par un Chapitre consacré à l'étude des courants, du travail de l'Électricité, du transport de la force. Nous nous contenterons de le signaler pour ne point dépasser les bornes qui doivent limiter l'étendue de notre analyse. Quelque longue qu'elle puisse paraître au lecteur, elle est certainement bien incomplète : nous n'avons pu signaler toutes les vues nouvelles et profondes répandues dans les différentes parties de l'Ouvrage; cette publication nouvelle d'un maître illustre marquera, nous croyons pouvoir l'affirmer, une date dans l'histoire de la Thermodynamique; écrite dans ce langage élégant et lucide qu'il est superflu de louer, elle contient, en même temps qu'un exposé magistral des principes fondamentaux, les applications les plus propres à intéresser les physiciens et contribuera, dans une large mesure, à répandre le goût d'une science, qui a déjà fait ses preuves mais dont l'avenir est pour ainsi dire sans limite.

P. D.

JORDAN. — Cours d'Analyse a l'École Polytechnique. Tome III [1]. *Calcul intégral. Équations différentielles.* 1 vol. in-8°; XIV-615 p. Paris, Gauthier-Villars; 1887.

La publication du troisième Volume du Cours d'Analyse de M. Jordan était d'autant plus désirée qu'un Ouvrage didactique sur la théorie des équations différentielles faisait défaut. Le nom de l'auteur, les belles leçons qu'il avait faites récemment au Collège de France sur ce sujet, donnaient à espérer que cette théorie serait traitée avec l'ampleur désirable. L'espoir de personne n'aura été déçu. Nous allons passer rapidement en revue les matières contenues dans ce Volume. Il comprend quatre Chapitres et un Appendice.

Le premier Chapitre est consacré aux équations différentielles ordinaires. Après avoir rappelé que le Calcul différentiel conduit à de telles équations, l'auteur montre comment un système d'équations différentielles peut être ramené à la forme normale et comment, d'un autre côté, on peut en faire dépendre l'intégration de l'intégration d'une équation différentielle ne contenant qu'une seule inconnue; il signale en passant le cas des équations différentielles algébriques, introduit les notions connexes de *solution propre* et *d'équation différentielle irréductible* et donne une importante application de ces notions aux intégrales abéliennes. Il précise ensuite le problème de l'intégration et définit les intégrales générales, particulières ou singulières, soit dans le cas d'une équation différentielle du premier ordre, soit dans le cas d'un système d'équations simultanées.

Ces préliminaires posés, on aborde les équations différentielles du premier ordre : on montre comment la recherche du facteur propre à intégrer et celle des transformations infinitésimales d'une telle équation ne constituent au fond qu'un seul problème. Ces principes permettent d'intégrer un certain nombre d'équations classiques. Après les avoir énumérées, M. Jordan donne les résultats essentiels du Mémoire de M. Darboux [2] *Sur les équa-*

---

(1) Voir *Bulletin*, VI_1, 262; VIII_1, 225.
(2) Voir *Bulletin*, II_1, 60, 125, 151.

tions différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré. L'équation bien connue de Jacobi, qui équivaut, au fond, à un système de trois équations différentielles linéaires à coefficients constants, est traitée comme application de cette méthode. Il signale quelques cas simples d'équations où la dérivée de la fonction inconnue figure à un degré supérieur au premier, et termine l'étude des équations différentielles du premier ordre à une inconnue par la démonstration des théorèmes d'addition pour les fonctions logarithmiques, circulaires et elliptiques.

Vient ensuite l'étude des systèmes d'équations différentielles simultanées. La notion de *multiplicateur,* au sens de Jacobi, est introduite immédiatement, et l'on montre que, lorsque l'on connaît $n-1$ intégrales du système de n équations, et un multiplicateur, la fin de l'intégration ne dépend que de simples quadratures; ce théorème s'applique immédiatement aux équations *canoniques,* pour lesquelles on est ainsi conduit, par une voie naturelle, au théorème de Poisson. Revenant à la théorie générale, M. Jordan donne quelques indications sur les transformations infinitésimales et montre comment leur considération conduit aux cas les plus simples d'abaissement. Quelques applications intéressantes terminent ce paragraphe.

Les systèmes d'équations différentielles ordinaires dont il a été question jusqu'ici ne sont qu'un cas particulier des équations linéaires aux différentielles totales : c'est dans ce cas général que l'on aperçoit, grâce aux travaux de M. Mayer et de M. Lie, toute la portée des notions précédemment acquises : la notion de multiplicateur s'étend immédiatement, en cherchant encore une fonction dont la différentielle totale soit une combinaison linéaire des premiers membres des équations proposées; mais ici, cette fonction, au lieu de satisfaire à une seule équation linéaire aux dérivées partielles, doit vérifier un système de telles équations. On est ainsi amené à la recherche des intégrales communes à un pareil système : de là résulte la notion de *système complet,* et, plus particulièrement de *système jacobien :* grâce à cette notion, on obtient, sous une forme simple, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système de n équations aux différentielles totales admette n intégrales distinctes, et l'on montre comment, en supposant ces conditions vérifiées, la recherche des intégrales du système dépend

de l'intégration d'un système de n équations différentielles simultanées, chaque intégrale de ce système fournissant au moins une intégrale du système proposé. Enfin la théorie précédente a, encore ici, les liens les plus étroits avec la théorie des transformations infinitésimales.

Les méthodes exposées jusqu'ici permettent, dans des cas très particuliers, de trouver l'intégrale générale des équations différentielles; elles supposent toutefois l'existence de cette intégrale : démontrer cette existence pour un système d'équations différentielles normales, trouver une méthode qui permette de calculer avec telle approximation que l'on veut les valeurs des fonctions inconnues pour des valeurs réelles ou imaginaires de la variable, tel est le problème dont s'occupe ensuite M. Jordan. Il reprend d'abord, en la précisant sur quelques points, la démonstration que l'on doit à Briot et Bouquet du théorème fondamental, et montre comment ce théorème permet de définir les fonctions inconnues le long d'une ligne, que l'on peut d'ailleurs déformer d'une façon continue, à condition de ne passer par aucun *point critique*. La détermination de ces points critiques est, en général, un problème impossible; elle s'obtient dans le cas où les seconds membres des équations différentielles normales sont des expressions linéaires par rapport aux fonctions inconnues; les points critiques des intégrales ne peuvent alors être différents des points critiques des fonctions de la variable indépendante qui figurent comme coefficients dans ces expressions linéaires. M. Jordan montre enfin, en reprenant les beaux exemples traités par Briot et Bouquet, comment on peut effectuer l'étude des intégrales aux environs de leurs points critiques.

Le second Chapitre est consacré tout entier aux équations différentielles linéaires. L'auteur établit d'abord les propriétés essentielles du système d'équations de la forme

$$\frac{dx_i}{dx} + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les fonctions inconnues de la variable indépendante x et les a_{ij} des fonctions données de cette même variable; il définit les solutions indépendantes, montre que celles

que l'on connaît permettent de réduire le problème de l'intégration, traite le cas où le second membre, au lieu d'être zéro, est une fonction connue, introduit enfin la notion de système adjoint : les mêmes questions élémentaires sont reprises pour les équations différentielles linéaires d'ordre quelconque à une seule inconnue. Le cas des coefficients constants est traité par la méthode d'Euler et par celle de Cauchy. Sous ce titre : *Intégration par les séries*, M. Jordan aborde ensuite l'étude des théories qui ont leur point de départ dans les Mémoires classiques de M. Fuchs : il établit en premier lieu la forme que l'on peut donner aux intégrales dans le voisinage d'un point critique, introduit la notion d'*intégrales régulières* et donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation différentielle proposée admette, aux environs d'un point, un système d'intégrales indépendantes, toutes régulières; puis, après avoir donné quelques indications sur la façon dont on peut déterminer la valeur finale d'une intégrale quelconque lorsque la variable indépendante décrit une ligne donnée, il développe la notion si importante du *groupe* d'une équation différentielle linéaire. La connaissance du groupe permet tout d'abord de reconnaître si l'équation est irréductible ou non; il en est ainsi suivant que le groupe de l'équation est primaire ou non : M. Jordan indique la voie qu'il faut suivre pour arriver à cette distinction. Il s'occupe ensuite de la recherche des équations différentielles dont toutes les intégrales sont algébriques : on obtient d'abord sans peine la forme générale des équations dont les intégrales sont partout régulières, les équations cherchées doivent évidemment satisfaire à cette condition; mais il faut, en outre, que les substitutions du groupe soient en nombre fini. Cette dernière condition est d'ailleurs suffisante; M. Jordan donne quelques indications sur les conséquences auxquelles elle conduit, conséquences qu'on ne saurait développer indépendamment d'une exposition détaillée des principes de la théorie des substitutions. Il s'arrête ensuite sur le cas plus facile où toutes les intégrales doivent être rationnelles, sur le cas, traité par M. Halphen, où toutes les intégrales sont partout régulières et sont monodromes dans toute région du plan qui ne contient pas un point déterminé, et enfin sur les équations, également considérées par M. Halphen, dont les coefficients sont des polynômes tels que le premier soit de degré au moins égal à

celui des autres, et dont les intégrales n'admettent pas d'autres points critiques que des pôles, ce que les méthodes précédemment développées permettent de reconnaître.

La recherche des équations différentielles du second ordre à intégrales régulières et n'admettant que trois points critiques conduit, par la voie la plus naturelle, à la célèbre équation de Gauss. M. Jordan montre comment on parvient aux vingt-quatre développements en séries hypergéométriques qui vérifient cette équation, et comment on établit les relations linéaires qui existent entre eux; il donne enfin quelques indications sur les développements en série qui procèdent suivant des polynômes hypergéométriques, en particulier suivant les polynômes de Legendre. L'étude de l'équation de Bessel et de quelques équations qui s'y rattachent termine cette Section.

La suivante est consacrée à l'intégration par des intégrales définies. Un exemple d'une grande portée est donné par l'équation

$$\begin{aligned} &Q(x)\frac{d^n I}{dx^n} - (\xi - n)Q'(x)\frac{d^{n-1} I}{dx^{n-1}} \\ &\quad + \frac{(\xi - n)(\xi - n + 1)}{1.2} Q''(x)\frac{d^{n-2} I}{dx^{n-2}} - \ldots \\ &\quad - R(x)\frac{d^{n-1} I}{dx^{n-1}} + (\xi - n + 1)R'(x)\frac{d^{n-1} I}{dx^{n-2}} - \ldots = 0, \end{aligned}$$

où ξ est une constante et $Q(x)$, $R(x)$ deux polynômes, tels que l'un des polynômes $Q(x)$, $xR(x)$ soit de degré n, et l'autre de degré égal ou inférieur. Cette équation contient l'équation de Gauss comme cas très particulier. On la vérifie en posant

$$I = \int_L U(u - x)^{\xi - 1}\, du,$$

U étant déterminé par la condition

$$U R(u) = \frac{d}{du}[U Q(u)],$$

si la ligne d'intégration L est un contour fermé, tel que la fonction

$$V = U Q(u)(u - x)^{\xi - n},$$

reprenne sa valeur initiale lorsqu'on revient au point de départ, où si L est une ligne telle que V s'annule à ses deux extrémités. On peut obtenir ainsi, en variant les lignes d'intégration, n intégrales particulières distinctes, au moyen desquelles on parvient à déterminer le groupe de l'équation. Dans le cas particulier où les racines a, b, c, ... de $Q(u)$ sont finies et inégales, les intégrales particulières de l'équation sont fournies par la formule simple

$$I = \int_L (u-a)^{\alpha-1}(u-b)^{\beta-1}\ldots(u-x)^{\xi-1}\,du,$$

où L est un contour fermé quelconque, tel que la fonction à intégrer reprenne sa valeur initiale après l'avoir décrit; si α, β, ..., ξ sont réels et rationnels, I est une période d'une intégrale abélienne.

L'équation différentielle de Laplace s'intègre d'une façon toute semblable. M. Jordan s'arrête sur l'équation

$$x\frac{d^2 I}{dx^2} + (2n+1)\frac{dI}{dx} + xI = 0,$$

qui en est un cas particulier et qui s'intègre au moyen des fonctions de Bessel : cette équation lui donne occasion de faire une intéressante digression sur les intégrales eulériennes, et lui fournit un bel exemple de la recherche d'une valeur asymptotique.

La dernière Section de ce Chapitre se rapporte aux équations linéaires à coefficients univoques et doublement périodiques, et à intégrales univoques, équations auxquelles M. Jordan attache le nom de M. Émile Picard. L'auteur montre qu'on peut les intégrer au moyen des fonctions doublement périodiques, et traite, comme application, de l'équation de Lamé, de façon à obtenir quelques-uns des résultats essentiels que l'on doit à M. Hermite.

Le Chapitre III est relatif aux équations aux dérivées partielles. Après quelques préliminaires indispensables, M. Jordan expose la démonstration, donnée par Mme de Kowalewski, du théorème de Cauchy sur l'existence des solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles. Passant ensuite aux équations du premier ordre, il traite d'abord des équations linéaires; puis, après avoir introduit les notions d'intégrale complète et d'intégrale générale, il aborde le problème de l'intégration par la méthode des *carac-*

téristiques, que M. Darboux a développée dans son *Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* Il semble bien que cette méthode, en raison de l'interprétation géométrique qu'elle comporte, et qui en éclaire les diverses étapes, doive être en effet exposée avant les autres. M. Jordan la fait suivre de la première méthode de Jacobi, celle qui se relie aux équations canoniques, et par là aux équations générales de la Dynamique, qui, d'ailleurs, ne diffère pas au fond de la méthode d'intégration qui porte le nom de Cauchy. La seconde méthode de Jacobi, dans laquelle on considère successivement une série de systèmes d'équations différentielles, dans chacun desquels il suffit de déterminer une seule intégrale, et qui s'applique immédiatement à la recherche des solutions communes à plusieurs équations aux dérivées partielles simultanées, est développée ensuite avec les perfectionnements si importants que lui ont apportés MM. Mayer et Lie. M. Jordan termine enfin l'étude des équations du premier ordre en cherchant la forme générale des fonctions Z_i, X_i, P_i, ρ telles que l'on ait identiquement

$$\begin{aligned} &dZ - P_1\,dX_1 - P_2\,dX_2 - \ldots - P_n\,dX_n \\ &\quad = \rho(dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_n\,dx_n), \end{aligned}$$

et en donnant quelques indications sur les transformations de contact.

Pour ce qui est des équations aux dérivées partielles du second ordre, l'auteur traite d'abord quelques cas particuliers : ainsi il s'occupe successivement de l'équation d'Euler

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

où a, b, c sont des constantes; de l'équation analogue où a, b, c seraient des fonctions de x et de y, et où le second membre, au lieu d'être nul, serait une fonction de x, y, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$; plus particulièrement de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + M\frac{\partial z}{\partial x} + N\frac{\partial z}{\partial y} + Pz + Q = 0,$$

où M, N, P, Q sont des fonctions de x et y seulement, équation pour laquelle il signale la double série de cas d'intégrabilité; de

l'équation de Liouville

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = e^{2\lambda z},$$

enfin de l'équation des surfaces minima. Il introduit ensuite la notion d'intégrale intermédiaire et en fait une application à l'équation des surfaces développables. Il consacre enfin une importante Section aux beaux exemples d'équations linéaires à coefficients constants qui jouent un rôle si considérable dans la Physique mathématique.

Après quelques considérations générales sur la réduction du problème, M. Jordan montre comment on peut profiter de la forme linéaire des équations, lorsqu'on en a obtenu une infinité de solutions particulières, pour en déduire une solution qui se présente, dans certains cas, sous la forme d'une intégrale multiple dont le champ d'intégration est arbitraire et, dans d'autres cas, sous la forme d'une série illimitée à coefficients arbitraires, comment enfin on peut utiliser l'indétermination, soit du champ d'intégration, soit des coefficients de la série, pour satisfaire aux conditions aux limites. Les problèmes auxquels ces méthodes sont appliquées sont les suivants : Propagation de la chaleur dans un milieu indéfini ; propagation du son ; problème de Cauchy ; propagation de la chaleur dans une barre indéfinie dans un sens ; cordes vibrantes ; refroidissement d'une barre hétérogène ; équilibre de température d'une sphère ; équilibre de température de l'ellipsoïde ; refroidissement d'une sphère. La question à laquelle M. Jordan donne le nom de problème de Cauchy est la suivante : Déterminer les fonctions U, V, ... des variables t, x, y, z, qui satisfont d'une part à un système d'équations

$$R = \varpi(t, x, y, z), \qquad R_1 = \varpi_1(t, x, y, z), \qquad \ldots,$$

ayant pour premiers membres des fonctions linéaires à coefficients constants de U, V, ... et de leurs dérivées partielles, et, d'autre part, aux conditions initiales, pour $t = 0$,

$$U = f(x, y, z), \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = f_1(x, y, z),$$

$$V = \varphi(x, y, z), \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = \varphi_1(x, y, z),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le problème du refroidissement d'une barre hétérogène offre l'occasion d'établir les résultats importants que l'on doit à Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre.

Les derniers problèmes cités plus haut, par le rôle essentiel qu'y jouent les fonctions de Laplace, de Legendre et de Lamé, les fonctions elliptiques, la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, offrent un haut intérêt analytique.

Le Chapitre IV et dernier est consacré au calcul des variations. Après avoir défini les variations successives d'une fonction $\varphi[x, y, y', \ldots, y^{(m)}, z, z', \ldots, z^{(n)}, \ldots]$ de la variable indépendante x, des fonctions y, z, ... de cette variable et de leurs dérivées, comme les différents termes du développement, suivant la formule de Taylor,

$$\varphi + \varepsilon\varphi_1 + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi_2 + \ldots,$$

auquel on parvient quand on remplace y, z, ... par $y + \varepsilon\eta$, $z + \varepsilon\zeta$, ..., ε désignant une constante infiniment petite, M. Jordan montre comment on peut déterminer les variations successives d'une intégrale définie simple; après avoir prouvé que, pour qu'une telle intégrale soit maximum ou minimum, sa variation première doit s'annuler pour tout système de variations des fonctions inconnues et des limites de l'intégrale compatibles avec les conditions du problème, il établit les équations différentielles qui fournissent la solution de ce problème, quand toutes ces variations sont arbitraires, équations qui se ramènent à un système canonique, ainsi que Jacobi l'a montré; il examine ensuite les diverses restrictions qui peuvent être apportées aux variations, tant des fonctions inconnues que des limites de l'intégrale, et développe les applications suivantes : conditions pour que l'expression $\varphi[x, y, y', \ldots, y^{(m)}, z, z', \ldots, z^{(n)}, \ldots]$ soit la dérivée exacte d'une fonction ψ de $x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}, z, z', \ldots, z^{(n-1)}, \ldots$; transformation des équations générales de la Dynamique, brachistochrones, lignes géodésiques, en particulier, lignes géodésiques de l'ellipsoïde et principales propriétés de ces courbes; problème des isopérimètres. M. Jordan passe, dans la Section suivante, à l'étude de la variation seconde. Il montre d'abord qu'on peut toujours supposer que, dans la fonction qui figure sous le signe

de l'intégrale définie et dans les équations différentielles que les fonctions inconnues peuvent être assujetties à vérifier, ces fonctions inconnues ne soient engagées qu'avec leurs dérivées premières. Le système d'équations différentielles auquel on est conduit en annulant la variation première, jointes aux équations différentielles de condition, peut, en général, être remplacé par un système canonique. En transformant la variation seconde, on parvient à une première forme des conditions pour l'existence effective d'un maximum ou d'un minimum. Les propriétés des systèmes canoniques permettent d'établir une nouvelle transformation de la variation seconde, d'où résultent, sous leur forme la plus simple, les caractères des maxima et des minima. Enfin M. Jordan donne quelques indications sur la variation première des intégrales multiples; il se sert de la forme que M. Ostrogradski a donnée à cette variation pour la transformer au moyen de l'intégration par parties et parvenir aux équations aux dérivées partielles qui expriment qu'elle est nulle; comme application, il traite des surfaces minima et de la forme d'équilibre d'un liquide contenu dans un vase de forme donnée.

Il nous reste à parler de l'Appendice par lequel M. Jordan a terminé son bel Ouvrage. Il se rapporte aux points délicats de la théorie des fonctions d'une variable réelle et d'une variable imaginaire. Ces points n'avaient pas été touchés dans le premier Volume et, par suite, quelques démonstrations prêtaient à des objections, qu'il est facile de lever en introduisant quelques notions, qui sont aujourd'hui familières à tous les géomètres. Ce sont ces notions que M. Jordan commence par rappeler : il débute par le concept de nombre irrationnel, fondement nécessaire de l'idée de limite; les notions de continuité, de limites supérieure et inférieure sont précisées avec une entière rigueur; elles suffisent à établir un théorème de M. Darboux relatif à l'intégration des fonctions discontinues, et à en déduire les conséquences essentielles, relatives aux fonctions intégrables. L'auteur passe de là à la définition des fonctions à variation limitée : on sait le parti qu'il a tiré de cette notion dans ses belles recherches sur la série de Fourier. Les propriétés des fonctions continues de ne pouvoir changer de signe qu'en s'annulant et d'atteindre leurs limites supérieure et inférieure dans un intervalle donné permet-

tent ensuite d'établir rigoureusement le théorème de Rolle sans supposer la continuité de la dérivée. M. Jordan signale l'exemple que l'on doit à M. Weierstrass d'une fonction continue qui n'admet point de dérivée et montre que cette fonction a une variation illimitée dans tout intervalle. Enfin la notion de fonction implicite est exposée, dans toute sa généralité, avec les détails qui conviennent.

M. Jordan passe ensuite à la notion de *courbe continue*, considérée comme l'ensemble des points représentés par les équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t),$$

où f et φ sont des fonctions continues de la variable t; si la courbe est fermée et sans point double, elle partage le plan en deux régions dont l'une est dite intérieure et l'autre extérieure à la courbe : cette proposition, que l'on admet habituellement, est assez malaisée à établir lorsqu'on ne veut pas faire appel à l'intuition géométrique; mais il semble bien que l'auteur ait eu raison de s'y arrêter, puisqu'il est impossible de se représenter une courbe avec le degré de généralité qu'il a voulu conserver. L'éminent géomètre s'occupe après cela des conditions pour qu'une courbe soit rectifiable ou quarrable. Relativement aux fonctions d'une variable imaginaire, il insiste avec raison sur la nécessité où l'on est de supposer dans la définition que $\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ tende uniformément vers la dérivée $f'(z)$; il reprend ensuite la notion d'intégrale, afin d'établir en toute rigueur le théorème de Cauchy, en se plaçant au même point de vue et en usant des mêmes considérations que précédemment pour les courbes continues. Enfin, après avoir donné un exemple d'une fonction admettant une ligne continue de points critiques, il reproduit, en les complétant sur quelques points, les résultats de la belle analyse de M. Hermite relative à l'intégrale

$$\int_L \frac{F(t, z)}{G(t, z)}\, dt,$$

prise le long de la ligne déterminée L.

Il ne nous appartient assurément pas de faire l'éloge du Livre de M. Jordan, et il serait d'ailleurs difficile de le faire comme il

convient; mais on ne peut s'empêcher de dire que l'auteur s'est fait une idée singulièrement élevée de la tâche qu'il a entreprise et menée à bonne fin, et d'admirer l'art extraordinaire avec lequel il a su condenser, en un petit nombre de pages, une aussi grande quantité de matériaux. Il a exposé les théories en leur laissant leur plus haut degré de généralité et il semble qu'il soit ainsi parvenu à donner aux démonstrations leur forme la plus simple.

Qu'il nous soit permis, en terminant, d'exprimer un regret. Pourquoi l'auteur a-t-il été aussi avare de renseignements bibliographiques et pourquoi n'a-t-il pas mis au bas des pages les titres des Mémoires auxquels il ne pouvait manquer de songer en écrivant son Livre? Si haut que M. Jordan place l'idéal de l'enseignement, il doit toutefois reconnaître que son Livre n'est pas strictement élémentaire et qu'il rendra des services (des services considérables, nous pouvons bien l'ajouter) à ceux qui étudient les Mathématiques en n'ayant plus la perspective d'un examen à passer. A ceux-là, quelques brèves indications, permettant de remonter aux sources, n'auraient pas été inutiles. J. T.

TANNERY (PAUL). — LA GÉOMÉTRIE GRECQUE, COMMENT SON HISTOIRE NOUS EST PARVENUE ET CE QUE NOUS EN SAVONS, essai critique. Ire PARTIE : *Histoire générale de la Géométrie élémentaire.* — 188 p. gr. in-8. Paris, Gauthier-Villars, 1887.

Ce Volume est formé par la réunion des articles que l'auteur a publiés, depuis avril 1885, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques,* sur l'histoire de la Géométrie grecque. Nos lecteurs ont pu se rendre compte en effet que ces articles ne formaient pas des morceaux isolés, mais bien des Chapitres successifs d'un même Ouvrage, se développant suivant un plan nettement arrêté à l'avance et utilisant des matériaux réunis depuis longtemps.

Les premiers essais de l'auteur sur l'histoire des Mathématiques, essais qui ont paru dans les *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* depuis 1876, et qui ont été, de bonne heure, hautement appréciés par les juges compétents, n'indiquaient pas la voie dans laquelle il devait

entrer pour son premier Livre sur la matière. Alors M. Paul Tannery essayait de restituer des méthodes antiques perdues ou mal interprétées; il tentait de rectifier des idées erronées, mais courantes, sur le caractère de la Mathématique ancienne, ou il élucidait quelque point obscur de doctrine; parfois il ajoutait certains développements personnels. En somme, dans ces travaux, où la divination jouait d'ailleurs un grand rôle, le mathématicien dominait sur l'historien.

On aurait donc pu attendre de l'auteur une étude complète et approfondie sur la Géométrie grecque, en tant que géométrie, mais il n'a rien tenté de semblable, et, dès les premières lignes de la Préface, il déclare que qui veut connaître ce qu'était réellement cette Géométrie doit aller l'étudier dans les écrits mêmes d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius et de Pappus. Il est peut-être permis de faire de sérieuses réserves à l'encontre de cette déclaration : j'admets qu'aucun travail moderne ne puisse, pour les questions de forme, suppléer les textes originaux, mais sans doute il pourrait donner des notions exactes et suffisantes sur ces questions, au moins pour ce qu'elles ont de vraiment important. D'autre part, le fond est-il tellement inséparable de la forme qu'on ne puisse, sans habiller Archimède ou Apollonius à la moderne, donner une idée claire de leurs travaux, faire qu'en somme leurs noms puissent représenter, pour l'étudiant en Mathématiques, autre chose qu'une légende incertaine ou une idée fausse?

L'insuccès de telle tentative récente dans ce sens ne doit pas faire préjuger l'impossibilité de la tâche, et, sans aucun doute, M. Paul Tannery est mieux préparé que tout autre, au moins en France, pour l'accomplir. Souhaitons donc qu'il ne s'y dérobe pas toujours ou qu'au moins il ne décourage pas ceux qui voudraient essayer un pareil travail.

En tout cas, le volume aujourd'hui complété est purement historique, et le mathématicien s'est presque entièrement effacé. Cette évolution de l'auteur commençait à s'accuser dans les premiers articles de lui qui ont été insérés dans le *Bulletin*, à partir de 1879. Aujourd'hui elle semble achevée et elle nous vaut, sous une forme spéciale (la critique des sources de l'histoire de la Géométrie élémentaire chez les Grecs), l'exposé le plus fidèle qu'il y ait, soit en France, soit à l'étranger, de ce que l'on sait et de ce

que l'on soupçonne seulement sur l'origine et les progrès successifs de cette partie de la Science dans l'antiquité.

Quoique l'auteur se taise à ce sujet, l'idée du Livre s'est certainement dégagée pour lui du cours libre qu'il a professé pendant les années 1884 et 1885, à la Faculté des Sciences de Paris, sur l'histoire des Mathématiques. Dans ce cours, qui a embrassé l'ensemble de l'Arithmétique, de la Géométrie et de l'Algèbre depuis leur origine jusqu'au siècle dernier, la partie la plus originale a été sans contredit la seconde, et les quelques auditeurs qui ont pu le suivre, comme moi, retrouveront dans le volume qui vient de paraître, amplement développées, appuyées de preuves décisives et de faits nouveaux, les idées qu'ils ont entendu succinctement exposer.

La forme spéciale, *critique,* que j'ai indiquée, est, sans aucun doute, la mieux appropriée au tempérament propre de l'auteur. Elle offre, au point de vue de la composition, des défauts sur lesquels il est inutile d'insister. Le lecteur qui cherche une histoire de la Géométrie et qui, quoique M. Tannery se défende d'avoir essayé de l'écrire, la trouvera de fait aussi accomplie qu'elle peut l'être aujourd'hui, pourra cependant, dès l'abord, être quelque peu déconcerté de trouver comme cadre une analyse raisonnée du commentaire de Proclus sur Euclide et d'avoir à suivre l'auteur dans une série de digressions, toutes sans doute intéressantes et instructives, mais qui ne le ramènent au but qu'après de nombreux détours. Je me hâte d'ajouter qu'en regard de ce défaut le plan suivi offre de sérieux avantages : nous sommes introduits de plain-pied, et sans aucun mystère, dans les méthodes historiques; nous apprenons à pratiquer les règles de la critique, à nous défier des citations et des assertions sans preuves, nous voyons enfin avec quelle précaution il faut accumuler les arguments à l'appui de thèses nouvelles.

M. Paul Tannery nous promet une suite et au moins une seconde Partie de son Ouvrage : d'après son plan même, il n'a pas épuisé tout ce qu'il a à nous apprendre, même sur la Géométrie élémentaire; il lui reste à analyser la partie du commentaire de Proclus spécialement consacrée aux définitions, aux axiomes et aux propositions du premier Livre d'Euclide. Sur ce terrain spécial, nous espérons mieux retrouver le mathématicien que dans la première

Partie; à vrai dire, sauf quelques rares passages, celle-ci est plutôt, à proprement parler, l'œuvre d'un philologue de profession, dont l'érudition s'étendrait d'ailleurs à toutes les branches des connaissances humaines, selon le véritable sens qu'il faudrait maintenir au mot *philologie*. X.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

BAUMGART (OSW.). — *Ueber das quadratische Reciprocitätsgesetz. Eine vergleichende Darstellung der Beweise des Fundamentaltheorems in der Theorie der quadratischen Reste....* Inauguraldissertation, Göttingue.

BIELER (ALBERT). — *Gemeinschaftliche Tangenten und Polardreieck zweier Kegelschnitte.* Greussen beim Verfasser.

CARR (G.-S.). — *A Synopsis of elementary results in pure Mathematics, containing propositions, formulæ and methods of Analysis, with abridged demonstrations.* London, Hodgson. 34 sh.

CRANZ (C.). — *Synthetisch-geometrische Theorie der Krümmung von Kurven und Flächen. 2. Ordnung.* Stuttgart, Metzler. 3 M.

EICHENBERG (S.). — *Ueber das quadratische Reciprocitätsgesetz und einige quadratische Zerfällungen der Primzahlen.* Göttingen, Vandenhoeck und Rüprecht. 1 M. 60 Pf.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XI.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XI; 1887. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Pages

Adam (P.). — Mémoire sur les systèmes triples orthogonaux..... 240-243

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse..... 202-204

Bermach (W.). — Ueber n-mal nacheinander angewandte Substitutionen durch welche drei Quadrate in sich selbst transformirt werden..... 235-237

Bertrand (J.). — Thermodynamique..... 249-262

Biermann (O.). — Theorie der analytischen Functionen..... 204-205

Bougaief. — Principes généraux du calcul $E[\varphi(x)]$ avec une seule variable indépendante..... 61-73

Burmester. — Lehrbuch der Kinematik..... 239 240

Dwelshauvers-Dery (V.). — Principes de la résistance des matériaux.. 221

Favaro (A.). — Carteggio inedito di Ticone Brahe, Giovanni Keplero, e di altri celebri astronomi e matematici dei secoli XVI e XVII con Giovanni Antonio Magini..... 12-16

Halphen. — Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications.... 29-46

Hecker (J.). — Ueber Ruffini's Beweis für die Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung der allgemeinen Gleichung von einem höheren als dem vierten Grade..... 218-220

Jordan. — Cours d'Analyse à l'École Polytechnique..... 262-273

Jurgens (E.). — Zur Auflösung linearer Gleichungssysteme und numerischen Berechnung von Determinanten..... 187-189

Kneser. — Irreduktibilität und Monodromiegruppe algebraischer Gleichungen 121-122
Koenigsberger. — Beweis von der Unmöglichkeit der Existenz eines anderen Functionaltheorems als des Abel'schen 135-186
Laisant. — Théorie et Applications des équipollences 217-218
Lampe (E.). — Einige Zahlenbeispiele für die Anziehung, welche eine homogene Masse auf einen materiellen Punkt nach den Newtonschen Gesetze ausübt 8-11
— Geometrische und mechanische Aufgaben zur numerischen Auflösung von Gleichungen höherer Grade 78-80
Mannheim (A.). — Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique 82
Mansion (P.). — Éléments de la théorie des déterminants avec de nombreux exercices 220-221
— Théorie de l'élimination entre deux équations algébriques, au moyen des déterminants 221
Maxwell (J. Clerk). — Traité d'Électricité et de Magnétisme 11-12
Möbius. — Gesammelte Werke 81-82
Monteverde. — Elementi di Geometria projettiva 186-187
Peano. — Applicazione geometriche del Calcolo infinitesimale 237-239
Possé (G.). — Sur quelques applications des fractions continues algébriques 153-159
Reinhold von Lilienthal. — Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der krummen Oberflächen und geradlinigen Strahlensysteme 73-78
Scheeffer (L.). — Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Variabeln 6-8
Stolz (O.). — Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, nach den neueren Ansichten 201-202
Tannery (Paul). — Notice sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas 97
— La Géométrie grecque; comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons 273-276
Weierstrass. — Abhandlungen aus der Functionenlehre 5-9

MÉLANGES.

Bulletin bibliographique 151, 199, 225, 247, 276
Caspary (F.). — Sur les cubiques gauches 222-242
Combescure (Ed.). — Note sur les différentielles exactes homogènes 243-245
— Note sur les différentielles binômes 245-247
Darboux (G.). — Sur le maximum du produit de plusieurs facteurs positifs dont la somme est constante 149-151
— Sur l'extraction de la racine carrée 176-184
Duhem (P.). — Étude sur les travaux thermodynamiques de J. Willard Gibbs 122-159
Goursat (E.). — Sur les fonctions à espaces lacunaires 109-114
Lipschitz. — Principes d'un calcul algébrique qui contient, comme espèces particulières, le calcul des quantités imaginaires et des quaternions 115-122
Malo (Ernest). — Théorème sur une équation du second ordre 16-17

Pages

PERROTT (J.). — Sur les logarithmes à un grand nombre de décimales et en particulier sur les Tables de Steinhauser 51
PICARD (E.). — Sur un point de la théorie générale des équations différentielles 194-198
STIELTJES (T.-J.). — Exemple d'une fonction qui n'existe qu'à l'intérieur d'un cercle 46-50
TANNERY (P.). — La technologie des éléments d'Euclide 17-28
— Les continuateurs d'Euclide 86-96
— Héron sur Euclide 97-109
— Les définitions du pseudo-Héron 189-193
TEIXEIRA (Gomes). — Lettre à M. J. Tannery 193-194
WEYR (Ed.). — Note sur la théorie des quantités complexes, formées avec n unités principales 205-225
ZEUTHEN (H.-G.). — Sur un problème de Steiner 82-86

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XI.

Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

12616 Paris — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

3

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL, GOURSAT, A. HARNACK, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. ET ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC..

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOUEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XI. — ANNÉE 1887.

(TOME XXII DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
Quai des Augustins, 55.

1887

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

MATHEMATISCHE ANNALEN, publiées par F. Klein et A. Mayer. Leipzig, 1884 (1).

Tome XXIV.

Kupper (*K.*). — Sur les polygones de Steiner situés sur une courbe du troisième ordre, théorèmes de Géométrie de position. (1-41).

Ce Mémoire avait paru en 1873 dans les *Mémoires de la Société royale des Sciences de Bohême,* mais on l'avait négligé dans les travaux ultérieurs parus sur ce sujet. Il contient la première théorie purement géométrique de ces polygones.

Partant de deux principes géométriques très simples, l'auteur établit les conditions d'existence et les propriétés de ces polygones. La méthode est tout aussi simple que celle qui résulte de l'emploi des paramètres elliptiques. La dernière méthode offre peut-être seulement l'avantage de distinguer les éléments réels des éléments imaginaires et de caractériser d'une façon plus précise les C_3 à une ou à deux branches.

Voss (*A.*). — Multiplication des séries absolument convergentes. (42-47).

A la suite du travail de Pringsheim (*Math. Ann.*, t. XXI), l'auteur établit les conditions nécessaires et suffisantes pour l'application de la règle de Cauchy

(1) Voir *Bulletin*, X_2, p. 106.

relative à la mutiplication des séries absolument convergentes

$$A = \sum_0^\infty a_i, \qquad B = \sum_0^\infty b_i,$$

dans le cas où la série A, mise sous la forme

$$(a_0 + a_1) + (a_2 + a_3) + \ldots$$

est absolument convergente.

Voss (*A.*). — Sur les systèmes orthogonaux parallèles. (48-54).

Démonstration de la possibilité de faire correspondre deux espaces à n dimensions, en sorte qu'à un système de courbes orthogonales du premier espace (en chaque point il y a n directions) corresponde dans l'autre espace un système orthogonal parallèle. L'auteur examine d'une façon spéciale le cas de deux plans.

Rohn (*K.*). — Sur les surfaces du quatrième ordre à point triple. (54-151).

L'auteur dit dans son Introduction :

« Les surfaces du troisième ordre peuvent être traitées de bien des façons et ont été examinées à différents points de vue. On peut partir du mode de génération géométrique, on peut prendre comme point initial leur équation sous forme normale, une somme de cinq cubes égalée à zéro; on peut aussi étudier les particularités auxquelles peut se soumettre l'équation générale de ces surfaces. Dans ce sens, le premier travail complet à citer est celui publié par Schläfli dans les *Philosophical Transactions* en 1863. Schläfli détermine toutes les singularités qui peuvent se présenter sur une surface du troisième ordre et énumère les différentes surfaces qui les offrent. En ce qui concerne les surfaces du quatrième ordre, on peut dans le même ordre d'idées citer quelques recherches; mais ces recherches ne concernent que les surfaces à courbe double et les surfaces ayant un nombre de points doubles égal ou supérieur à dix; même dans ce cas, les recherches sont encore incomplètes, on ne connaît pas les équations des surfaces qui ont treize, douze, onze et dix points doubles ordinaires.

» On ne connaît les équations et les propriétés des surfaces du quatrième ordre que dans le cas où le nombre des points doubles ordinaires est égal à seize, quinze ou quatorze. Les recherches dont il s'agit ont été faites par Kummer (*Beil. Abhandl.*, 1866, Berlin; *Monatsber.*, 1872); par Cayley (*Proc. of the London Math. Soc.*, III) et, en ce qui concerne les surfaces à seize points doubles, par moi (*Math. Ann.*, XVIII).

Dans ce Mémoire, je me propose d'arriver pour les surfaces du quatrième ordre à point triple au résultat obtenu par Schläfli pour les surfaces du troisième ordre. Il s'agit donc, d'une part, de déterminer les particularités du point triple; d'autre part, de voir quelles singularités peuvent aussi alors se présenter. En même temps, il y a lieu d'examiner les différentes formes possibles de la surface; il sera tenu compte d'une façon spéciale de la projection des points singuliers et de leurs contours, faite d'un point quelconque de l'espace. En outre,

j'examine quelques surfaces qui se présentent naturellement, par exemple des cas particuliers de la *symétroïde*. On peut à ce sujet faire remarquer qu'une partie des considérations ultérieures s'applique directement aux surfaces du $n^{\text{ième}}$ ordre à point $(n-1)^{\text{uple}}$. En particulier, on peut établir très simplement tous les résultats que Schläfli a donnés pour les surfaces spéciales du troisième ordre (surfaces qui offrent des singularités quelconques) et cela par la méthode ici employée et appliquée au cas où la surface ne présente qu'un point double.

» Le Mémoire commence par quelques considérations générales sur les surfaces. Puis on s'occupe des singularités de la surface qui peuvent se présenter en supposant que le point triple conserve toute sa généralité. A cet examen se rapporte la mise en lumière de la réalité et des conditions topologiques de la surface. Il est question ensuite du cas où le point triple est particularisé et il y a alors à traiter des surfaces où le point triple se trouve sur une droite *singulière* et enfin des surfaces qui possèdent une droite triple. En tout cas, l'auteur examine les différentes formes que peut avoir la surface. Dans le dernier Chapitre il est question des conditions de réalité et des cas particuliers offerts par la surface de Steiner. »

Segre (*C.*). — Sur les invariants simultanés de deux formes quadratiques. (152-156).

Lettre adressée à M. Rosanes sur l'invariant harmonique de deux formes quadratiques à $n+1$ variables.

Stolz (*C.*). — Sur les séries doubles infinies. (157-171).

Markoff (*A.*). — Démonstration de certaines inégalités de M. Tchebychef. (172-180).

Théorème. — « Soit $f(z)$ une fonction quelconque de z et $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ une des fractions convergentes (réduites) de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(z)}{x-z}\,dz,$$

la fonction $f(z)$ conservant constamment le signe $+$ entre les limites de l'intégrale, c'est-à-dire de $z=a$ à $z=b$. Soit encore

$$\psi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)\ldots(x-x_n),$$

à condition que

$$a<x_1<x_2<\ldots<x_k<\ldots<x_n.$$

Cela posé, on obtiendra l'inégalité

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{l-1}} f(z)\,dz > \frac{\varphi(x_k)}{\psi'(x_k)}+\frac{\varphi(x_{k+1})}{\psi'(x_{k+1})}+\ldots+\frac{\varphi(x_l)}{\psi'(x_l)} > \int_{x_k}^{x_l} f(z)\,dz$$

(*Journal de Liouville*, 1874). »

Hölder (*O.*). — Sur la théorie des séries trigonométriques. (181-216).

L'objet principal du présent travail est la démonstration du théorème suivant :

« Toute série trigonométrique qui définit une fonction intégrable dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$ est une série de Fourier, c'est-à-dire que ses coefficients sont exprimés par les intégrales données par Fourier. »

Comme il est déjà prouvé dans la démonstration antérieure de Dubois-Reymond, la question dépend du théorème suivant :

« Si $F(x)$ est une fonction continue donnée de a jusqu'à b pour laquelle

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{F(x+\varepsilon) - 2F(x) + F(x+\varepsilon)}{\varepsilon^2} = f(x),$$

est une fonction intégrable, alors

$$F(x) - \int_c^x d\alpha \int_c^\alpha d\beta\, f(\beta)$$

est une fonction linéaire dans tout l'intervalle compris entre a et b. »

Ce théorème est ici établi sous la condition que $f(x)$ demeure compris entre des limites finies et la démonstration repose sur ce théorème :

« Le second quotient différentiel moyen d'une fonction continue $F(x)$

$$\frac{F(b) - 2F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F(a)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}$$

est compris dans l'intervalle des valeurs que prend entre a et b l'expression

$$f(x) = \lim_{\varepsilon=0} \frac{F(x+\varepsilon) - 2F(x) + F(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2}. \text{ »}$$

L'auteur étend alors le théorème primitif au cas où la fonction $f(x)$ devient infinie, tout en restant intégrable. Le théorème subsiste encore même lorsque les positions, dans le voisinage desquelles la série trigonométrique devient infinie, sont en nombre infini, si l'on suppose que ce nombre est un *infini nombrable*. Cet infini est alors toujours *réductible*.

Dans les deux derniers paragraphes, l'auteur expose une condition qui doit toujours être remplie par une fonction définie par une série trigonométrique et intégrable dans un intervalle déterminé.

Enfin, il étudie la relation qui existe entre la série de Fourier et l'intégrale de Poisson.

Harnack (*Ax.*). — Théorèmes généraux sur la relation qui existe entre les fonctions d'une variable réelle et leurs dérivées. Seconde Partie. (217-252).

Dans ce Mémoire, l'auteur étend les théorèmes auxquels il était arrivé dans le Volume précédent des *Math. Ann.*; il examine particulièrement les théorèmes fondamentaux du Calcul intégral. Il y a lieu tout d'abord d'étendre la définition

donnée par Riemann pour les intégrales définies aux fonctions qui deviennent infinies dans les limites de l'intégration.

Lorsque les points où la fonction devient infinie sont en nombre fini ou constituent simplement une infinité *nombrable*, les propositions ordinaires du Calcul intégral conservent leur valeur. On a toujours en particulier ce théorème :

« Si une fonction continue $F(x)$ admet la dérivée intégrable $F'(x)$, on a

$$\int_a^x F'(x)\,dx = F(x) + c. »$$

Ce théorème n'est plus vrai sans restriction pour les fonctions continues dont la dérivée devient infinie en un nombre infini de points, lorsque ces points constituent un infini de puissance supérieure à la première. Comme exemple, l'auteur prend une fonction continue, non constante, dont la dérivée est nulle en général et est infinie en des positions telles que la somme des intervalles est nulle, mais que l'on n'ait plus un nombre infini de première puissance. Au point de vue géométrique, une telle fonction est figurée par un escalier sans changement subit des marches. On trouve là en même temps des courbes pour lesquelles la longueur de l'arc ne peut se trouver au moyen des règles ordinaires du Calcul intégral.

Ensuite, on établit les conditions sous lesquelles l'intégrale du premier quotient différentiel est égale à une constante près, à la fonction primitive ; la même question est résolue pour le second et plus généralement pour le $n^{\text{ième}}$ quotient différentiel. En même temps se trouve établie une base de démonstration du théorème, que « toute série trigonométrique qui définit une fonction intégrable est une série de Fourier ». Le théorème est démontré dans le cas où la fonction intégrable est partout finie, ou bien si ses positions d'infini constituent une masse finie ou d'infinité nombrable.

Simony (*O.*). — Sur une série de faits nouveaux du domaine de la Topologie (avec deux planches lithographiques). (253-280).

II. Examen des phénomènes présentés par un anneau non tordu et flexible, à section circulaire lorsque l'on coupe l'anneau par une section allant jusqu'à son milieu et revenant enfin au point de départ.

III. Examen des phénomènes présentés par l'anneau lorsque l'on fait une section le traversant de part en part et revenant enfin au point de départ.

Staude (*O.*). — Représentation au moyen de paramètres des relations des fonctions thêta à deux variables. (281-312).

L'auteur se propose dans ce travail de développer la théorie de l'inversion des intégrales hyperelliptiques du premier ordre sous une forme plus convenable pour certaines applications géométriques que les représentations employées jusqu'ici. Pour y arriver, on introduit tout d'abord une détermination uniforme pour les six points de ramification de la surface de Riemann à deux feuillets de genre deux, en sorte qu'aucun d'eux ne se trouve particularisé.

Puis l'auteur s'occupe du groupement caractéristique des seize fonctions thêta relativement aux six points de ramification. Ce groupement consiste en ce que,

des seize fonctions, il y en a six qui répondent aux six points de ramification pris séparément, tandis que les dix autres correspondent aux dix combinaisons de ces points distribués en deux groupes de trois. Ce mode de groupement donne naissance à une représentation par indices des fonctions thêta. Un dernier fait, essentiel pour le développement, consiste dans la substitution aux seize fonctions thêta de seize autres fonctions qui n'en diffèrent que par un facteur constant; ces dernières correspondent aux fonctions sigma introduites par Weierstrass.

L'auteur formule le problème de l'inversion à l'exemple de Rosenhain de la façon suivante : « Représenter les relations des seize fonctions thêta des deux variables v_1, v_2, et des trois paramètres a_{11}, a_{12}, a_{22} comme fonctions algébriques des deux fonctions variables indépendantes z_1, s_1 et z_2, s_2 d'un domaine algébrique de la forme

$$s^2 = (a_0 - z)(a_1 - z)(a_2 - z)(a_3 - z)(a_4 - z)(a_5 - z);$$

les relations ayant été obtenues sous forme implicite, il faut en outre les résoudre d'une part relativement à v_1, v_2, d'autre part, relativement à z_1, s_1 et z_2, s_2. De plus, on a à exprimer les zéros des dix fonctions thêta paires et les zéros des dérivées partielles des six fonctions impaires, et aussi les trois paramètres a_{11}, a_{12}, a_{22} au moyen des six points de ramification a_0, a_1, ..., a_5 du domaine hyperelliptique. Pour terminer, l'auteur montre que ce domaine constitue bien le domaine hyperelliptique général du premier ordre.

Segre (*C.*). — Étude des différentes surfaces du quatrième ordre à conique double ou cuspidale (générale ou décomposée) considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions. (315-444).

L'auteur donne d'abord, dans une Introduction, un exposé des différents travaux qui ont été faits sur les surfaces du quatrième ordre à conique double. Puis il donne une méthode qui repose sur le théorème suivant :

« Chaque surface du quatrième ordre à conique double (ou cuspidale) générale ou décomposée en deux droites peut être considérée comme une projection centrale de l'intersection de deux variétés quadratiques à trois dimensions de l'espace à quatre dimensions. »

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème donné par Klein dans les *Göttinger Nachrichten*, 20 mars 1872.

Dans un espace linéaire à quatre dimensions R_4, on prend deux espaces quadratiques à trois dimensions; ils déterminent un faisceau d'espaces quadratiques F_3^2 qui se coupent suivant une même surface du quatrième ordre T. En général, il y a parmi les espaces quadratiques cinq espaces coniques de première espèce, c'est-à-dire formés de ∞^2 droites qui passent par un point appelé *sommet*. Dans des cas particuliers, deux ou plusieurs espaces coniques de première espèce peuvent coïncider, ou bien encore le faisceau contient un ou deux espaces coniques de seconde espèce (faisceaux de plans); un dernier cas est celui où tous les espaces quadratiques du faisceau sont des espaces coniques. Si l'on projette maintenant d'un point quelconque P de R_4 la surface T sur un espace R_3 contenu dans R_4, on obtient une surface du quatrième ordre s à co-

nique double γ^2. Parmi les espaces quadratiques qui passent par T, il y en a un, φ, qui contient le point P; l'espace tangent en P à φ détache sur φ un cône ordinaire sur lequel se trouve une courbe du quatrième ordre et de première espèce qui est l'intersection avec T.

Toute génératrice du cône projette deux points de T en un seul et même point de S : de là résulte la conique double γ^2 située sur S. Sur cette conique il y a quatre points-pince correspondant aux quatre arêtes qui sont tangentes à la courbe du quatrième ordre et de première espèce. La méthode de projection fournit aussi les autres propriétés des points-pince. La propriété de T, de se trouver sur cinq espaces coniques qui possèdent chacun deux faisceaux de plans générateurs, donne pour la surface S le théorème suivant : « Sur toute surface du quatrième ordre à conique double, il y a cinq cônes appelés *cônes de Kummer,* tels que leurs plans tangents coupent la surface suivant des couples de coniques. » L'auteur examine alors d'autres propriétés de la surface T dans R_4 et les transporte sur la surface s dans R_3. C'est ainsi que les droites de T fournissent les seize droites de la surface du quatrième ordre à conique double et leur situation relative. La section de T par un R_3 quelconque fournit sur S une courbe du quatrième ordre placée sur une surface du second degré qui contient la conique double. Il y a un nombre doublement infini de surfaces du second degré qui, outre la conique double, coupent la surface S suivant deux autres coniques. De plus, l'auteur arrive aux surfaces du second degré qui touchent S le long d'une courbe du quatrième ordre, et aux inversions fondamentales qui répondent aux cinq cônes de Kummer. Il s'occupe ensuite de la représentation de la surface S sur le plan et termine la première Partie par l'examen des cyclides et de leurs propriétés, déjà étudiées à fond par MM. Darboux et Casey.

La seconde Partie du Mémoire traite de la classification des surfaces du quatrième ordre à conique double. On arrive aux différentes classes de surfaces d'une part en spécialisant le faisceau d'espaces quadratiques qui contiennent T : il suffit de faire coïncider plusieurs des cinq espaces coniques, etc., d'autre part, en donnant au centre de projection des positions particulières. Tous les cas possibles qui peuvent se présenter sont énumérés et l'auteur discute les surfaces correspondantes, donne leur classe et termine son Mémoire par un Tableau de toutes les surfaces.

Pour avoir une idée de cette partie du travail, il faut donner rapidement ici quelques-uns des cas. Lorsque les cinq espaces coniques de première espèce qui passent par T sont tous différents, on obtient la surface générale du quatrième ordre à conique double, en prenant le centre de projection P quelconque. Si le point P se trouve sur un espace conique, la conique double se décompose en un couple de droites.

Si deux espaces coniques coïncident, on a trois cas à distinguer. Si P est quelconque, la surface S présente, outre la conique double, un point conique. Si P est sur l'un des trois espaces coniques simples, la conique double se décompose en un couple de droites et le point conique subsiste. Si enfin le point P est sur l'espace conique double, il y a sur la surface S deux droites doubles qui se coupent en un point triple; le point conique est venu en ce dernier point.

Lorsque trois espaces coniques coïncident, il y a de nouveau trois cas à distinguer : on obtient, ou bien une surface S à conique double et à point double biplanaire de première espèce, ou bien une surface ayant un couple de droites doubles et un point biplanaire, ou bien enfin une surface à couple de droites doubles, ces droites se coupant en un point triplanaire de la surface.

Si le faisceau des espaces quadratiques contient trois espaces coniques de première espèce et un espace conique de seconde espèce, la surface du quatrième ordre correspondante possède en général une conique double et deux points doubles; la ligne qui les joint n'appartient pas à la surface. Lorsque l'on prend le centre de projection sur un espace conique de première espèce, la conique double se décompose en deux droites doubles; lorsqu'on le prend sur l'espace conique de seconde espèce, on obtient à la place de la conique double une droite de contact.

L'espace conique de seconde espèce est formé, comme on l'a déjà dit, par un faisceau de plans; l'axe du faisceau possède relativement à tous les espaces quadratiques qui passent par T le même plan polaire. Si le centre de projection vient dans ce plan polaire, les deux points doubles dont il a été question viennent sur la conique double qui contient alors deux points à contact propre. Lorsque le centre de projection P occupe dans ce plan polaire la position spéciale pour laquelle la conique polaire, qui correspond à l'espace conique de seconde espèce relativement à l'espace quadratique passant par P, passe par lui, la surface du quatrième ordre obtenue alors a une conique de rebroussement.

Les exemples qui viennent d'être donnés peuvent suffire pour se faire une idée de nombreuses surfaces que l'auteur rencontre dans son Mémoire et dont il étudie les propriétés principales, tout particulièrement les inversions fondamentales qui transforment la surface en elle-même.

Goursat (*G.*). — Sur les intégrales rationnelles de l'équation de Kummer. (445-460).

Dans deux Notes insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (18 février et 10 mars 1884), l'auteur a indiqué une méthode générale pour étudier les intégrales de l'équation du troisième ordre, due à Kummer, qui sont des fonctions rationnelles de la variable.

Dans ce travail, il donne une démonstration simple de ces résultats.

Halphen. — Sur une équation différentielle linéaire du troisième ordre. (461-464).

L'équation du 168e degré, qu'il est essentiel de considérer dans la transformation du seizième ordre des fonctions elliptiques, doit pouvoir être résolue, comme l'a remarqué Klein, par une équation différentielle du troisième ordre. L'auteur montre que cette équation différentielle du troisième ordre appartient à l'un des types qu'il a examinés dans son Mémoire *Sur la réduction des équations linéaires aux formes intégrables*.

König (*J.*). — Théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. (465-536).

Ce Mémoire contient de nouvelles méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. Dans la méthode de Monge et d'Ampère, l'intégration est ramenée à celle d'un système d'équations aux dérivées totales pour certaines classes d'équations : le principe est ici de réduire la détermination d'une solution complète de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

à la détermination d'une solution particulière d'une équation différentielle linéaire du second ordre à plusieurs variables.

« Cette détermination s'obtient en égalant à une constante cette solution particulière. On trouve par variation une seconde équation aux dérivées partielles du second ordre dont la solution générale, commune avec l'équation proposée, contient encore quatre constantes arbitraires et possède alors le caractère d'une solution complète. La détermination de cette solution commune se trouve par l'intégration d'un système d'équations aux différentielles totales.

» En général, une équation différentielle qui contient une constante arbitraire ne possède aucune solution plus générale en commun avec l'équation proposée. On doit cependant excepter une classe déterminée d'équations différentielles relativement auxquelles des équations de la forme donnée existent qui possèdent un nombre infini de solutions communes avec l'équation proposée, sans pourtant que ce soit le cas pour toutes les solutions complètes. On peut reconnaître si une équation rentre dans cette classe au moyen d'un système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre. Si ce système admet une solution en général, toute solution particulière égalée à une constante arbitraire fournira par la méthode de variation une équation différentielle qui jouit de la propriété acquise. Même on obtient ainsi une solution quelconque, par suite la solution générale, dans le cas où ce système admet deux solutions. Si le système ne donne qu'une solution, on obtient bien encore une infinité de solutions complètes, mais non pas toutes les solutions. L'ensemble de ces solutions constitue une première intégrale dans le sens le plus général du mot; en effet, la multiplicité ainsi déterminée coïncide avec le système déduit d'une première intégrale dans le sens ordinaire du mot.

» L'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre peut être considérée comme complète après la détermination des solutions complètes; cette détermination n'est qu'un premier pas lorsqu'il s'agit des équations du second ordre. La théorie générale repose sur l'extension de la notion de solution complète.

» On dit qu'une solution est complète lorsqu'elle contient cinq constantes arbitraires et qu'elle ne satisfait à aucune autre équation aux dérivées partielles du second ordre. Nous introduisons aussi des solutions à $5+r$ constantes arbitraires et nous les appelons solutions complètes de $r^{\text{ième}}$ rang.

» La détermination d'une solution complète de rang $2(k-2)$ s'obtient de nouveau à l'aide d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre ayant un plus grand nombre de variables indépendantes; en général, toute solution particulière de la dernière, égalée à une constante arbitraire, fournit, par la méthode de variation, une équation différentielle du $k^{\text{ième}}$ ordre; sa solution la plus générale, commune avec la proposée, contient $2k$ autres constantes arbitraires et est, relativement à celle-ci, une solution complète de rang $2(k-2)$. Cette solution complète s'obtient par l'intégration d'un système aux dérivées totales.

» En général, on obtient encore ainsi la solution commune la plus générale des deux équations différentielles. Il y a cependant pour toute valeur de $k \geqq 2$ une classe déterminée d'équations différentielles pour lesquelles on peut établir des équations différentielles de $k^{\text{ième}}$ ordre qui possèdent, en commun avec l'équation proposée, un nombre infini de solutions communes. Nous obtenons encore un critérium pour reconnaître si une équation différentielle donnée ap-

partient à cette classe ou non, et la théorie peut être complètement développée par analogie parfaite avec le cas le plus simple où $k = 2$.

» Nous obtenons ainsi un nombre infini de classes d'équations différentielles du second ordre, dont les intégrales peuvent se ramener à celles de systèmes d'équations aux dérivées totales. Nous possédons des critériums certains pour reconnaître si une équation donnée appartient à l'une de ces classes et nous donnons dans ce cas des méthodes complètes d'intégration.

» En supposant certains théorèmes donnés sans démonstration par M. Lévy (*Comptes rendus*, novembre 1872), on reconnaît que ces classes comprennent toutes les équations différentielles du second ordre dont l'intégration peut être ramenée à celui de systèmes d'équations aux dérivées totales.

» Les équations différentielles dont M. Darboux a indiqué l'intégration sans appuyer sur la méthode (*Annales de l'École Normale*, t. VII; p. 163-173) sont contenues comme cas particuliers dans les classes caractérisées ici; de plus, c'est le plus simple des cas qui se présentent chez M. Darboux que Hamburger a traité complètement (*Journal für Mathematik*, t. XCIII). »

Lie (*S.*). — Sur les invariants différentiels. (537-578).

Dans l'Introduction, l'auteur donne un résumé de l'ensemble des recherches qu'il a faites jusqu'ici dans le but de former une théorie générale de la transformation et d'appliquer cette théorie aux équations différentielles; il examine en particulier les travaux qui se rapportent aux fonctions admettant un groupe fini continu et aux invariants différentiels de ces groupes. Il montre la relation avec les travaux de Klein, Poincaré, Halphen et avec la théorie algébrique des invariants.

Ensuite l'auteur donne les principes d'une théorie générale des groupes discontinus d'un nombre infini de paramètres et démontre le théorème suivant :

« Tout groupe infini détermine une série infinie d'invariants différentiels qui peuvent être définis comme solutions de systèmes complets. »

La théorie est appliquée à une quantité d'exemples, parmi lesquels on doit citer les recherches de Halphen sur les opérations linéaires et toute la série de travaux sur la mesure de la courbure de Gauss.

Netto (*E.*). — Sur la décomposition en facteurs des discriminants des équations algébriques. (579-587).

Pick (*G.*). — Notice sur les substitutions linéaires entières. (588-589).

Pick (*G.*). — Sur certaines fonctions définies par des équations fonctionnelles. (590-592). Ax. H.

JOURNAL DES ACTUAIRES FRANÇAIS [1].

Tome VI; 1877.

Maas (*E.*). — A propos d'une Communication faite à l'Institut des actuaires anglais sur la manière d'opérer des Compagnies françaises. (5-30).

Dormoy (*E.*). — Théorie mathématique des assurances sur la vie. (31-79; 231-303; 317-392).

Suite d'un important Mémoire qui comprend, dans ce Volume, dix-neuf Tables numériques donnant les facilités nécessaires pour déterminer les annuités, les assurances et les rentes viagères.

Charlon (*H.*). — Des emprunts publics. (87-163).

Suite et fin. Tables numériques diverses.

Achard (*M.-A.*). — Note sur l'évaluation approchée des annuités viagères temporaires. (227-230).

Charlon (*H.*). — Théorie mathématique des opérations financières. (305-316).

Annonces, Préface et Table des matières de l'Ouvrage publié sous ce titre. On en pourra trouver le compte rendu dans les *Nouvelles Annales*, 2e série, t. VIII, 1869, p. 331-334.

Tome VII; 1878.

Charlon (*H.*). — Théorie élémentaire des opérations financières et viagères. (31-180).

L'auteur s'est proposé de mettre la théorie mathématique des opérations financières, ainsi que celle des opérations viagères, à la portée des personnes qui possèdent seulement la pratique des opérations les plus élémentaires de l'Arithmétique. La première Partie de ce résumé est divisée en cinq Chapitres, ayant respectivement pour objet l'étude des points suivants :

1° Intérêt simple et composé, escompte. 2° Rentes. Accumulation à intérêt composé des arrérages d'une rente. Placements égaux faits à des époques équidistantes. 3° Emprunts remboursables par des rentes. Évaluation, d'après un taux quelconque d'intérêt, de la nue propriété des titres d'un emprunt, de leur jouis-

---

[1] Voir *Bulletin*, t. III, p. 169, et t. I$_2$, p. 309-316.

sance et de ces titres eux-mêmes. 4° Emprunts par obligations. Construction des tableaux d'amortissement pour les emprunts par obligations. Évaluation de la nue propriété des obligations d'un emprunt, de leur jouissance et de ces obligations elles-mêmes, d'après un taux d'intérêt quelconque et sans tenir compte des taxes qui les frappent. Procédés de calculs relatifs aux obligations frappées de taxes par la loi française. 5° Fonds publics français. Emprunts de la Ville de Paris. Parités.

Dormoy (*E.*). — Suite des Tables de la théorie mathématique des assurances sur la vie. (181-236).

Tables XX à XXVIII.

Charlon (*H.*). — Théorie élémentaire des opérations financières et viagères. (273-319; 347-363).

Cette deuxième Partie de l'intéressant Mémoire de M. Charlon renferme les Chapitres suivants :

1° Opérations viagères. Tables de mortalité; 2° Détermination des primes pures des opérations viagères.

Fouret (*G.*). — Sur la détermination de la durée d'une assurance mixte souscrite à un âge donné, moyennant une prime unique et une prime annuelle également données. (321-326).

Dormoy (*E.*). — Loterie nationale de l'Exposition. Mode de tirage au sort. (327-330).

Achard (*A.*). — Note sur l'emprunt 3 pour 100 amortissable. (331-345).

Tome VIII, 1879.

Massé (*L.*). — Du chargement des primes d'assurances. (5-14, 2 figures).

Dormoy (*E.*). — Tirage de la loterie nationale. Étude pratique des lois du hasard. (15-38, 3 figures).

La loterie nationale a offert une occasion qui se rencontre très rarement dans la pratique, c'est celle du tirage au sort, au moyen d'appareils mécaniques, d'une très grande quantité de nombres et de chiffres. En effet, il a été tiré au sort, en quelques jours, 1277 nombres de 7 chiffres et 6920 nombres de 6 chiffres, en tout plus de 50000 chiffres, qui ont dû venir se grouper suivant certaines lois. L'auteur a cherché à étudier ce groupement et à en profiter pour ajouter une page à l'étude des lois du hasard.

Ce travail est fait d'après la théorie exposée par l'auteur dans le t. III, 1874, p. 432 et suivantes.

Ces conclusions tendent à prouver l'irrégularité de construction des roues dont on s'est servi dans le tirage de la loterie. Dès lors on ne peut plus songer à se servir des résultats de ce tirage pour contrôler l'exactitude de la formule relative à l'écart moyen. Au contraire, c'est la formule qui permet de contrôler la construction des roues; elle permettra de même, dans tout tirage au sort exécuté par un moyen mécanique, de contrôler l'exactitude des appareils employés.

Lefèvre (*H.*). — Théorie générale des monnaies et des changes du commerce et de la banque. (39-61; 88-125; 188-229).

Fontaneau (*E.*). — Chrématistique. (230-287).

Développements et applications.

Anonyme. — Théorie mathématique du jeu de la bouillotte. (289-312).

Fouret (*G.*). — Sur l'amortissement des primes d'assurances sur la vie. Application à cet amortissement de la participation aux bénéfices. (313-328).

Dehais (*E.*). — De l'emploi avantageux des Tables de Violeine pour le plus grand nombre des opérations d'assurances et d'annuités viagères sur une seule tête. (329-363, 4 figures).

H. B.

ANNALES DES PONTS ET CHAUSSÉES [1].

6e série, tome IV; 2e semestre 1882.

Flamant. — Compte rendu des expériences hydrauliques faites à Roorkee. (43-96, 3 fig.).

Des expériences extrêmement importantes ont été faites de 1874 à 1879, sur les conditions de l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts, par le capitaine Allan Cunningham, ingénieur anglais dans l'Inde, qui en a rendu compte dans un Ouvrage publié en 1881 à Roorkee, et composé d'un Volume de texte (400 pages), d'un Volume de Tableaux numériques donnant les résultats des expériences (86 Tableaux) et leur résumé (34 Tableaux), et d'un Volume de Planches (52 Planches).

---

(1) Voir *Bulletin*, XI, 259; II_2, 106; IV_2, 211 et VIII_2, 71.

Les principales mesures ont été prises à Roorkee, sur le canal du Gange. La vitesse a été observée au moyen du double flotteur. La première idée de cet instrument remonte à Léonard de Vinci (1643); mais c'est Mariotte (1684) qui, le premier, en a fait usage sous sa forme actuelle. L'auteur a donné, avec raison, la préférence au modèle d'instrument dans lequel le flotteur de surface est assez petit pour que l'action du courant sur lui soit négligeable par rapport à celle que reçoit le flotteur inférieur. Il a admis aussi la forme parabolique pour la courbe verticale des vitesses.

L'usage des tiges lestées pour mesurer la vitesse moyenne sur une verticale a été introduit en 1812 par Kragenhoff. L'auteur s'en est servi avec avantage.

Les superficies des sections transversales et les débits, tant superficiels, sur des lignes verticales ou transversales, que cubiques pour toute la section, ont été calculés par les formules de sommation de Simson et de Weddle, etc.

Un Rapport sur la Physique et l'Hydraulique du Mississipi, de MM. Humphreys et Abbot, publié à Philadelphie en 1861 et souvent cité par l'auteur, a discuté les formules anciennes de Dubuat (1786), Girard (1803), de Prony (1804), Young (1808), Dupuit (1848), Saint-Venant (1851), Ellet (1851), et il les a toutes rejetées comme n'étant pas d'une application générale. D'autres formules, dues à Bornemann, Hagen et Gauckler, ont été discutées dans un Ouvrage de Kutter intitulé : *Nouvelle formule de la vitesse moyenne,* dont une traduction a été publiée à Londres en 1876 par Jackson. Ces formules sont aussi rejetées par Kutter comme n'étant pas *généralement* applicables.

L'auteur discute seulement deux formules, celle de Bazin et celle de Kutter.

Perrodil (*de*). — Arc d'expérience en maçonnerie de brique et ciment de Portland. (111-139, 1 pl.).

Cet arc d'expérience, construit à Vaugirard, présentait des proportions inusitées, une portée de 20^m et l'épaisseur extrêmement faible de $0^m,105$. Ces dimensions avaient été adoptées afin de rendre les déformations considérables et faciles à observer.

Il n'est pas inutile de faire remarquer que les déformations élastiques constatées sur cet arc d'expérience dépassent de beaucoup toutes celles qui se produisent dans les arcs établis suivant les données ordinaires de la pratique des constructions.

L'auteur s'était proposé de vérifier les conclusions de sa théorie présentée dans le t. XIX des *Annales*. (Voir *Bulletin*, IV, p. 213.)

Resal (*J.*). — Étude sur la stabilité des ponts métalliques en arc. (329-368, 2 pl.).

Cette étude a été dirigée vers les trois points suivants :

1° Détermination, dans chaque section d'un arc métallique articulé aux naissances, du maximum absolu du travail du fer à la compression ainsi qu'à l'extension, sous l'action simultanée de la charge permanente, des variations de la température, et d'une surcharge d'épreuve immobile répartie de la manière la plus favorable;

2° Détermination de la flèche ou de l'abaissement à la clef, ainsi que du travail maximum du métal, dus à l'effet d'une charge roulante, pour un pont

métallique en arc ou en poutre droite. Influence de la vitesse du convoi et de la charge permanente de l'ouvrage;

3° Détermination des efforts subis par les tympans rigides d'un pont en arc, par suite des déformations éprouvées par les arcs sous l'influence des variations de la température et de la surcharge.

Sampité. — Appareil orthogonal dans les voûtes biaises dont la section droite est une ellipse surbaissée. (578-599, 2 fig., 1 pl.).

Les questions concernant les appareils biais ont été résolues d'une façon complète au point de vue pratique aussi bien qu'au point de vue théorique, pour les arches où le cercle est la courbe de section droite comme pour celles où il est la courbe de tête.

Dans son remarquable Ouvrage : *De l'appareil et de la construction des ponts biais,* M. Graeff a plus généralisé le problème, mais sa solution n'est applicable qu'à une voûte dont la section droite est surhaussée, et elle laisse de côté le cas, beaucoup plus fréquent dans la pratique, où la section droite est une ellipse surbaissée.

M. Collignon, dans son *Cours de Mécanique appliquée,* donne un mode de construction de la trajectoire orthogonale parallèle sur le développement. Cette construction, une des plus employées, ne préjuge rien sur la section droite de la voûte; mais, dans ce système, la trajectoire s'obtient, en développement, par des projections successives qui peuvent être admissibles lorsque la voûte à construire est de faible ouverture et que, par suite, les épures peuvent être faites sur le papier à une échelle proportionnellement très approchée; on peut même les tracer en vraie grandeur sur une aire.

Il n'en est plus de même si la voûte est de grande ouverture. Dans ce cas, la construction graphique de la trajectoire, en développement, ne peut être faite sur le papier qu'à une échelle réduite; elle donne, dès lors, lieu à trop de causes d'erreur pour pouvoir être admise.

A l'occasion de l'étude et de la construction d'un appareil orthogonal parallèle pour un pont de 30^{m} d'ouverture, l'auteur a été amené à rechercher l'équation de la trajectoire orthogonale parallèle dans le cas de la section droite surbaissée, et il a pensé que sa méthode pourrait présenter quelque intérêt dans des cas analogues.

Tome V, 1er semestre 1883.

Fortet (D.). — Calcul et tracé des panneaux des voûtes biaises. (26-33, 1 pl.).

Description d'une méthode permettant d'obtenir facilement les panneaux des voussoirs d'une voûte biaise dont les principaux éléments ont été arrêtés dans un projet. On ne s'occupe que des appareils ayant leurs lits engendrés par des droites parallèles aux têtes.

Bazaine. — Étude sur l'influence des irrigations sur l'altitude d'une nappe souterraine. (34-60, 3 fig., 1 pl.).

La ville de Paris s'est trouvée engagée pendant plusieurs années dans une série de procès pour dommages de diverses natures attribués aux irrigations de la plaine de Gennevilliers, procès dans lesquels certains réclamants ont demandé des indemnités considérables. D'autre part, de nombreux et importants projets d'irrigations sont aujourd'hui à l'étude, et les circonstances qui se sont produites à Gennevilliers se présenteront très probablement dans plusieurs localités placées dans des conditions analogues. Bien qu'il soit fort difficile de déterminer d'une manière exacte la part incombant aux irrigations dans la surélévation d'une nappe souterraine, il peut néanmoins être utile d'établir certaines bases bien précises, susceptibles d'éclairer la pratique ou la réglementation des arrosages, et de guider, en cas de procès, les experts chargés d'apprécier les réclamations produites.

Ces considérations ont amené l'auteur à étudier la question avec les ressources de l'analyse, et à diviser ce travail en trois Parties :

1° Théorie mathématique de quelques cas particuliers du mouvement vertical ou parabolique des eaux à travers un sol perméable;

2° Application de cette théorie à quelques exemples tirés de la pratique des irrigations à Gennevilliers;

3° Comparaison des conséquences de cette application avec les faits observés dans la même région.

Séjourné. — Fondations à l'air comprimé d'un pont sur la Garonne, à Marmande. (92-198, 6 fig., 5 pl., 10 tableaux).

Étude théorique et pratique, suivie de renseignements statistiques sur quatre-vingt-deux ponts fondés à l'air comprimé.

Lagrené (*H. de*). — Note sur la mesure des vitesses et des débits dans un cours d'eau rapide et profond. (219-246, 12 fig. 2 pl.).

Description des procédés et appareils employés pour mesurer, au moyen du moulinet, les vitesses de l'Elbe, du Danube et d'autres cours d'eau importants de l'Autriche. Ce travail est une analyse abrégée de l'Ouvrage publié en allemand par M. Harlacher, professeur à l'École Polytechnique de Prague et chef des travaux hydrométriques de la Bohême.

Duponchel. — Notice sur un nouveau système de roue hydraulique en dessus à mouvement direct. (247-276, 2 pl.).

Ce Mémoire se divise en deux Parties distinctes, comprenant : l'une, quelques renseignements techniques sur la distribution des eaux de Cette; l'autre, certaines considérations générales sur le rendement des machines hydrauliques et des détails plus particulièrement spéciaux sur le nouveau système de roue en dessus que l'auteur a recommandé d'employer pour l'organisation de la distribution des eaux de la ville de Béziers.

Resal (*J.*). — Effets des charges roulantes sur les ponts métalliques. (277-299).

L'auteur a indiqué, dans le précédent Volume, une formule permettant de dé-

terminer, par le calcul, l'effet d'une charge roulante sur un pont métallique. L'auteur reconnaît que cette formule, qui repose sur plusieurs hypothèses plus ou moins admissibles, lui a paru, malgré l'incertitude de son point de départ, s'accorder assez bien avec divers faits d'expérience. Les conséquences qu'il en a déduites par des calculs fort simples, dans ce nouveau travail, pourront être également soumises au contrôle expérimental, afin de décider le degré de confiance qu'elles méritent.

Guibal. — Note sur la marche des bateaux à vapeur en courbe. (346-377, 1 pl.).

L'étude générale du mouvement des bateaux en courbe doit être considérée un peu différemment, suivant qu'il s'agit de barques halées dans un canal, ou de bateaux portant eux-mêmes leur moteur, tel qu'une voilure, une hélice, ou des roues à palettes agissant dans le sens de leur longueur.

Le premier cas, qui a fait l'objet d'une Note insérée récemment dans les *Annales* (1er semestre 1881; *Bulletin*, VIII_2; p. 73-74), est de beaucoup le plus complexe et ne semble pas entièrement résolu par les formules qu'elle renferme, car ces formules sont basées sur l'hypothèse, pratiquement inexacte, du parallélisme de l'effort de traction à l'axe du bateau et sur une évaluation incomplète des efforts auxquels est soumise la barque dans son mouvement (l'effort sur le gouvernail notamment et la force centrifuge ont été omis).

Le grand nombre de variables ou d'arbitraires que renferme le premier problème ne le rend pas susceptible d'une solution théorique simple. C'est plutôt une affaire de sentiment, dirigé par une connaissance approfondie des convenances ou des usages de la navigation et par l'observation des faits.

En réalité, un bateau halé pourra décrire une courbe quelconque et même simplement pivoter, sauf à établir convenablement le point d'attache et la direction de l'effort.

Il n'en est pas ainsi pour un bateau automoteur qui ne dispose, pour régler son allure (c'est du moins le cas le plus général et le seul dont on s'occupe ici) que d'un effort de traction plus ou moins considérable, dirigé suivant son axe, et de son gouvernail.

L'auteur conclut en faisant observer que ce serait, d'ailleurs, plus à l'expérience qu'à la théorie qu'il conviendrait de demander de nouveaux éclaircissements et plus de précision dans un sujet où le choix des coefficients est d'une grande importance comme résultat numérique, et pour lesquels les faits expérimentaux sont encore très peu nombreux et notablement en discordance.

Cohen. — Note sur le partage des dépens entre les propriétaires et l'administration en cas d'expropriation pour cause d'utilité publique. (398-402).

En appelant I l'indemnité fixée par le jury, O l'offre de l'administration, D la demande de la partie expropriée, F la totalité des frais ou dépens taxés par le magistrat directeur, f les frais à la charge de l'exproprié, f' les frais à la charge de l'administration, MM. Tarbé et Cotelle ont admis et proposé les formules

$$f = \frac{\text{FDO}}{\text{DO} + \text{I}^2}, \qquad f' = \frac{\text{FI}^2}{\text{DO} + \text{I}^2}.$$

M. Delalleau a donné les formules beaucoup plus simples

$$f = F\left(\frac{D - I}{D - O}\right), \qquad f' = F\left(\frac{I - O}{D - O}\right).$$

La discussion comparative de ces deux systèmes montre que les dernières formules satisfont aux trois paragraphes de l'art. 40 de la loi du 3 mai 1841, et que leur emploi exclusif doit être conseillé, dans le cas général où l'indemnité est comprise entre l'offre et la demande.

Durand-Claye (*L.*) et *d'Ocagne* (*M.*). — Note sur l'évaluation des surfaces de déblai et de remblai. (402-404, 2 fig.).

La formule de ces surfaces est

$$z + k = \frac{(y + lp)^2}{2(p \mp x)},$$

où y est la cote rouge sur l'axe, l la demi-largeur de la plate-forme, p la pente du talus, x la déclivité du terrain et k une constante. Cette formule peut s'écrire plus simplement

$$z' = \frac{y'^2}{x'}.$$

Pour la construire commodément, M. Siégler (*Annales*, 1881, *Bulletin*, VIII$_3$, p. 73) dresse une épure composée de deux axes rectangulaires OX et OY. Sur chacun d'eux il trace des divisions espacées suivant les valeurs que prennent x' et y' pour des valeurs successives de x et y inscrites à côté des traits. Prenant sur OX, OA $= a$ et sur OY, OM $= b$, et plaçant le sommet d'une équerre en M et le petit côté en MA, le second côté MB de l'angle droit va rencontrer OX′ en un point B, et l'on a

$$OB = \frac{b^2}{a}.$$

Cette méthode ne donne quelque précision que si le sommet de l'équerre est bien exactement au point voulu M. Aussi M. Siégler a-t-il imaginé à cet effet un instrument spécial.

Grâce à une modification très ingénieuse du tracé, proposée par M. d'Ocagne, on peut éviter l'emploi de cet instrument. Il suffit de prendre pour échelle des z le prolongement OY′ de OY et de reproduire l'échelle des y sur OX′. Prenant alors sur OX′ la longueur OM′ = OM $= b$, et menant M′B′ parallèle à MA, la longueur OB′ interceptée sur OY′ est l'inconnue cherchée.

Allard (*E.*). — Mémoire sur la portée des sons et sur les caractères à attribuer aux signaux sonores. (567-621, 9 fig.).

Les Américains du Nord ont sur leurs côtes, non compris les cloches, plus de soixante signaux sonores, dont près de trente trompettes. En Angleterre il y en a également un grand nombre. Nous en avons, jusqu'à présent, beaucoup moins sur le littoral de la France, et cela tient à cette circonstance avantageuse que nos côtes sont moins embrumées. Outre les cloches mues à bras d'homme, nous avons six cloches sonnées mécaniquement et cinq trompettes à vapeur. Mais la

loi du 3 avril 1882, relative à l'éclairage des côtes, a autorisé l'exécution de vingt nouvelles trompettes à vapeur qui doivent être actuellement installées.

Les expériences sur la portée des sons peuvent se classer en quatre groupes; celles de Boulogne en 1861-1862, avec des cloches sonnées mécaniquement, celles de Douvres en 1873, avec des trompettes à vapeur et d'autres instruments, celles de New-York en 1874-1875, avec des trompettes et des sifflets à vapeur, et celles de l'Elbe en 1880, avec des cornets à brouillard mus à bras d'homme.

La plupart de ces expériences ont montré que la portée du son varie à peu près comme le rayon vecteur d'une ellipse.

L'auteur établit ensuite une formule de la portée des sons et en déduit diverses conséquences. Il montre aussi l'influence de la couleur des rayons lumineux, dont la portée optique croît du violet au rouge.

Tome VI, 2e semestre 1883.

Susini (*N.*). — Note sur le raccordement parabolique. (49-53, 1 fig.).

Raccordement en arc de parabole de la forme $y = mx^3$, d'un arc de cercle et d'une voie droite, en tenant compte du dévers ou surhaussement du rail extérieur.

Lévy (*P.*). — Note sur un procédé de calcul du mouvement des terres dit *Procédé Bruckner*. (54-62, 1 pl.).

Le principe de ce procédé, encore peu connu en France, est exposé dans l'Ouvrage *la Statique graphique* de Culmann (traduite par MM. Glasser, Jacquier et Valat).

Gobin (*A.*). — Détermination précise de la stabilité des murs de soutènement et de la poussée des terres. (98-231, 72 fig.).

La théorie de la poussée des terres et de la stabilité des murs de soutènement est encore très obscure et l'abondance des systèmes proposés suffirait à montrer combien le sujet est susceptible d'interprétations diverses. Coulomb, de Prony, Français, Poncelet, Curie, et plus récemment Maurice Lévy, Considère, Rankine et Boussinesq ont successivement traité cette question, les uns en admettant que la poussée des terres est perpendiculaire à la face intérieure du mur, les autres, qu'elle est parallèle au plan du talus limitant le massif à sa partie supérieure. C'est la théorie de Coulomb, complétée par Poncelet, que Bélanger, Bresse et Collignon ont adoptée dans leurs Traités de Mécanique, tandis que la théorie de Rankine, qui se rattache par un lien étroit au principe de la moindre résistance, a ouvert la voie à une série de travaux basés sur le même principe.

Cette incertitude dans les résultats obtenus rend difficile le choix de la meilleure solution à adopter; la complication même des formules et procédés est un obstacle à leur application pratique; c'est ce qui a conduit l'auteur de ce travail à étudier cette question pour trouver une règle simple qui puisse guider l'ingénieur dans la réduction de ses projets. C'est également ce qu'a

essayé M. de Lagrené, dans un Mémoire publié en 1881 (*Bulletin,* VIII_2, p. 75-76).

Le point de départ, la base du système de M. de Lagrené, est le principe suivant qu'il emprunte à Rankine et auquel il donne la désignation de Théorème n° 1 :

« Dans un massif de terre indéfini, limité à la partie supérieure par un plan unique faisant un angle θ avec l'horizon, la pression totale sur un plan vertical quelconque OA normal à la ligne de plus grande pente du plan supérieur est parallèle à ce dernier, et fait par conséquent un angle θ avec l'horizon. »

Ce théorème est presque évident ; il se déduit d'ailleurs d'une démonstration générale donnée par Rankine et par M. Boussinesq (5e série, t. VIII, 1874, *Bulletin,* XI, p. 264-265).

L'auteur ayant remarqué la contradiction de ce théorème avec le résultat de ses propres recherches, a repris l'étude de la question et a rencontré une solution qui est en parfait accord avec l'expérience très curieuse du général Ardant (*Mémorial du Génie* de 1848), citée par M. Collignon dans son *Cours de Mécanique appliquée aux constructions.*

Il nous serait difficile de donner une idée complète de l'intéressant Mémoire dont nous venons de parler. L'essentiel, croyons-nous, pour les lecteurs du *Bulletin,* est de pouvoir aisément reconstituer la bibliographie des questions qui appellent depuis longtemps l'attention des géomètres sur les considérations théoriques de nature à éclairer la science de l'ingénieur. Nulle part peut-être plus que dans les Sciences mathématiques et leurs applications, ce n'est pas seulement la solution des problèmes ou la démonstration des théorèmes qu'il importe de connaître ou d'établir, mais aussi la bibliographie qui les rattache aux travaux antérieurs ayant trait au même objet.

Tourtay. — Note sur les raccordements paraboliques de la voie en plan. (387-408, 6 fig.).

On a reconnu depuis longtemps la nécessité, pour faire varier le dévers d'une façon continue dans les voies ferrées, d'intercaler entre l'alignement droit et le cercle qui le suit une courbe de raccordement à rayon variable.

Une instruction jointe à la circulaire ministérielle du 28 juin 1879, qui accompagne le recueil de formules pour l'étude et la construction des chemins de fer, indique la manière de tracer ce raccordement, au moyen d'une courbe parabolique dont l'équation est

$$y = \frac{x^3}{135000}.$$

La solution que comporte l'application de cette courbe de raccordement a été développée par M. Nordling dans un Mémoire inséré aux *Annales* de 1867.

Cette solution n'est qu'approximative, car la démonstration des propriétés de la courbe de raccordement se fait en admettant comme expression de la courbure $\frac{d^2y}{dx^2}$, expression approchée, qui ne donne des résultats suffisamment exacts que pour des arcs de faible étendue à partir de l'origine, comme le fait remarquer M. Nordling.

L'application de la courbe précitée donne lieu à des erreurs assez notables lorsqu'il s'agit de raccorder des courbes à faible rayon, celles de 300^{m} à 350^{m} par exemple, avec un alignement droit.

On peut donc se proposer de déterminer d'autres coefficients, et de raccorder par une courbe telle que le dévers y augmente uniformément depuis la valeur zéro qu'il a sur l'alignement droit jusqu'à la valeur qu'il doit atteindre sur l'arc de cercle.

Le dévers doit d'ailleurs rester toujours inversement proportionnel au rayon de courbure, d'après le principe généralement adopté.

Allard (*E.*). — Expériences faites pendant et après l'exposition d'électricité de Paris sur la lumière électrique, les accumulateurs et le transport de la force. (417-464, 1 pl.).

Flamant. — Résumé d'articles publiés par la Société des ingénieurs civils de Londres sur la poussée des terres. (477-532, 1 pl.).

Le premier est un travail de M. G.-H. Darwin, contenant les résultats d'expériences récemment faites sur la poussée horizontale d'une masse de sable, et leur comparaison aux formules théoriques.

Le second est une Note de M. Boussinesq sur les conclusions du travail de M. Darwin et dans laquelle il établit la parfaite concordance des résultats trouvés par cet ingénieur, et convenablement interprétés, avec les formules qu'il a lui-même données précédemment, et notamment dans un article publié à la suite d'un Mémoire de M. Baker dans les *Annales* de 1882 (*Bulletin,* VIII$_2$, p. 79).

Le troisième est de M. Gaudard et contient aussi quelques remarques sur le travail de M. Darwin.

Enfin, l'auteur de ce résumé ainsi que M. Boussinesq répondent au Mémoire de M. Gobin qui avait élevé des doutes sur l'exactitude de certaines conclusions de précédentes études théoriques de la poussée des terres.

Fargue. — Réclamation de priorité. (612).

L'auteur rappelle que la courbe de raccordement proposée par M. Tourtay est précisément celle qu'il a indiquée sous le nom de *spirale-volute* dans sa première étude sur la Garonne, publiée en 1868.

Tome VII, 1er semestre 1884.

Thévenet. — Expériences sur le débit des puits en terrains sablonneux aquifères. (200-210, 3 fig.).

Switkowski. — Note sur un procédé de détermination expéditive des surfaces, emprises et talus des profils de terrassements. (211-218, 1 pl.).

Gilliot. — Mémoire sur quelques propriétés des courbes de pression et de leurs tangentes et applications pratiques. (260-302, 15 fig.).

Énoncé et démonstration géométrique de théorèmes relatifs à la détermination des courbes de pression que l'on rencontre dans l'étude de la stabilité des voûtes.

Discussion comparative des théories développées par MM. G. Jung (*Bulletin de la Soc. math.*, t. IV, p. 163-171, et *Bulletin*, I_2, p. 280), Peaucellier, Durand-Claye et Cunq (*Annales*, 1880; *Bulletin*, VIII_2, p. 71-72).

Fargue. — Note sur le tracé des rives de la Garonne. (411-431, 1 pl.).

Le but de ce travail est indiqué dans les articles du précédent volume relatifs au problème des raccordements.

L'auteur se trouve amené à faire usage de courbes caractérisées par un rapport constant n entre l'angle de contingence $d\alpha$ et l'accroissement $d\theta$ de l'angle polaire. Ces courbes ont pour équation générale

$$r^{n-1} = A \sin(n-1)\theta. \tag{1}$$

Pour $n = 3$, la courbure est proportionnelle au rayon vecteur et la courbe est une lemniscate : $r^2 = A \sin^2\theta$.

L'auteur de la Notice propose de désigner de ce nom générique la famille de courbes représentées par l'équation (1).

Ces courbes, bien connues depuis Maclaurin, ont été rencontrées et étudiées par un grand nombre de géomètres et, parmi les noms qui leur ont été donnés, celui de *spirales-sinusoïdes*, proposé par M. Haton de la Goupillière, nous paraît devoir être définitivement adopté (voir les *Nouvelles Annales de Math.*, 1872, p. 162-167, 1876, p. 97-108 1886, p. 397-398 et *passim*).

Ce n'est pas le seul exemple de courbes auxquelles des géomètres aient donné plusieurs noms; l'inconvénient qui peut résulter de cette complication est assez évident pour que l'on s'efforce de réaliser au plus tôt l'unité de nomenclature en Mathématiques.

Boussinesq (*J.*). — Complément à de précédentes Notes sur la poussée des terres. (443-481).

Discussion nouvelle des théories et expériences de MM. Gobin, Darwin, rapportées plus haut, Audé et Domergue citées dans le *Mémorial du Génie* (n° 15, 1848).

Nouvel examen d'un passage de la théorie de Coulomb (*Mémoires des savants étrangers*, t. VII, 1773).

Bazin (*H.*). — Notice sur l'emploi des doubles flotteurs pour la mesure des vitesses dans les grands cours d'eau. (554-591).

D'importantes expériences ont été faites récemment sur plusieurs grands cours

d'eau dans le but de vérifier la loi suivant laquelle les vitesses décroissent depuis la surface libre du courant jusqu'au fond du fleuve. Ces recherches nouvelles, généralement faites avec beaucoup de soin, n'ont cependant pas conduit à des résultats parfaitement concordants. Le but de la présente Notice est de montrer par une discussion comparative que les différences constatées sont simplement apparentes et tiennent à la nature des instruments employés (moulinet et flotteur).

Les expériences dont il est question sont les suivantes :

1° M. Ellis, sur le Connecticut (1874, moulinet et flotteur);
2° M. Allan Cunningham, sur le canal du Gange (1874-1879, flotteurs);
3° M. Harlacher, sur l'Elbe et le Danube (1876-1879, moulinet);
4° MM. Nazzani et Zucchelli, sur le Tibre (1880-1881, moulinet et flotteurs).
5° M. Gordon, sur l'Irrawaddi (1882, moulinet et flotteurs).

Bloch (*R.*). — Quelques tracés particuliers des courbes en anses de panier à cinq centres. (596-606, 3 fig.).

Le choix des rayons en progression arithmétique combinés soit avec des angles quelconques, soit mieux avec des angles en progression de même sorte, ou même des angles égaux, paraît donner la meilleure solution du problème.

L'objet de cette Notice est de donner les procédés géométriques et les formules algébriques s'adaptant le plus rapidement à ce tracé.

Tome VIII, 2e semestre 1884.

Hulewicz (*M.*). — Calcul de résistance des poutres droites à plusieurs travées. (101-197).

Dans un précédent Mémoire, l'auteur a établi les formules relatives aux cas les plus usuels des poutres symétriques (*Annales*, 1882; *Bulletin*, VIII_2, p. 77).

Cette troisième Partie comprend l'application des formules précitées.

Pour chaque travée, un tableau spécial renferme les éléments suivants, nécessaires au calcul des ordonnées de la courbe enveloppe des forces extérieures :

1° Équation générale des moments fléchissants en fonction de l'ouverture et des charges supposées uniformément réparties sur la longueur entière de chacune des travées;
2° Expression des abscisses qui limitent les tronçons de la travée;
3° Expressions des moments fléchissants correspondant à ces abscisses qui forment les sommets de la courbe enveloppe;
4° Équations des moments fléchissants dans les trois tronçons principaux de la travée.

Ce travail forme à peu près la moitié du Mémoire. L'autre moitié est consacrée à une recherche analogue des courbes enveloppes des efforts tranchants, dans la même hypothèse d'un nombre de travées variant de deux à huit.

Lavoinne. — Mémoire sur le tracé des courbes de pression dans les voûtes. (315-434, 1 pl.).

La méthode ingénieuse de M. Durand-Claye consiste à tracer à l'intérieur d'une voûte donnée des courbes limites des courbes de pressions et à apprécier son degré de stabilité par l'écartement de ces courbes.

Cette méthode laisse toutefois la question de stabilité incomplètement résolue, et ce n'est que par l'introduction de considérations étrangères à l'équilibre proprement dit qu'on peut faire cesser l'indétermination : celle du principe de la moindre action, entre autres, a été employée à cet effet.

M. Dupuit a signalé, parmi les circonstances susceptibles d'exercer une influence prépondérante, le mouvement que prennent les voussoirs au décintrement. Toutefois, en ramenant tous les mouvements à un seul, et en laissant de côté tous ceux qui peuvent se produire d'un voussoir à l'autre, M. Dupuit a été conduit à une conclusion qui met sa théorie de l'équilibre des voûtes en contradiction avec un des principes les mieux établis de la résistance des matériaux, en cè qu'il fait passer la courbe des pressions par un point pris sur l'intrados même.

La considération, plus conforme à la réalité, de l'ensemble des déformations des voussoirs et du rôle que, dans ces déformations, joue leur compressibilité propre, peut conduire, tout en évitant cette contradiction, à se faire de la courbe des pressions une idée plus rationnelle, en faisant diverses hypothèses qu'une construction soignée de la voûte permet de réaliser d'une manière plus ou moins complète.

Le Châtelier. — Calcul des poutrelles des ponts métalliques pour voies charretières. (494-508, 6 fig.).

Exposé d'un mode de calcul des poutrelles précis et maniable.

D'Ocagne (M.). — Procédé nouveau de calcul graphique. (531-540, 1 fig., 1 pl.).

Ce procédé de calcul graphique résulte d'une interprétation géométrique nouvelle du principe que M. Lalanne a imaginé et proposé, dès 1846, dans les *Annales,* pour la résolution graphique des équations numériques.

L'équation $z^n + pz + q = 0$ prise pour type représente, pour une valeur donnée α de z, une droite si l'on remplace p et q par x et y. L'enveloppe de toutes ces droites, lorsque α varie, est une certaine courbe (E) que M. Lalanne a appelée la *solutive* de l'équation donnée, parce que, si l'on se donne $x = p_1$ et $y = q_1$, les valeurs du paramètre α, ou les racines de l'équation proposée, sont les inclinaisons des tangentes menées du point $(p_1 q_1)$ à la *solutive.*

Mais, une courbe étant dessinée sur un plan, il est bien plus facile de chercher ses intersections avec une droite que de lui mener des tangentes par un point donné. La question se trouve ainsi ramenée à substituer à la *solutive* une autre courbe donnant les racines par son intersection avec une droite complètement déterminée par la connaissance des paramètres p et q.

La manière dont l'auteur est parvenu à réaliser cette substitution repose sur l'emploi d'un système spécial de coordonnées dites *coordonnées parallèles,* qu'il a étudiées avec détails dans un Mémoire inséré aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1884). Le système en question a été décrit dans le numéro de janvier 1886 du *Bulletin,* comme proposé par Schwering; mais il doit, au con-

traire, être attribué à Chasles, d'après un article tout récent des *Nouvelles Annales* (juin 1886).

Ce travail a été reproduit à part, et complété par trois Notes sur une application des coordonnées parallèles, sur le barycentre d'un système de points, et sur les transformations axiales des courbes planes.

Enfin, la présente Notice y a été également insérée, mais réduite à ce qu'elle avait d'essentiel.

Pour le type d'équations $z^2 + px + q = 0$, l'utilité de la méthode graphique n'est pas immédiate; mais son avantage se manifeste pour l'équation

$$z^3 + pz + q = 0.$$

La solutive employée est, quel que soit n, tangente en un même point d'une droite fixe, et asymptote à une autre droite fixe, perpendiculaire à la première, sans admettre ni inflexion ni rebroussement. De plus, une branche du tracé peut suffire, la symétrique est inutile moyennant un changement de signe.

Une fois construite, il suffit de déplacer une droite tracée sur un transparent pour obtenir très vite et sans aucun tâtonnement les intersections demandées.

Ce procédé, basé sur l'emploi d'une courbe fixe pour chaque valeur de n et d'une droite mobile, offre une certaine analogie avec la transformation de Sarrus, applicable au même type d'équations trinômes. Dans cette méthode, la droite mobile est toujours parallèle à OX, mais la construction de la courbe fixe est peut-être moins expéditive que dans le procédé que nous venons de rappeler. La comparaison nous a semblé cependant de quelque intérêt pour les géomètres.

Tome IX; 1er semestre 1885.

Perrodil (*de*). — Note sur l'emploi des nombres primordiaux dans les calculs avec des Tables ou avec des règles logarithmiques. (85-88).

On peut définir les nombres primordiaux en disant qu'ils sont les termes de la progression arithmétique obtenue en insérant une infinité de moyens entre 1 et 10. Les nombres primordiaux ont donc toujours un chiffre à leur partie entière et n'en ont qu'un seul. Ainsi 2,728 est le nombre primordial de 2 728 000 représenté dans le nouveau mode d'écriture par $\overset{+6}{2},728$. La caractéristique du logarithme est alors inscrite comme exposant, et avec son signe.

Quelques exemples montrent l'avantage de cette nouvelle notation.

Flamant. — Note sur le Traité d'Hydraulique de M. Graeff. (89-95).

Compte rendu bibliographique sommaire. Un complément à cette bibliographie se trouve donné dans une livraison suivante, aux pages 781-782.

Laterrade. — Considérations sur la stabilité des voûtes en maçonnerie. (141-178, 2 fig.).

Nouvelles recherches fondées sur la théorie de Méry. Parmi les conclusions de ce travail, nous remarquerons les deux propositions suivantes :

1° Dans toutes les voûtes en maçonnerie de même espèce et de même forme, la surface de toute section comprise entre deux joints quelconques est sensiblement proportionnelle au produit de l'ouverture par l'épaisseur à la clef.

2° La pression par centimètre carré sur un joint quelconque d'une voûte en maçonnerie qui ne supporte que son propre poids sans surcharge est à peu près indépendante de son épaisseur; elle dépend presque uniquement de son ouverture, à laquelle elle est sensiblement proportionnelle.

Cadart (*G.*). — Théorie des ponts suspendus américains à tablier rigide. (179-217, 1 pl.).

Ce sujet a été déjà traité, au moins en partie, par M. J. Resal (*voir* les Volumes de 1882 et 1883), qui a constaté une assez grande concordance entre les résultats donnés par les épreuves et par ses formules pour des ponts en arc ou à poutres droites; on peut donc admettre que ses conclusions, en ce qui concerne les ponts suspendus, sont exactes.

Le nouveau Mémoire a pour objet d'exposer comment on peut calculer les dimensions à donner aux poutres raidissantes pour que, la répartition des surcharges mobiles venant à se modifier, le câble conserve la forme parabolique, ou, en d'autres termes, pour qu'il soit soumis à des efforts uniformément répartis suivant l'horizontale sur toute la longueur de la travée.

La théorie donnée dans ce travail est indiquée dans un Ouvrage de M. W.-H. Burr, elle est seulement présentée sous une forme différente, et appliquée à l'étude d'une poutre encastrée à ses deux extrémités ou simplement appuyée, avec des surcharges isolées ou uniformément réparties.

Ghédéon (*Démétrius*). — Notice sur le tracé des raccordements circulaires dans les opérations sur le terrain. (230-244, 5 fig.).

Tracé fondé sur l'emploi d'une table donnant les longueurs des rayons vecteurs des différents points d'une circonférence, le pôle étant pris sur la courbe.

Collignon (*E.*). — Note sur la détermination du coefficient de contraction de la veine fluide. (295-303, 2 fig.).

Le coefficient de contraction m, que l'expérience a montré égal en moyenne à 0,62, ne peut être déterminé théoriquement que pour l'ajutage rentrant de Borda, et prend alors sa valeur minima $\frac{1}{2}$.

L'objet de cette Note est d'établir d'une façon élémentaire une relation entre le nombre m et deux autres coefficients particuliers, qui semblent se prêter à des évaluations approximatives. L'un d'eux, f, compris entre 0 et 1, mesure la diminution moyenne de la pression hydrostatique produite sur la paroi, près de l'orifice, par le mouvement des filets liquides; l'autre, K, plus grand que 1, mesure l'étendue de la région où les pressions se trouvent modifiées, rapporté à l'aire de l'orifice.

S'appuyant sur des hypothèses assez plausibles, l'auteur trouve les relations

$$m = \frac{K + f - Kf}{2}, \qquad f = \frac{2\sqrt{K} + 1}{3(\sqrt{K} + 1)}, \qquad m = \frac{K + \sqrt{K} + 1}{6},$$

dont la deuxième représente une hyperbole équilatère et la troisième une parabole ayant pour axe l'ordonnée du point où l'hyperbole rencontre l'axe des abscisses.

Flamant. — Tables numériques pour le calcul de la poussée des terres. (515-540, 2 fig.).

Dans divers articles précédemment indiqués, M. Boussinesq a établi la parfaite concordance de la théorie de l'équilibre des massifs pulvérulents avec les faits d'expérience constatés en Angleterre par M. Darwin, et en France par M. Gobin. Il a montré également que la même théorie rendait compte de certaines observations faites antérieurement par le colonel Audé, le général Ardant, etc., en supposant que les terres sont absolument dépourvues de cohésion et que le coefficient de frottement des terres sur le mur est égal à celui des terres sur elles-mêmes (ce qui revient à admettre qu'une très mince couche de terre reste adhérente au mur), et qu'il a pour mesure la tangente trigonométrique de l'angle du talus naturel des terres avec l'horizon.

La poussée, exercée par le massif sur le mur, ne peut pas en général être calculée exactement, mais M. Boussinesq fait connaître deux limites, l'une inférieure, l'autre supérieure, entre lesquelles elle est comprise; et d'une analyse délicate donnée aux *Comptes rendus* (17, 24, 31 mars et 7 avril 1884), il conclut que la valeur la plus probable de la poussée n'est pas la moyenne arithmétique de ces deux limites, mais qu'elle est égale à la plus petite, augmentée des $\frac{9}{22}$ de leur différence.

La réduction de ces formules en Tables numériques pourra être utile aux ingénieurs; c'est ce qui a engagé l'auteur de ce travail à les dresser.

Hétier. — Étude sur la résistance des matériaux dans les murs de soutènement. (795-989, 61 fig.).

L'auteur se propose d'établir, à l'aide des principes de la résistance des matériaux, des formules et des procédés pratiques pour construire des murs solides, sans dimensions exagérées. Il accuse d'inexactitude la théorie de M. Gobin, qui conduirait à donner aux murs des dimensions beaucoup trop faibles.

Les deux cas principaux étudiés dans ce Mémoire sont ceux des murs qui doivent soutenir des eaux ou murs-barrages et ceux qui doivent soutenir des remblais ou murs de soutènement.

Les profils successivement étudiés sont ceux des murs-barrages sans contreforts, les murs de soutènement en maçonnerie ordinaire, sans contreforts et avec contreforts; les murs de soutènement à pierres sèches; les murs sans stabilité propre et perrés.

Durand-Claye (*L.*). — Note sur la stabilité des voûtes. (1200-1204, 1 fig.).

Confirmation des résultats obtenus par M. Laterrade, dont la méthode acquiert plus de rigueur en profitant de la vieille remarque de La Hire, à savoir qu'une portion de voûte est un coin en équilibre.

En partant de cette donnée, on parvient à quatre formules très simples, dont les propositions de M. Laterrade, et même de plus générales, sont des conséquences immédiates.

Tome X; 2e semestre 1885.

Collignon (*E.*). — Note sur la détermination graphique des moments fléchissants dans les pièces chargées de poids discontinus. (5-46, 18 fig., 1 pl.).

Il y a plus d'une méthode pour résoudre le problème de la détermination des moments fléchissants dans une pièce soumise à des poids discontinus. L'auteur de cette Notice a cru devoir publier quelques résultats simples et d'un caractère pratique, auxquels il a été récemment amené par une nouvelle étude de la question.

Lucas (*F.*). — Les machines magnéto-électriques et l'arc voltaïque des phares. (47-121, 2 fig.).

Théorie des machines magnéto-électriques du type Méritens, adoptées pour l'éclairage électrique des phares, et dont la première application a été faite au phare du Planier (1er décembre 1881), tandis que les machines de l'*Alliance* étaient déjà employées en 1863 à l'un des phares de la Hève, près du Havre.

L'auteur estime qu'un progrès considérable sera réalisé le jour où les grands foyers d'incandescence pourront être substitués aux arcs voltaïques; c'est dans cette voie qu'il faut chercher la future solution du problème de l'éclairage électrique des phares.

Perrodil (*de*). — Modification de la formule d'intégration approchée de Thomas Simpson. (122-128, 2 fig.).

Cette formule a pour expression

$$F(x_{2n}) = \frac{\Delta x}{3}\left[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})\right].$$

Pour certaines quadratures qui se présentent dans le calcul de résistance d'une voûte de pont, par exemple, il y aurait sans doute avantage à substituer à cette formule les deux suivantes :

$$F(x_1) = \frac{\Delta x}{3}\left(2y_0 + y_1 + \frac{y'_0}{2}\Delta x\right),$$

$$F(x_{n+2}) - F(x_n) = (y_n + 4y_{n+1} + y_{n+2})\frac{\Delta x}{3},$$

y' désignant la dérivée première.

A ce propos, nous croyons utile de rappeler que l'étude circonstanciée de tous

les perfectionnements pratiques dont est susceptible la formule de T. Simpson a été faite par notre honorable collaborateur M. P. Mansion (Supplément au t. I, 1881, de *Mathesis; Bulletin* VI_2, p. 193-195). C'est la monographie la plus complète des recherches des géomètres sur cette question.

Guillaume. — Notice sur la Statique graphique. (267-351, 9 pl.).

La Statique graphique a pour objet de ramener à des constructions géométriques, les problèmes qu'on étudie dans les Traités de résistance des matériaux.

Elle se prête sans difficulté à la solution rapide de ces problèmes, que les ingénieurs doivent résoudre la plupart du temps avec une extrême urgence, et les résultats obtenus ont toute l'exactitude nécessaire aux besoins de la pratique.

La publication d'un Mémoire sur cet objet offre donc un grand intérêt, au moment où paraissait la traduction de l'Ouvrage de M. Cremona *Sur les figures réciproques en Statique graphique,* bientôt suivi de *la Statique graphique et ses applications aux constructions* par M. Maurice Lévy, et du second volume des *Leçons de Statique graphique* de M. A. Favaro, traduites par M. P. Terrier.

Le présent Mémoire est divisé en deux Parties, consacrées à l'application des principes de la Statique graphique aux poutres droites reposant sur deux appuis, aux poutres droites encastrées, aux poutres continues et aux arcs, en attendant l'étude, presque promise, des systèmes réticulés.

Perrodil (*de*). — Note sur la résistance comparée des constructions semblables. (569-581, 3 fig.).

La théorie de la similitude en mécanique appliquée à l'art des constructions remonte à Galilée. Plus récemment, MM. Phillips et Collignon en ont signalé d'autres applications. Celle qui est traitée dans le présent article a pour but de comparer exclusivement des constructions de même nature et de figures géométriques semblables avec ou sans surcharge.

La conclusion relative aux forces des dynamomètres semblables est intéressante à connaître : elles sont dans le rapport des carrés des dimensions homologues.

Hausser (*A.-E.*) et *Cunq* (*L.*). — Note sur les moments fléchissants sur les appuis d'une poutre droite continue. (613-644, 14 fig., 1 pl.).

Les deux ingénieurs que nous venons de nommer doivent être ajoutés aux différents auteurs qui ont publié des Traités de *Statique graphique appliquée.*

Le présent travail est fait pour donner une idée des méthodes élémentaires qu'ils ont exclusivement adoptées dans leur ouvrage, destiné à vulgariser les notions sur la résistance des matériaux appliquée aux constructions. Il se rapporte au calcul des moments fléchissants sur les appuis d'une poutre à plusieurs travées solidaires, produits par la surcharge formée de charges isolées ou non, et quels que soient le nombre, la position et l'importance des charges.

Lagarde (*de*). — Note sur le calcul des poutres droites à travées solidaires. (694-726, 19 fig., 1 pl.).

Il s'agit de trouver en chaque point de la poutre les efforts maxima qui peuvent se produire pour toutes les combinaisons de surcharge. Bresse a supposé la travée toujours vide de surcharge ou portant une surcharge uniforme dans toute sa longueur.

M. Hulewicz (*Bulletin*, VIII_2, p. 77) a traité le problème dans le cas général de surcharges disposées d'une manière quelconque. Il a démontré que la considération des travées incomplètement surchargées ne changeait rien aux hypothèses de Bresse pour la surcharge des travées autres que celle où l'on cherche le moment produit.

L'auteur du présent travail s'est proposé de résumer la méthode de M. Hulewicz en imaginant un mode particulier d'application ; il adopte les notations et les signes des moments fléchissants du cours de Bresse, et il construit séparément les courbes des moments ou des efforts tranchants dus à la charge permanente et à la surcharge ; les premiers sont placés au-dessous de la ligne de terre, les autres au-dessus.

Barbet. — Note sur la profondeur à donner aux écluses. (727-743, 1 pl.).

A cette étude s'ajoute celle de l'influence qu'exerce, au point de vue du remplissage du sas, la position des ventelles des portes d'amont.

L'auteur adopte les notations d'un précédent travail de MM. Fontaine et Desmur (*Bulletin*, VIII_2, p. 74-75) et y introduit quelques rectifications.

Leygue (*L.*). — Nouvelle recherche sur la poussée des terres et le profil de revêtement le plus économique. (788-1003, 126 fig., 10 pl.).

Cet important Mémoire est peut être le plus complet qui ait paru dans les *Annales* sur une question aussi intéressante pour les ingénieurs.

L'auteur ne se place pas à un point de vue exclusivement mathématique ; il se préoccupe, au contraire, de donner des résultats utiles à la pratique des constructions.

En présence des conditions, où les hypothèses d'un côté et la science pure de l'autre ont une trop large part pour donner au constructeur toute la confiance dont il a besoin, l'auteur a reconnu l'intérêt d'entreprendre une série d'expériences directes et méthodiques, qui, reproduites sous forme de courbes et traduites par des règles semi-empiriques, seraient de nature à élucider la question et lui conserveraient le degré de simplicité nécessaire.

Voici les subdivisions principales du Mémoire :

Première Partie. — Vérification des hypothèses admises sur la cohésion, la déformation des massifs, la direction, le point d'application et l'intensité de la poussée ; formules empiriques de la poussée et détermination de ses constantes physiques ; comparaison avec la théorie en usage.

Deuxième Partie. — Application des formules empiriques de la poussée aux

murs de soutènement et comparaison des résultats obtenus avec les expériences rapportées par différents auteurs (Backer, Hope, Pasley, Gobin, Darwin, Audé); recherche du meilleur profil de mur; formules semi-empiriques des épaisseurs en fonction du degré de stabilité voulu; comparaison avec les formules de M. Boussinesq.

Troisième Partie. — Application des formules empiriques de la poussée des terres à différents murs construits et valeur économique de ces profils. Conclusions.

Laterrade et *Durand-Claye* (*L.*). — Notes sur la stabilité des voûtes. (1004-1007).

M. Laterrade, en réponse à un article de M. Durand-Claye inséré au tome précédent, montre que la formule de Navier conduit aux mêmes résultats que la remarque de La Hire.

M. Durand-Claye fait ensuite observer que sa propre formule est identique à celle que Navier a trouvée d'une autre manière. Il relève, à ce sujet, une erreur qui avait échappé à Navier dans son *Résumé des leçons à l'École des Ponts et Chaussées* (1833, p. 188). Sa formule donnerait une pression normale infinie sur le joint de naissance, quand celui-ci est horizontal, alors qu'il est évident *a priori* qu'elle est égale au poids de la demi-voûte.

Kleitz. — Note sur la théorie de l'écoulement de l'eau par déversoir. (1157-1164, 1 fig.).

Démonstration de la formule

$$Q = m\frac{2}{3}lH\sqrt{\frac{2gH}{3}},$$

l désignant la longueur du déversoir, H la hauteur du liquide non encore déprimé, au-dessus de l'arête du déversoir, Q le débit, g l'accélération de la pesanteur, m un coefficient généralement un peu supérieur à l'unité.

Durand-Claye (*A.*). — De l'entraînement et du transport pour les eaux courantes des vases, sables et graviers. (1165-1178, 6 fig.).

Analyse d'un intéressant Mémoire de M. L.-L. Vauthier, présenté au Congrès de Blois en 1884.

H. B.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE [1]. — 3e série.

Tome IV; 1885.

Laguerre (*E.*). — Sur les anticaustiques par réfraction de la parabole, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe. (5-16).

Application de la théorie des semi-droites. *Voir* le Mémoire de l'auteur sur les hypercycles (*Comptes rendus,* mars et avril 1882). Dans le présent article, il arrive à d'assez nombreuses propositions géométriques sur la parabole, en considérant cette courbe comme un hypercycle.

Halphen (*G.-H.*). — Formules d'Algèbre. Résolution des équations du troisième et du quatrième degré. (17-35).

Dans ce petit Mémoire, dit l'auteur au début, on trouvera démontrés, par les moyens les plus élémentaires, des résultats importants que l'on considère d'habitude comme étant réservés à la théorie des covariants. Sur quelques points même ces résultats dépassent un peu ce qui se rencontre dans les meilleurs Ouvrages, notamment la décomposition des polynômes du quatrième degré en facteurs linéaires.

Voici les divisions principales du Mémoire :

Résolution de l'équation du second degré. — Élimination entre deux équations du second degré. — Condition pour qu'une équation du troisième degré ait une racine double. — Décomposition d'un polynôme du troisième degré en la différence de deux cubes. — Décomposition d'un polynôme du troisième degré en facteurs linéaires. — Condition pour qu'une équation du quatrième degré ait une racine double. — Conditions pour qu'un polynôme du quatrième degré soit un carré. — Décomposition d'un polynôme du quatrième degré en la différence de deux carrés. — Décomposition d'un polynôme du quatrième degré en facteurs linéaires. — Discussion de l'équation du quatrième degré à coefficients réels.

Cesaro (*E.*). — Sur une équation aux différences mêlées. (36-40).

L'équation étudiée est $y_p\,dx = x\,dy_{p-1}$, qu'on obtient en partant d'une fonction arbitraire $y = f(x)$, ce qui donne $y_1 = xy'$. Les coefficients des termes formant le développement de y_p jouissent de propriétés auxquelles se ratta-

---

[1] Voir *Bulletin*, t. X, p. 16.

chent les nombres de Bernoulli, et que le calcul symbolique permet de découvrir.

Cesaro (*E.*). — Dérivées des fonctions de fonction. (41-55).

Nouvel et très heureux emploi du calcul symbolique. M. Cesaro calcule d'abord les dérivées d'ordre quelconque d'une fonction de e^x; puis il en fait diverses applications, notamment aux intégrales définies; même étude pour $y = f(\log x)$; puis généralisation et introduction du symbole désigné par l'auteur sous le nom d'*algorithme isobarique*. L'article se termine par une série d'applications fort intéressantes et par l'examen de deux nouveaux algorithmes qu'il propose.

Publications récentes. — (55).

Nécrologie. — Annonce de la mort de M. Lionnet. (56).

Questions proposées. — 1520 à 1522. (56).

Hermite. — Sur une identité trigonométrique. (57-59).

Démonstration nouvelle et généralisation remarquable d'une formule de M. J.-W.-L. Glaisher.

Cesaro (*E.*). — Note sur le calcul isobarique. (59-78).

Cet article contient de nouveaux développements sur le calcul symbolique dû à l'auteur, et qui semble de nature à pouvoir rendre de très importants services dans certaines branches de l'Analyse. A rapprocher de deux articles analysés ci-dessus, et de divers travaux de M. d'Ocagne.

L'article présente les divisions suivantes :

Algorithmes d'algorithmes. — Sur la dérivation des fonctions de fonction. — Différences des fonctions. — Algorithmes isobariques composés. — Algorithmes homogènes composés.

Dewulf (*E.*). — Théorèmes de Géométrie et de Cinématique. (79-80).

Propriétés se rattachant à l'étude du déplacement d'un plan sur lui-même, et notamment aux centres de courbure des trajectoires.

Jaggi (*E.*). — Sur les complexes de droites du premier degré et sur leurs congruences. (80-87).

L'auteur se propose de transformer la définition analytique de Plücker en définition géométrique, et il tire de là des conséquences géométriques intéressantes. A noter, l'explication géométrique de l'analogie, constatée par M. Appell, entre les pôles et plans polaires dans une cubique gauche, et le système des foyers et plans focaux dans le déplacement infiniment petit hélicoïdal.

Estienne (*J.-E.*). — Quelques réflexions sur l'étude géométrique des courbes géométriques, et théorèmes pouvant y être utiles. (87-98, 131-138, 297-315).

Mémoire fort original où l'auteur prend comme point de départ quelques théorèmes fondamentaux sur les courbes géométriques, et notamment le théorème d'Euler sur les courbes d'ordre n passant par $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ points fixes. Il y ajoute un nouveau théorème sur les n^2 points d'intersection de deux courbes d'ordre n. Dans l'impossibilité d'analyser les diverses conséquences qu'il déduit de cette étude, nous devons nous borner à reproduire les titres des divisions principales du Mémoire de M. Estienne. Cela sera suffisant pour donner au lecteur une idée générale :

Exposé de la méthode (théorèmes généraux). — Remarques sur les théorèmes précédents. — Réflexions et théorèmes sur les surfaces du second ordre ou quadriques. — Relation entre huit plans septaires. — De la cubique gauche. — Autre analogie entre la cubique gauche et la conique. — Digression sur la condition simple du premier ordre, la plus générale, à laquelle on peut astreindre une conique. — Quelques théorèmes sur les quadriques ayant leurs analogues dans la théorie des coniques, et pouvant servir à la recherche d'une relation entre dix points d'une quadrique.

Antomari (*X.*). — Théorèmes de Géométrie sur le centre des moyennes distances. (98-100).

Sur les centres des moyennes distances de m points combinés p à p, puis $m-p$ à $m-p$.

Escary. — Remarques concernant la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$. (101-102).

Dans le terme général du développement ayant pour dénominateur $n!$ M. Escary pose $m = n^2\omega$, ce qui le conduit à une proposition nouvelle sur le nombre e.

Publications récentes. — (102-104).

Questions proposées. — 1523, 1524. (104).

Un ancien Élève de Mathématiques spéciales. — Note de Géométrie. (105-109).

A propos d'une question proposée en 1851 par Chasles au concours général : propriété de deux cercles qui ne se touchent pas, Chasles a publié dix solutions de la question, et cet article en fournit une onzième.

Ocagne (*M. d'*). — Étude de deux systèmes simples de coor-

données tangentielles dans le plan : coordonnées parallèles et coordonnées axiales. (110-130).

Fin d'une étude publiée dans le tome précédent et que nous avons antérieurement analysée. Elle comprend les Chap. IX et X (méthode de transformation et applications); nous nous bornerons ici à reproduire les titres des divisions principales :

Définitions et principes. — Droite divisant le système de deux autres dans un rapport donné. — Points parallèles. — Module angulaire d'un point. — Angle de deux points. — Points perpendiculaires. — Remarques sur la transformation des coniques. — Transformation des propriétés segmentaires. — Transformation des propriétés angulaires. — Note sur la transformation des propriétés barycentriques. — Résumé.

Ajoutons que l'ensemble de cette étude fort intéressante a été publié en une brochure, contenant en outre l'indication d'un procédé de calcul graphique et des Notes, ne figurant pas dans les articles des *Nouvelles Annales*.

Humbert (*E.*). — Note sur la théorie des foyers. (138-143).

M. Humbert établit cette théorie au moyen d'une transformation de l'équation générale des coniques, qui le conduit également à la théorie des axes. Il obtient aussi l'équation générale des cercles doublement tangents à la conique.

Correspondance. — *M. Genocchi :* A propos d'une Lettre de Gauss à Sophie Germain sur la forme $y^2 + nz^2$. — *M. H. Brocard :* Sur une courbe étudiée par M. d'Ocagne dans son étude relative aux coordonnées axiales et parallèles (143-147).

Bibliographie. — Théorie du potentiel, par *Émile Mathieu;* extrait de la Préface de ce troisième Volume du *Traité de Physique mathématique.* (147-150).

Questions proposées. — 1525 à 1529. (150-152).

Biehler (*C.*). — Sur la construction des courbes dont l'équation est donnée en coordonnées polaires. (153-159, 223-235, 249-256).

Ces articles sont la suite d'une étude dont la publication a été commencée dans le Tome précédent. Nous devons renouveler ici nos regrets de voir les diverses parties d'un intéressant Mémoire publiées à de si longs intervalles.

M. Biehler poursuit d'abord l'étude des tangentes et des points d'inflexion, puis il passe à la théorie des asymptotes, au sujet desquelles il se livre à une discussion très précise et très détaillée. Il termine enfin par l'étude des branches paraboliques et des dispositions diverses qu'elles peuvent présenter.

Ces articles seront consultés avec fruit par les élèves des cours de Mathématiques spéciales.

De Saint-Germain (*A.*). — Étude sur un théorème d'Abel relatif aux séries et sur un développement en série souvent utile en Astronomie. (159-169).

Perfectionnement d'une démonstration de Dirichlet; il s'agit d'une proposition sur la convergence des séries, sujet si délicat et qui se prête si facilement à de graves erreurs.

L'analyse de M. de Saint-Germain paraît tout à fait inattaquable. L'article se termine par une application à la série donnant θ développé suivant les puissances de z, lorsqu'on a

$$\cos\theta = \cos\varphi + z.$$

Pomey (*J.-B.*). — Sur les points d'inflexion des courbes du troisième et du quatrième degré. (169-170).

Démonstration de la proposition suivante :

« Si une droite passe par trois points d'inflexion sur une courbe du quatrième degré, elle la coupe encore en un quatrième point d'inflexion. »

Goffart (*V.*). — Évaluation géométrique de l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin\alpha\, dx}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = f(\alpha).$$

(171-172).

$f(\alpha)$ a pour valeur $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ suivant les valeurs de α, et cette fonction $f(\alpha)$ est périodique.

Mirman (*L.*). — Sur les fonctions homogènes de deux polynômes U et V, premiers entre eux et de même degré en x. (173-176).

F(U, V) étant l'une de ces fonctions, les racines communes aux équations $UV' - VU' = 0$ et $F(U, V) = 0$ sont racines multiples de cette dernière. Cette proposition et sa réciproque sont l'objet de l'article dont il s'agit.

Mony (*L.-A.*). — Quelques formules générales relatives aux intégrales définies et indéfinies. (176-183).

M. Mony établit une formule fondamentale intéressante, dont il fait ensuite application et qui lui fournit d'assez nombreux théorèmes. Nous nous bornerons à citer celui-ci :

« Si l'on connaît l'intégrale indéfinie d'une fonction, on en déduit immédiatement celle de la fonction inverse. »

Picquet (*H.*). — Sur l'enveloppe des droites qui coupent deux cercles harmoniquement. (183-184).

Cette enveloppe est une conique ayant pour foyer les centres des deux cercles. Démonstration très simple de cette propriété.

Weill. — Sur une identité algébrique. (184-188).

L'auteur se propose de trouver quatre polynômes entiers satisfaisant à l'identité

$$X^2Y + Y^2Z + Z^2U + U^2X = 0.$$

Cette étude le conduit à de nombreuses conséquences, utiles en Analyse indéterminée.

Weill. — Sur quelques équations indéterminées. (189-193).

Nous citerons les équations

$$ax^2 + by^2 = z^{2p+1}, \qquad x^2 + by^2 = z^m, \qquad x^2 - ay^2 = n^2.$$

Application à l'intégration de certaines équations aux différences finies.

Pomey (*J.-B.*). — Application d'un procédé particulier à la recherche de l'intégrale $\int \frac{dz}{(1+z^2)^2}$. (193-194).

L'auteur passe par une intégrale double. Le procédé est peut-être un peu détourné, bien qu'ingénieux.

Antomari (*X.*). — Généralisation d'un théorème d'Algèbre. (194-196).

Sur deux polynômes entiers, premiers entre eux. Applications aux fractions rationnelles.

Cesaro (*E.*). — Sur le coefficient de stabilité des massifs. (196-200).

Cette Note renferme, sous forme résumée, une application des plus curieuses des méthodes de la Géométrie moderne à la stabilité des revêtements et soutènements. Il y a là le germe d'applications fort utiles dans la pratique des constructions.

Lemoine (*E.*). — Sur une généralisation des propriétés relatives au cercle de Brocard et au point de Lemoine. (201-223).

Dans cet article, M. Lemoine reprend l'étude de certaines propriétés de la géométrie du triangle, qui ont fait l'objet, depuis plusieurs années, de travaux si nombreux et si dignes d'intérêt, et dont nous avons eu occasion de parler à plusieurs reprises dans les précédents comptes rendus des *Nouvelles Annales*. Il y ajoute des théorèmes nouveaux et inédits, obtenus presque tous par la méthode des coordonnées trilinéaires. La plupart se rapportent aux coniques inscrites dans un triangle.

Sur cette matière, qui est loin cependant d'être épuisée, il y a lieu de consulter notamment les travaux de MM. Brocard, Neuberg, Tarry, Mathieu, d'Ocagne, etc., sans parler des Mémoires de M. Lemoine lui-même. Il serait intéressant d'avoir une bibliographie bien complète de cette branche nouvelle de la Géométrie. Ce serait d'un grand secours pour les personnes désireuses de reprendre ces études et de les pousser plus loin.

Lewy (*W.-Th.*). — Sur les puissances des nombres. (235-245).

Application de la théorie des restes des puissances successives d'un nombre, divisées par un nombre constant. Les propriétés bien connues relatives à la périodicité conduisent l'auteur à plusieurs remarques dignes d'intérêt se rapportant au système décimal. Nous signalerons en particulier celle-ci :

« Il n'y a pour tous les nombres entiers que vingt périodes de chiffres des dizaines distinctes. »

L'article se termine par quelques exemples numériques, montrant l'usage qu'on peut faire de ces observations dans certains calculs.

École navale (Concours de 1884). — Énoncés des compositions : Arithmétique et Algèbre, Géométrie, Géométrie descriptive. (245-247).

La Chesnais (*A.*). — Construction du centre de courbure en un point d'une ellipse. (247-248).

Construction ingénieuse, mais qui n'est peut-être pas plus simple graphiquement que les méthodes précédemment connues.

Questions proposées. — 1530, 1531. (248).

Cesaro (*E.*). — Remarques sur un article de M. d'Ocagne. (256-264).

L'article en question, publié en décembre 1884 dans les *Nouvelles Annales*, est relatif aux coordonnées axiales. M. Cesaro, qui s'est occupé lui aussi de la même question, remarque que le système des coordonnées axiales et celui des coordonnées polaires sont corrélatifs. Suivent plusieurs observations sur certaines courbes, et particulièrement sur les courbes corrélatives des conchoïdes.

A rapprocher des travaux de M. Laguerre sur la transformation par semi-droites réciproques, que M. Cesaro ne manque pas de rappeler, en terminant son article.

Giat (*P.*). — Solution de la question proposée au Concours général de 1881 en Mathématiques spéciales. (265-266).

Lieu relatif aux normales menées à un ellipsoïde quelconque.

Giat (*P.*). — Solution de la question proposée au Concours général de 1881 en Mathématiques élémentaires. (267-270).

Propriétés relatives aux bissectrices intérieures d'un triangle.

Giat (*P.*). — Solution de la question proposée au Concours général de 1881 en Rhétorique. (271-272).

Problème relatif à un tronc de cône.

Bénézech (*E.*). — Solution de la question proposée au Concours général de 1881 en Seconde. (272-274).

Problème reposant sur une construction dans l'espace.

Concours d'agrégation des Sciences mathématiques en 1884. — Énoncés des compositions. Admissibilité : Mathématiques spéciales, Mathématiques élémentaires, Composition sur un sujet du programme de la licence. Compositions finales : Mécanique, Calcul, Épure. (274-277).

Concours d'admission a l'École Polytechnique en 1884. — Énoncés des compositions données à plusieurs élèves qui n'ont pu composer que plus tard : Mathématiques, Géométrie descriptive. (277-278).

École Normale supérieure (Concours de 1884). — Énoncés des compositions : Mathématiques, Physique. (279-280).

Concours d'admission a l'École Centrale. — Énoncés des compositions. Première session, juillet 1884 : Géométrie analytique, Calcul trigonométrique, Géométrie descriptive, Physique, Chimie. Seconde session, octobre 1884 : Géométrie analytique, Calcul trigonométrique, Géométrie descriptive, Physique, Chimie. (280-286).

École forestière (Concours de 1884). — Énoncés des compositions : Mathématiques, Trigonométrie et Calcul logarithmique. (286-287).

École spéciale militaire (Concours de 1884). — Énoncés des compositions : Mathématiques, Épure. (288-289).

Humbert (*E.*). — Note sur le développement d'un déterminant. (289-294).

Exposition d'une méthode très simple pour obtenir le développement d'un déterminant à l'aide des mineurs relatifs à k lignes quelconques. Suivent deux applications.

Cesaro (*E.*). — Sur la série harmonique. (295-296).

Sommation des n premiers termes de la série harmonique. Constante d'Euler.

Cesaro (*E.*). — Généralisation de la série de Lagrange. (316-321).

L'auteur rattache aux méthodes du *Calcul isobarique* la démonstration d'une remarquable formule de développement, découverte par M. Teixeira.

Cesaro (*E.*). — Sur un théorème de M. Laguerre. (321-327).

Il s'agit de la question 1389, relative aux racines de l'équation

$$f^2(z) + k^2 f'^2(z) = 0.$$

Généralisant la question, M. Cesaro y ajoute de nombreuses et intéressantes remarques sur les fonctions dont les zéros sont alignés sur une droite.

Cesaro (*E.*). — Solution de la question 1338. (328-330).

Théorème relatif à une équation qui a toutes ses racines réelles.

De Saint-Germain (*A.*). — Note sur la discontinuité de certaines séries. (331-334).

Discussion d'observations de M. Catalan concernant une étude de l'auteur sur un théorème d'Abel (voir *Nouvelles Annales*, avril 1885).

Jaggi (*E.*). — Sur les complexes linéaires. (334-337).

Démonstration analytique d'un théorème sur les normales aux trajectoires d'un solide dont le déplacement est assujetti à cinq conditions.

Fouret (*G.*). — Sur la loi de succession des coefficients dans la formule du binôme. (337-338).

Démonstration indépendante de la parité de l'exposant.

Lebon (*E.*). — Construction nouvelle des points d'intersection d'une droite et d'une conique. (338-342).

Cette construction paraît assez simple, surtout pour le cas de la parabole.

Bibliographie. — Les figures réciproques en Statique graphique, par *L. Cremona;* Compte rendu, par M. *L. Bossut.* (342-344).

Un ancien élève de Mathématiques spéciales. — Solution géométrique de la composition mathématique pour l'admission à l'École Polytechnique en 1885. (345-350).

Problème sur une ellipse et une circonférence passant par ses deux foyers. Parmi les propriétés remarquables que fait ressortir l'auteur de cette solution, il y a lieu de signaler celle-ci :

« Le produit des ordonnées des points de rencontre de l'ellipse et de la circonférence est constant, quelle que soit cette circonférence passant par les deux foyers. »

Gomes Teixeira (*F.*). — Sur l'interpolation au moyen des fonctions circulaires. (351-359).

Développement sur des formules de M. Hermite donnant une méthode d'interpolation au moyen d'une fonction entière homogène de $\sin x$ et $\cos x$. Formules inverses de décomposition et application au Calcul intégral.

D'Ocagne (*M.*). — Note sur la symédiane. (360-367).

Nombreuses conséquences des propriétés du point de Lemoine et des points conjugués isogonaux et isotomiques dans un triangle. *Voir,* du même auteur, une Note précédente sur le même sujet (3e série, t. II, p. 463).

Realis (*S.*). — Scolies pour un théorème de Fermat. (367-372).

Le théorème en question est le suivant :

« Si le nombre p, compris dans la forme linéaire $4q+1$, est premier, ou composé de facteurs premiers de cette forme, p est la somme de deux carrés. »

Mirman (*L.*). — Sur la cissoïde de Dioclès. (372-374).

Démonstration géométrique de l'un des modes de génération de cette courbe.

Correspondance. — *M. d'Ocagne :* Au sujet des transformations axiales, et remarque sur les racines imaginaires des équations. — *S. Realis :* Envoi d'énoncés sur des questions d'arithmologie. (374-378).

Fauquembergue. — Solution de la question 1451. (379-380).

Sur une équation indéterminée.

Goffart (*N.*). — Solution de la question 1504. (380-381).

Propriété d'un triangle rectangle inscrit dans une hyperbole équilatère.

Juhel-Rénoy. — Solution de la question 1506. (381-382).

Sur deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1507. (382-383).

Intersection d'une hyperbole équilatère et d'un cercle.

Richard (*J.*). — Solution de la question 1512. (384).

Enveloppe d'une parabole dont le foyer et un point de la directrice sont fixes.

Lez. — Solution de la question 1514. (385-386).

Propriété d'un triangle et d'un tétraèdre.

Barisien (*E.*). — Solution de la question 1520. (386-388).

Propriété du triangle.

Leboulleux. — Solution de la question 1521. (389-390).

Propriété du triangle. La solution est suivie d'une Note fort intéressante de M. Gerono.

Questions proposées. — 1532 à 1544. (391-392).

Legoux (*A.*). — Sur une nouvelle propriété d'un système triple de surfaces quartiques homofocales, comprenant comme cas particulier la surface des ondes. (393-408).

L'auteur considère les surfaces représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{r^2+\rho-a^2}+\frac{y^2}{r^2+\rho-b^2}+\frac{z^2}{r^2+\rho-c^2}=1,$$

avec $r^2=x^2+y^2+z^2$, et ρ étant un paramètre variable. Il montre que le système triple de ces surfaces se prête à l'étude des courbes tracées sur une surface d'onde ordinaire. Son Mémoire présente les divisions suivantes : Formules relatives aux courbes tracées sur une surface ρ_2. — Équation différentielle des lignes de courbure d'une surface d'onde. — Équation différentielle des lignes asymptotiques. — Rayon de courbure d'une section normale. — Généralisation des résultats précédents.

Pomey (*J.-B.*). — De la partition des nombres. (408-417).

Démonstration d'un certain nombre de propositions relatives à ce problème fameux, et exemples à l'appui.

Cesaro (*E.*). — Généralisation de l'identité de MM. Tchebychef et de Polignac. (418-422).

Cet article se rapporte à des formules sur les nombres premiers, et conduit l'auteur à des conséquences extrêmement curieuses et originales, comme celle-ci :

« Il y a environ douze à parier contre un qu'un nombre entier, pris au hasard, n'admet pas de diviseurs bicarrés, autres que l'unité. »

Barisien (*E.*). — Solution de la composition mathématique pour l'admission à l'École Centrale en 1883; première session. (422-426).

Problème relatif à un système de paraboles.

Fauquembergue. — Solutions de questions proposées par M. Realis. (427-429).

Sur des équations n'admettant pas de racines entières.

Realis (*S.*). — Solution des mêmes questions. (429-431).

Démonstration, s'appuyant sur un certain nombre de propositions d'Euler, concernant les formes biquadratiques.

Gerono, rédacteur. — Note sur les solutions, en nombres entiers, de l'équation $\frac{x^3+2}{5^2}=y$, où l'on suppose x impair. (431-432).

La solution est $x = 47 + 50t$.

Droz. — Solution de la question 1456. (432-433).

Propriété d'une conique et d'un triangle.

Un Anonyme. — Solution de la question 4461. (434-435).

Propriété de deux hyperboles équilatères.

Bibliographie. — Théorie et application des sections homothétiques de deux quadriques, par M. *Ernest Lebon;* gr. in-8°, 1884. (436).

Publications récentes. — (436-440).

Question proposée. — 1543. (440).

Peticol. — Loi de probabilité des écarts. (441-448).

L'auteur prend pour point de départ l'expérience consistant à jeter en l'air m pièces de monnaie, m étant pair; n pièces tombant pile et $m-n$ face.

l'expérience présente l'écart $\frac{m}{2} - n$. Il calcule, en partant de là, les probabilités d'un écart quelconque, puis l'écart moyen. Enfin, il étend cette théorie à d'autres expériences, et notamment au tir des pièces d'artillerie.

Questions proposées par M. E. Cesaro. (448-454, 556-565).

Soixante-sept énoncés portant sur diverses questions de Géométrie ou d'Analyse, et notamment sur des questions de probabilités.

Moret-Blanc. — Solution de la composition mathématique pour l'admission à l'École Centrale; seconde session, octobre 1883. (454-460).

Lieu géométrique dans un plan.

Juhel-Rénoy. — Théorèmes sur l'ellipse et l'hyperbole équilatère. (460-463).

Propriétés de la directrice, de deux diamètres conjugués, d'un triangle rectangle inscrit.

Concours d'admission a l'École Centrale en 1885; première session. — Énoncés des compositions : Géométrie analytique, Épure, Triangle, Physique, Chimie. (463-466).

Correspondance. — *G. Mittag-Leffler :* Lettre concernant un Concours pour un prix à décerner en 1889, sur l'initiative du roi de Suède. — *A. Mathieu :* Sur les points conjugués isogonaux dans le triangle. (466-472).

M... (Louis). — Solution de la question 1449. (473).

Sur la somme des restes du nombre entier n divisé par chacun des nombres qui le précèdent.

Pisani (F.). — Solution de la question 1509. (474-476).

Propriété du triangle.

Barisien (E.). — Solution de la question 1515. (476-479).

Propriété de deux normales à une ellipse.

Drouot (G.) et *Bayard (H.).* — Solution de la question 1516 (480-481).

Propriété d'une normale à l'ellipse.

Geneix-Martin (*A.*). — Solution de la question 1524. (481-483).

Propriété du tétraèdre.

Romero (*J.*). — Solution de la question 1533. (483-484).

$3^{2n+3} + 40n - 27$ est divisible par 64.

Russo (*G.*). — Solution de la question 1536. (484-485).

Propriété de la parabole.

Un Anonyme. — Solution de la question 1538. (485-487).

Aire du triangle formé par les centres des trois cercles exinscrits à un triangle.

Questions proposées. — 1546 à 1553. (487-488).

Pomey (*J.-B.*). — Propriétés élémentaires des faisceaux en involution et leur application à quelques problèmes relatifs aux courbes du second et du troisième degré. (489-498).

L'auteur définit l'involution au moyen des deux droites $y = mx$, $y = m'x$, avec la condition $Amm' + B(m + m') + C = 0$. Il en déduit d'assez nombreuses conséquences concernant les coniques et les courbes du troisième degré.

Juhel-Rénoy. — Solution analytique de la composition mathématique pour l'admission à l'École Polytechnique en 1885. (498-502).

Propriétés d'une circonférence variable, passant par les deux foyers d'une ellipse fixe.

Barisien (*E.*). — Solution de la composition mathématique pour l'admission à l'École Centrale en 1884; seconde session, octobre. (502-509).

Question relative à un système d'hyperboles.

Correspondance. — *De Saint-Germain* (extrait d'une Lettre) : Sur la construction du centre de courbure d'une ellipse. (510).

Bibliographie. — *J. de la Gournerie :* Traité de Géométrie descriptive, 2e édition; compte rendu par M. *Ernest Lebon*. — *Alf. Colas :* Cours de Géométrie élémentaire; compte rendu

par M. *Désiré André*. — *Henri Genaille* et *Édouard Lucas* : Les appareils à calculs exacts et instantanés. (510-519).

Chrétien (*E.*). — Solution de la question 1362. (519-520).

Problème sur la circonférence.

Catalan. — Solution de la question 1489. (520-524).

Solution d'une équation indéterminée de degré p.

Brocard (*H.*). — Note sur la question 1500. (524-525).

Propriété de l'hyperbole équilatère.

Richard (*J.*). — Solution de la question 1518. (526-528).

Problème sur une courbe plane de poursuite.

Juhel-Rénoy. — Solution de la question 1535. (528-530).

Produit des distances des foyers d'une ellipse à une normale.

Bassani (*H.*). — Solution de la question 1537. (530-531).

Propriété des quatre normales menées d'un point à une ellipse.

Un Anonyme. — Solution de la question 1543. (532-533).

Problème relatif à l'hyperbole équilatère.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1544. (533-535).

Problème relatif à la parabole.

Questions proposées. — 1554 à 1060. (535-536).

Brisse (*Ch.*), rédacteur. — Démonstration directe d'une identité. (537).

Cette identité est extraite de l'*Algèbre* de M. de Longchamps.

Barbarin. — Note sur l'herpolhodie. (538-556).

Quand un corps libre tourne autour d'un point fixe, son ellipsoïde d'inertie demeure tangent à un plan invariable. Le point de contact décrit sur l'ellipsoïde une courbe appelée *polhodie* et trace sur le plan fixe une autre courbe, l'*herpolhodie*, que M. Barbarin se propose d'étudier. Son travail présente les divisions suivantes :

Équation de l'herpolhodie. — Discussion et forme de la courbe. — Mouvement sur l'herpolhodie.

Le grand avantage de cette consciencieuse étude est de rendre plus claires, à l'aide de l'herpolhodie, les circonstances du mouvement de rotation.

BIBLIOGRAPHIE. — *H. Resal :* Traité élémentaire de Mécanique céleste, 2e édition; 1884, in-4°, 460 p.; extrait de la Préface. — *J. Moutier :* La Thermodynamique et ses principales applications; 1885, in-8°, 568 p.; extrait de la Préface. — *E. Prudost :* Leçons de Géométrie analytique; 1885, gr. in-8°, 352 p. — *G. de Longchamps :* Cours de Mathématiques spéciales : IIe Partie, Géométrie analytique à deux dimensions, et IIIe Partie, Géométrie analytique à trois dimensions, 1885; in-8°, 396 et 410 p. — *G. de Longchamps :* Cours de Mathématiques spéciales, Ire Partie, Supplément; 1885, in-8°, 173 p. — *Ch. Vacquant :* Cours de Trigonométrie; 1886, in-8°, 400 p. (565-573). A. L.

REVUE D'ARTILLERIE [1].

Tome XXIII; octobre 1883-mars 1884.

Duguet. — Résistance des corps solides. (21-41, 115-130, 318-335, 498-516, 50 fig.).

Les Chapitres du Mémoire se rapportent maintenant aux applications.

CHAP. VI. *Compression. Traction. Flexion.* — Limite d'élasticité apparente de compression. Compression symétrique des corps de révolution. Ressort Belleville. Traction. Déformation des prismes. Déformation des corps fibreux et cristallins. Compression dissymétrique des barres longues.

CHAP. VII. *Déformation et résistance des cylindres creux.* — Petites déformations élastiques. Forces principales. Frettage. Nouvelle forme des équations d'équilibre. Forces tangentielles maxima. Limite d'élasticité ou résistance élastique des tubes.

Perrin (M.). — Note sur le tir au-dessus de l'horizon. (131-136, 2 fig.).

Dans une précédente livraison de la *Revue d'Artillerie,* M. Perrin a montré que, lorsque le but est suffisamment élevé au-dessus du niveau de la pièce, il

[1] Voir *Bulletin*, VIII$_2$, 79.

est des cas où, pour l'atteindre, il faut employer une hausse inférieure à celle qui correspond à sa distance réelle.

L'auteur du présent travail était arrivé déjà, d'une autre manière, à la même conclusion. Il fait connaître la forme comparative des *courbes neutres* (*Bulletin*, VII_2, p. 87-88) correspondant à six principaux types de bouches à feu.

Un Anonyme. — Calcul des vitesses initiales et des pressions dans les canons ayant des longueurs d'âme variables. (137-152, 1 fig., 1 pl.).

Extrait des *Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie und Genie Wesens*, donnant les formules et tableaux de constantes numériques en usage dans les aciéries de Krupp.

Percin. — Sur la précision que procure dans le réglage du tir l'observation de la grandeur des écarts. (189-195).

Discussion du degré de précision que comporterait cette observation.

Laurent (*P.*). — Des freins hydrauliques à résistance constante et à matelas d'air. (207-231, 1 fig.).

La question des freins sans matelas d'air a déjà été traitée dans plusieurs articles de cette *Revue* et en particulier par M. G. Canet (*Bulletin*, VIII_2, p. 80).

L'auteur de ce nouveau Mémoire s'est appuyé sur les mêmes principes, en introduisant dans la question deux nouveaux facteurs, le matelas d'air qui existe dans beaucoup de pompes d'affût, et la solubilité de l'air dans le liquide contenu dans ces dernières.

Uchard. — Effets du recul dans les affûts de campagne. (281-294, 1 fig.).

Cette Note a pour objet de préciser un extrait antérieur publié dans le même Volume, d'après un article anglais, et de rectifier une assertion erronée qu'il renferme.

Tome XXIV; avril-septembre 1884.

Duguet. — Résistance des corps solides. (138-151, 326-344, 517-545, 24 fig.).

Voici la subdivision des paragraphes développés dans le présent Volume :

Considérations générales sur les solides d'égale résistance. Cylindre d'égale résistance. Calcul de la résistance élastique d'un cylindre composé d'un nombre donné de frettes et des éléments de la construction. Déformations permanentes. Développement des forces élastiques. Résistance élastique d'un tube primitivement déformé. Résistance d'un tube soumis à une dilatation croissante. Équilibre et résistance élastique de la sphère creuse. Fonds sphériques des chau-

dières. Formules relatives aux enveloppes de faible épaisseur. Fonds de cylindres épais. Culasses. Cylindres ouverts. Grandes déformations longitudinales des cylindres. Rupture et cassures des cylindres.

Putz (*H.*). — Mémoire sur l'application du Calcul des probabilités aux questions d'Artillerie. (5-30, 105-122, 2 fig.).

Le but de ce Mémoire est d'indiquer une marche à suivre, certaine pour éviter, dans les applications du Calcul des probabilités aux questions d'artillerie, une faute de principe, que l'on commet habituellement, et dont les conséquences erronées ont été signalées par M. Siacci (*Bulletin*, VIII_2, p. 81). Dans la théorie généralement enseignée, on commet, suivant l'auteur, une double faute, parce que l'on calcule les écarts probables sans se préoccuper de la direction des axes des coordonnées, et parce que l'on considère à tort les écarts probables ainsi calculés comme absolument indépendants.

Dans le tir de l'artillerie, deux problèmes principaux se présentent : la détermination d'un point dans un plan, ou celle d'un point dans l'espace. La probabilité des écarts est alors figurée par une ellipse ou par un ellipsoïde des écarts probables, dont les axes peuvent s'appeler *axes des écarts probables*. Cette conique et cette quadrique doivent être considérées comme donnant en quelque sorte la mesure de la précision du résultat.

Ce Mémoire est terminé par une importante remarque critique sur l'influence du nombre des observations. Contrairement à une assertion, non prouvée d'ailleurs, de Poisson (*Mémorial de l'Artillerie*, 1830) dix ou douze observations ne donneraient qu'une approximation d'environ le septième de leurs valeurs moyennes aux axes de l'ellipse ou de l'ellipsoïde des écarts, et il en faudrait vingt à vingt-cinq pour que l'approximation s'élevât au dixième. Il y a là, pour la conduite des expériences, une indication précieuse à suivre.

L'auteur fait observer que les conclusions auxquelles il est arrivé pourraient certainement se déduire des formules d'un Mémoire publié par Bravais (1846), mais la marche suivie dans ce nouveau travail est bien différente.

Hojel (*W.-C.*). — Expériences de Balistique exécutées en Hollande. (262-270).

Traduction et compte rendu, par M. Chapel, des résultats publiés par M. Hojel et de leur appréciation par M. Siacci.

Les premières idées sur la résistance de l'air peuvent être attribuées à Newton qui regarda la résistance comme proportionnelle au carré de la vitesse. On trouva, plus tard, que la résistance croissait plus rapidement pour les grandes vitesses (Robins, Hutton) et semblait varier à peu près comme le cube de la vitesse (Welter, Hélie, Bashforth). On reconnut aussi que, dans le voisinage de la vitesse du son, la résistance croît beaucoup plus rapidement (Mayewski) pour redevenir, peu au delà, proportionnelle au cube, puis, un peu plus loin encore (à partir de 500^m), au carré de la vitesse, et même moins rapidement que le carré, pour des vitesses variant de 600^m à 1000^m par seconde, vitesse que l'on a réussi à atteindre et à dépasser même au polygone de Meppen. De là bien des hypothèses et des formules présentées par les balisticiens pour la théorie du mouvement des projectiles dans l'air. Nous avons eu déjà l'occasion de signaler plusieurs de ces formules, mais il ne nous semble pas utile, pour

le moment, d'indiquer d'autres expressions plus approchées, parce qu'elles revêtent toujours un certain empirisme et que, suivant l'habileté mathématique de leur inventeur, elles se prêtent plus ou moins aisément aux transformations qu'elles doivent subir, notamment pour les besoins de l'intégration.

Putz (*H.*). — Note sur les imperfections inévitables des projectiles et leur influence sur la justesse du tir. (293-305, 3 fig.).

Projectiles forcés. Influence de l'excentricité du centre de gravité. Influence de l'angle d'écart d'un des axes principaux d'inertie avec l'axe de figure.

Projectiles non forcés. Influence de l'excentricité et du vent des ailettes. Influence de l'angle d'écart et du vent des ailettes.

Siacci (*F.*). et *Schols* (*C.-M.*). — Note sur les axes des groupements. (445-452).

A propos de l'article de M. Siacci (*Bulletin*, VIII_3, p. 81), M. Schols fait observer que le théorème énoncé appartient à Bravais (*Mém. de l'Inst. de France*, t. IX; 1846) mais il en attaque les démonstrations données, comme fondées sur une hypothèse inadmissible *a priori*. M. Siacci maintient que ce théorème a son importance, car il n'est pas mentionné dans les Ouvrages de Didion, Hélie, Jouffret, Ollera, Breger, etc.

Le débat scientifique se termine néanmoins à la satisfaction des deux partis.

La rédaction de la *Revue* a profité de la circonstance pour reproduire les résultats de l'application de la formule de M. Siacci, par le général Mayewski, au tir des projectiles oblongs. Ces résultats tendent à prouver que les axes des groupements peuvent être considérés comme étant l'un horizontal, l'autre vertical.

Tome XXV; octobre 1884-mars 1885.

Duguet. — Résistance des corps solides. (146-161, 398-422, 11 fig.).

Chap. VIII. *Considérations sur le travail mécanique, l'emploi et la réception des métaux*. — Métallurgie physique. Procédés mécaniques. Marche du laminoir. Poinçonnage. Des grandes déformations. Travail des outils.

Tome XXVI; avril-septembre 1885.

Duguet. — Résistance des corps solides. (22-49, 9 fig.).

Étirage. Pièces de grande résistance. Essais mécaniques.

Cet article est le dernier de ce que l'auteur appelle la *Partie statique*.

Roblin (*R.*). — Note sur un procédé de repérage en direction. (133-146, 7 fig.).

Emploi d'un appareil d'une construction simple et d'un usage commode, fondé sur l'adoption d'un petit miroir, d'une réglette, d'une fiche et d'un cordeau.

Laurent (*P.*). — Théorie de l'équilibre élastique des surfaces coniques. (147-163, 359-382, 562-583, 9 fig.).

La théorie de l'équilibre élastique des surfaces coniques est nécessaire pour l'étude de la résistance de la volée des canons.

La théorie de la résistance des cylindres simples ou frettés a été exposée par les généraux Virgile et Gadolin, mais celle des surfaces coniques a été ramenée, inexactement, à l'étude de cylindres de hauteur infiniment petite. Il y a donc intérêt à la reprendre sur de nouvelles bases.

Ce Mémoire est divisé en trois Parties. La première comprend le rappel des formules de l'équilibre élastique de Lamé (avec application au tétraèdre); la deuxième traite de l'équilibre élastique du cône (tronc de cône, enveloppe conique à génératrices non parallèles, enveloppe cylindro-conique; relations entre les forces élastiques dans la volée d'un canon); la troisième est consacrée à l'étude du cône composé, c'est-à-dire des enveloppes coniques frettées l'une sur l'autre.

Vallier (*E.*). — Étude sur les lois de la résistance de l'air. (226-235, 324-347).

Cette étude est divisée en deux parties principales : la première a pour objet la recherche de la loi de résistance, par la discussion des expériences les plus récentes en Allemagne; la deuxième est consacrée à l'établissement des formules balistiques et des expressions analytiques des éléments de la trajectoire (ordonnée, vitesse, etc.) et profitant des simplifications que permet de réaliser l'emploi des fonctions hyperboliques et du logarithme intégral.

En terminant, on a signalé l'utilité qu'il y aurait à exécuter quelques tirs aux vitesses pour résoudre certaines questions sur la résistance de l'air restant encore douteuses aujourd'hui (entre autres, la loi de résistance pour des vitesses égales ou inférieures à la vitesse du son).

Siacci (*F.*). — Sur l'établissement des Tables du tir vertical. (431-445).

Traduit de la *Rivista di Artigliera e Genio* et résumé des considérations dont le savant professeur de l'école de Turin fait précéder cette nouvelle forme donnée aux Tables d'Otto.

Ces Tables donnent, pour un angle de projection φ variant de 30° à 75° par intervalles de 5°, la vitesse initiale V, la portée X, la flèche Y de la trajectoire, ainsi que d'autres éléments du tir, en particulier la réduction ΔX de la portée, due à une variation ΔV de la vitesse initiale ou à une variation $\Delta\delta$ du poids spécifique de l'air. ω étant l'angle de chute, M. Siacci a établi les relations

$$\frac{\Delta X'.\delta}{X.\Delta\delta} = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta X''.V}{X.\Delta V} - 1, \qquad \frac{\Delta X''.V}{X.\Delta V} = 2\,\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\omega},$$

$\Delta X'$ et $\Delta X''$ correspondant respectivement à $\Delta\delta$ et ΔV. La première de ces for-

mules est rigoureuse; la seconde suppose les abaissements verticaux au-dessous de la ligne de projection inversement proportionnels aux carrés des vitesses initiales.

Pouchelon (*F.*). — Tables balistiques. (467-476).

Ces Tables ont été dressées d'après les formules de M. Siacci. Elles ont été calculées à partir d'une vitesse initiale de 700^m, vitesse à laquelle les lois du général Mayewski peuvent s'appliquer. Elles diffèrent encore des Tables publiées précédemment par la *Revue,* en ce qu'elles donnent les valeurs de la fonction $T(v)$ qui sert au calcul de la durée du trajet t.

Les vitesses initiales variaient de 700^m à 138^m par intervalles de 2^m. Quant aux formules fondamentales adoptées, ce sont celles du Mémoire publié au t. XVII, p. 45 (*Bulletin,* V_2, p. 232-233).

Tome XXVII; octobre 1885-mars 1886.

Sigaut et *Maurice*. — Étude sur le tir à la mer dans les batteries basses. (27-45, 135-145, 4 fig., 3 pl.).

Description d'un nouvel appareil destiné à transmettre le mouvement d'une alidade à une aiguille installée dans une autre station, et qui, par son recoupement avec une autre alidade, vient indiquer immédiatement sur une planchette la distance à laquelle doit se trouver le but à atteindre.

Perrin (*M.*). — Note complémentaire sur le tir au-dessus de l'horizon. (118-124, 1 fig.).

La *courbe neutre* (*voir* les précédents travaux à ce sujet) peut être tracée par un point en partant de la relation

$$\operatorname{tang}\alpha = \sin\varepsilon - \operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2},$$

α étant l'angle de tir, et ε l'angle de site du but. Mais, quand ε varie de 0° à 90°, α passe par un maximum 16°42′ correspondant à $\varepsilon = 51°50'$. Ainsi, pour toute valeur de α supérieure à 16°42′, la circonférence ayant la portée pour rayon ne rencontre plus la courbe neutre. Pour toute valeur de α inférieure à 16°42′, il y a toujours trois points, situés à la même distance de la pièce, pour lesquels la hausse à employer est la même. Entre ces trois points, la hausse subit des variations et passe par un maximum et par un minimum; ce nouvel article a pour objet la détermination de ce maximum et de ce minimum en position et en grandeur.

Braccialini. — Tables et formules pour les problèmes du tir courbe. (237-247).

Extrait de la *Rivista*. Dans les quatre premières Tables, le calcul du coefficient balistique a été fait implicitement; les trois autres, où figure le coefficient balistique, peuvent servir à déterminer ce dernier.

Viant. — Influence de la constitution des projectiles sur les effets qu'ils peuvent produire dans diverses circonstances de guerre. (211-226, 297-314, 7 fig.).

Siacci (*F.*). — Un procédé d'intégration des formules balistiques. (315-322).

Ce procédé revient à une méthode peu différente de celle qui a été déjà employée par le général Didion, adoptée dans presque tous les Traités de Balistique. La méthode consiste à remplacer la fonction-résistance $F(v)$ par $\frac{F(\alpha v \cos\theta)}{\alpha \cos\theta}$, α étant une constante, tandis que maintenant l'on remplace $F(v)$ par $\beta F\left(\frac{v\cos\theta}{\cos\varphi}\right)\frac{\cos^2\varphi}{\cos\theta}$, β étant une constante. Or les deux quantités α et β ne peuvent être constantes en même temps que dans le cas où la résistance est proportionnelle à une puissance de la vitesse; dans tout autre cas, si β est constante, α est variable et réciproquement. C'est ce point qui constitue la différence des deux méthodes.

Laurent (*P.*). — De la déformation de l'âme des canons dans le voisinage de l'obturateur et du déculassement. (530-550, 4 fig.).

La résistance des bouches à feu au déculassement, considérée pendant longtemps comme une question de peu d'importance relativement à celle de la résistance transversale, a pris dans les préoccupations des artilleurs la place qu'elle mérite réellement.

L'analyse appliquée à l'étude de cette question n'a fourni que des résultats encore bien incomplets. Cela tient, sans aucun doute, à la difficulté que l'on rencontre dans l'emploi des formules de Lamé, et surtout dans l'intégration des équations différentielles données par lui.

Déjà, dans un Mémoire tout récent (*voir* plus haut), M. Laurent a donné deux intégrales particulières dans le cas d'un corps de révolution. Lorsqu'on examine attentivement ces intégrales particulières, et les valeurs des composantes des forces élastiques en un point quelconque d'un solide, on est frappé de ce fait, que certaines composantes, telles que le glissement longitudinal, ne sont fonctions que du rayon. Cela tient à ce que les intégrales des déplacements contiennent des constantes arbitraires. Il est donc possible de trouver des intégrales plus générales remplissant mieux les conditions dans lesquelles se trouve le corps considéré, et ce sont celles-ci qui ont permis à l'auteur de traiter les questions abordées dans ce Mémoire.

Une première Partie est consacrée à l'établissement des nouvelles formules; une deuxième traite de la question de la déformation de l'âme dans le voisinage de l'obturateur.

Un article ultérieur renfermera la troisième et dernière Partie.

H. B.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von L. KRONECKER und K. WEIERSTRASS.

Tome XCV; 1883.

Hauck (*Guido*). — Nouvelles constructions de la perspective et de la photogrammétrie (Théorie de la correspondance trilinéaire de systèmes plans, article Ier). (1-35).

La correspondance trilinéaire entre trois formes géométriques de première espèce s'établit par une équation linéaire par rapport à chacune des trois variables qui définissent la position des éléments variables dans les trois formes fondamentales; deux de ces éléments correspondants déterminent donc le troisième. Cette correspondance a été étudiée par MM. Rosanes, Schubert et Benno Klein dans des Mémoires antérieurs (voir *Bulletin*, (2), V_2, p. 107; VII_2, p. 237). M. Hauck, Professeur de Géométrie descriptive à l'École Polytechnique de Berlin, a été porté, par ses occupations géométriques, à rechercher les relations de la correspondance trilinéaire non seulement dans les formes de première espèce, mais encore dans celles de la deuxième espèce. Or, les trois paires de variables (xy), $(x'y')$, $(x''y'')$, qui expriment les coordonnées de trois éléments correspondants des trois systèmes plans, peuvent être liées par deux équations ou par trois; ces deux cas de correspondances pourraient donc être désignés comme de quatrième et de troisième espèce, parce que deux équations admettent une variété quadruplement infinie, tandis que trois fournissent une variété triplement infinie. D'ailleurs, selon la diversité des formes fondamentales de deuxième espèce, il faut distinguer la correspondance trilinéaire : 1° didesmique (*zweibündig*), 2° tridesmique (*dreibündig*) de systèmes plans ponctuels, 3° didesmique, 4° tridesmique de systèmes plans réglés. — En supposant encore que les points et les droites se correspondent en même temps dans les trois systèmes plans, les quatre possibilités se réduisent à deux, à savoir les cas 1 et 4 ou 2 et 3 se combinent ensemble.

L'application de trois plans fixes de projection où se projettent de trois centres fixes les points, droites et plans de l'espace, engendre les mêmes quatre sortes de correspondance; on obtient : 1° trois systèmes ponctuels tridesmico-trilinéaires par l'ensemble des projections de points, 2° trois systèmes réglés didesmico-trilinéaires par l'ensemble des projections de droites, 3° trois systèmes ponctuels didesmico-trilinéaires par l'ensemble des traces de droites, 4° trois systèmes réglés tridesmico-trilinéaires par l'ensemble des traces de plans. Cependant, les systèmes 3 et 4 ne représentent pas le cas le plus général de la correspondance respective. Cette manière d'envisager l'objet fait voir l'intérêt théorique et pratique de la question : les procédés qui en résultent font suite aux méthodes inaugurées par la Géométrie descriptive de Monge.

La publication ne comprend que le premier article des recherches de M. Hauck; il se borne à la construction fondamentale et ses applications à quelques exemples empruntés à la pratique. Ce problème fondamental de la Géométrie descriptive s'énonce comme il suit : étant données deux projections d'une figure de l'espace, en construire une troisième projection quelconque; ou bien en deux cas d'importance remarquable : 1° étant données deux projec-

tions orthogonales, chercher une projection centrale (problème de la perspective), 2° étant données deux projections centrales, chercher une projection orthogonale (problème de la photogrammétrie). Ces problèmes se trouvent résolus, en toute généralité, dans le Mémoire que nous analysons, et M. Hauck a déjà fait l'épreuve de ses nouvelles constructions : en les enseignant dans son cours de l'École Polytechnique et en observant les progrès de ses élèves dans les salles à construction, il s'est convaincu que la méthode est propre à servir aux besoins de la technique. De plus, il a achevé la construction d'un appareil mécanique destiné à résoudre le problème en question par une voie purement mécanique : si deux pointes de l'appareil glissent sur deux lignes correspondantes des deux projections données, une troisième pointe (celle du crayon dessinateur) dessine la ligne correspondante de la troisième projection cherchée. Cet appareil a été décrit et photographié dans la *Festschrift* publiée à l'occasion de l'inauguration du nouveau palais de l'École Polytechnique. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur aux Mémoires originaux.

§ 1. Exposition. Généralités sur la correspondance trilinéaire. Perspective technique et photogrammétrie. — § 2. Théorème fondamental sur la relation entre deux projections d'une même figure de l'espace. — § 3. La construction fondamentale de la correspondance projectivo-trilinéaire de systèmes plans. — § 4. Exemple I. Perspective centrale trouvée à l'aide de deux projections verticales (vues de front et de côté). — § 5. Remarques sur l'exemple I. — § 6. Exemple II. — Perspective centrale trouvée à l'aide des projections horizontale et verticale. — § 7. Remarques sur le problème combiné I et II. — § 8. Exemple III. Projection verticale trouvée à l'aide de deux perspectives (Lever photogrammétrique d'architecture). — § 9. Exemple IV. Projection horizontale trouvée à l'aide de deux perspectives (Lever photogrammétrique de terrain). — § 10. Remarques sur la pratique photogrammétrique. — § 11. Remarques ultérieures sur les exemples III et IV. — § 12. Exemple V. Lever photogrammétrique de terrain à chambre inclinée.

Caspary (*F.*). — Sur quelques identités entre des déterminants qui se présentent dans la théorie des triangles perspectifs. (36-43).

Étude de ces déterminants envisagés comme produits extérieurs suivant la définition de Grassmann.

Thomé (*L.-W.*). — Sur la théorie des équations différentielles linéaires. (44-98).

Ce Mémoire termine la série des publications de M. Thomé sur le sujet dont il s'est occupé depuis plus de dix ans, ou plus exactement sur la question qu'il a posée au tome LXXXIII; il achève maintenant d'effectuer l'intégration des équations différentielles homogènes et linéaires dans lesquelles l'expression différentielle peut être représentée par un système d'expressions différentielles normales. L'intégration de ces équations différentielles part de la représentation des intégrales dans le voisinage des points singuliers. Cette représentation revient à exprimer une fonction à intégrer, au moyen d'une intégrale définie

qui contient la même fonction. Soit

$$(1)\qquad \int (x-a)^r \psi(x-a)[\log(x-a)]^n\, dx$$

la fonction intégrale à représenter, où ψ possède un développement de la forme $\sum_0^\infty c_\mathfrak{a}(x-a)_\mathfrak{a} + \sum_{-1}^{-\infty} c_\mathfrak{a}(x-a)_\mathfrak{a}$. Désignons par $\int_1'$ l'intégration étendue sur le contour d'un cercle décrit autour de l'origine comme centre avec le rayon un.

1° Soit r non entier; alors si $\mathfrak{a}$ est entier, on a

$$(2)\qquad \frac{1}{e^{2\pi i r}-1}\int_1' \alpha^{r+\mathfrak{a}}\, d\alpha = \frac{1}{r+\mathfrak{a}+1}.$$

Posons

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_1' \frac{d\alpha_1}{e^{2\pi i r}-1}\,\alpha_1^r\,\psi[(x-a)\alpha_1] = U_1(x-a),\\ \displaystyle\int_1' \frac{d\alpha_2}{e^{2\pi i r}-1}\,\alpha_2^r\, U_1[(x-a)\alpha_2] = U_2(x-a),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

cela étant, il résulte pour (1),

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} (x-a)^{r+1}\{U_1(x-a)[\log(x-a)]^n\\ \qquad - nU_2(x-a)[\log(x-a)]^{n-1} + \dots\\ \qquad + (-1)^n n(n-1)\dots 1\, U_{n+1}(x-a)\}. \end{array}\right.$$

2° Soit r entier et posons $(x-a)^r\psi(x-a) = \Psi(x-a)$. Pour $\mathfrak{a}$ entier et positif, on a

$$(5)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_1' \left(\frac{\log\beta}{2\pi i}\right)^\mathfrak{a}\frac{d\beta}{\beta} = \frac{1}{\mathfrak{a}+1}.$$

Posons

$$(6)\quad \varphi(x-a) = \int_1' \frac{d\lambda R''}{2\pi i}\,\frac{(R''\lambda)^{-1}}{1-(x-a)(R''\lambda)^{-1}}\,\Psi(R''\lambda),\ \mathrm{mod}\,(x-a)R''^{-1} > 1,$$

$$(7)\quad \chi[(x-a)^{-1}] = \int_1' \frac{d\lambda R'}{2\pi i}\,\frac{R'\lambda}{1-(x-a)^{-1}R'\lambda}\,\Psi(R'\lambda),\ \mathrm{mod}\,[(x-a)^{-1}]R' < 1.$$

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_1' \frac{d\beta_1}{2\pi i\beta_1}\,\varphi\left[(x-a)\frac{\log\beta_1}{2\pi i}\right] = V_1(x-a),\\ \displaystyle\int_1' \frac{d\beta_2}{2\pi i\beta_2}\,V_1\left[(x-a)\frac{\log\beta_2}{2\pi i}\right] = V_2(x-a),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_1' \frac{d\beta_1}{2\pi i\beta_1}\,\chi\left[(x-a)^{-1}\frac{\log\beta_1}{2\pi i}\right] = -W_1[(x-a)^{-1}],\\ \displaystyle\int_1' \frac{d\beta_2}{2\pi i\beta_2}\,W_1\left[(x-a)^{-1}\frac{\log\beta_2}{2\pi i}\right] = -W_2[(x-a)^{-1}],\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Cela étant, il résulte pour (1)

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{n+1}\int_1^{\prime}\frac{d\lambda R}{2\pi i}\Psi(R\lambda)[\log(x-a)]^{n+1}\\ &+\{(x-a)V_1(x-a)\\ &\qquad+(x-a)^{-1}W_1[(x-a)^{-1}]\}[\log(x-a)]^n-\ldots\\ &+(-1)^n n(n-1)\ldots 1\{(x-a)V_{n+1}(x-a)\\ &\qquad\qquad+(x-a)^{-1}W_{n+1}[(x-a)^{-1}]\}. \end{aligned}\right.$$

En appliquant successivement les formules (4) et (10), on établit l'expression des intégrales.

Cette expression en fournit les développements, et l'on en tire les expressions des constantes en décrivant un circuit autour du point singulier ou en procédant à un autre point singulier. Puis le Mémoire représente en entier l'intégration des équations différentielles considérées. En particulier, l'auteur entre dans une étude approfondie des problèmes algébriques que présentent ces équations différentielles. Les opérations qu'il faut employer pour effectuer l'intégration demandée dépendent de la résolution d'équations algébriques dont les coefficients sont liés par des relations algébriques avec les constantes dans les coefficients rationnels des équations différentielles. Si ces constantes sont des nombres algébriques, toutes les opérations demandées peuvent être effectuées.

Valyi (*J.*). — Sur l'intégration d'équations simultanées aux différentielles partielles de deuxième ordre à deux variables indépendantes. (99-101).

Stern. — Une proposition combinatoire. (102-104).

Si l'on forme les variations des éléments 1, 2, ..., m, le nombre des variations de toutes les classes ayant chacune la somme n et formées des deux éléments 1 et m (avec répétition illimitée) est égal au nombre des variations de toutes les classes ayant chacune la somme $n+m$ et formées de tous les éléments qui ne sont pas inférieurs à m.

Schoute (*P.-H.*). — Les polygones steinériens. (105-119).

Dénotons un polygone de $2n$ côtés inscrit à une courbe C_3 de troisième ordre par le nom de *polygone steinérien,* si ses côtés passent alternativement par l'un des deux points fixes P et Q de la courbe (théorème I de Steiner); il n'y a que deux cas qui puissent se présenter : 1° ou les deux points fixes P et Q, choisis à l'arbitraire, n'admettent pas un seul polygone steinérien de $2n$ côtés; 2° ou il y en a une infinité. Dans ce dernier cas, un point quelconque de la courbe est une fois un sommet d'un tel polygone. — Dénotons un polygone de $2n$ côtés inscrit à une courbe C_4 de quatrième ordre, douée de deux points doubles P et Q par le nom de *polygone steinérien,* si ses côtés passent alternativement par l'un des deux points doubles P et Q (théorème II de Steiner); il n'y a que deux cas qui puissent se présenter : 1° ou les points doubles P et Q n'admettent pas un seul polygone steinérien de $2n$ côtés, 2° ou il y en a

une infinité. Dans ce dernier cas, un point quelconque de la courbe est une fois un sommet d'un tel polygone.

Ces théorèmes, énoncés sans démonstration par Steiner, ont été démontrés analytiquement par Clebsch, en partie synthétiquement, mais en partie aussi analytiquement par M. Ed. Weyr. M. Schoute donne des preuves extrêmement simples selon les méthodes de Géométrie pure; cependant, dans un second article, il signale un travail de M. Küpper, publié dans les Mémoires de Prague en 1873, où ce géomètre a donné, lui aussi, une démonstration synthétique. Cette démonstration, de même que celle de M. Schoute, revient à la proposition suivante sur une courbe C_3 de troisième ordre. Si C_3 contient huit points d'entre les neuf points de rencontre de deux triples de droites, elle en contient aussi le neuvième. La comparaison des méthodes de raisonnement des deux géomètres et l'amplification de quelques théorèmes de M. Küpper, fait l'objet de la seconde Note.

Hazzidakis (*J.-N.*). — Sur les courbes qui peuvent se déplacer de façon à rester toujours courbes géodésiques des surfaces engendrées par elles. (120-139).

Toutes ces courbes satisfont à l'équation différentielle

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ A & B & C \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} + a\xi + b\eta + c\zeta = 0,$$

où a, b, c, A, B, C désignent des constantes, ξ, η, ζ les cosinus de direction de la normale principale.

M. Hazzidakis distingue les trois cas où la courbe satisfait : 1° à une, 2° à deux, 3° à trois équations différentielles de la forme (1). Il décrit pour chaque cas le mode de déplacement de la courbe et établit l'équation de la surface engendrée en exprimant les coordonnées par deux paramètres arbitraires.

Weiler (*A.*). — Génération simple de quelques complexes du second degré. (140-146).

Dans un article inséré à la *Zeitschrift für Mathematik und Physik* de M. Schlömilch en 1881, M. Weiler a enseigné comment on peut engendrer, par une voie très simple, les complexes de deuxième degré dont les surfaces singulières sont des surfaces réglées. En excluant ces complexes ainsi que le complexe général du deuxième degré qui a été traité par Plücker, F. Klein et Schur, on a encore un reste de dix complexes qui ne se composent pas de faisceaux de congruences linéaires. Ce sont ces dix que M. Weiler fait naître par des procédés synthétiques.

Kantor (*S.*). — Sur une représentation plane unitrivoque (*eindreideutig*) d'une surface de troisième ordre. (147-163).

Soit ABC un triangle conjugué à soi-même par rapport à un triangle A'B'C' envisagé comme courbe de troisième ordre; alors le second triangle A'B'C' est de même conjugué à soi-même par rapport au premier. — A un triangle *abc*

inscrivons un deuxième $a'b'c'$, et à celui-ci un troisième $a''b''c''$, de sorte que $b''c''$, $c''a''$, $a''b''$ passent respectivement par a, b, c : ces trois triangles forment une configuration (A) qui a été déjà étudiée par v. Staudt. Les trois triangles appartiennent à un faisceau de courbes C_3 qui possèdent un triangle inflexional commun tuv par rapport auquel chacun des trois triangles est conjugué à soi-même. Tous les triples conjugués par rapport à tuv s'engendrent, d'une manière très simple, par les courbes du faisceau des C_3. — Une surface qui est représentée sur le système des triples conjugués appartenant à un triangle fixe tuv selon la manière décrite, de telle sorte que ses sections planes correspondent aux courbes Γ_3 pour lesquelles tuv est un triangle inflexional, ne peut être que du troisième ordre, et les trois points de rencontre de la surface S_3 avec une droite quelconque correspondent aux trois triples d'une configuration (A). Voilà en quoi consiste la méthode remarquable pour l'étude géométrique des polygones inscrits et circonscrits à une courbe C_3.

Hermes (*J.*). — Observation sur les substitutions d'équivalence de formes binaires quadratiques. (165-170).

La Note concerne les coefficients de substitution, qui se présentent comme numérateurs et dénominateurs d'une fraction continue.

Königsberger (*L.*). — Propriétés de fonctions irréductibles. (171-196).

L'auteur commence par observer qu'une équation irréductible algébrique définit chacune de ses solutions d'une manière entièrement uniforme parce qu'il n'y en a aucune qui puisse appartenir à une autre équation irréductible de même nature. La théorie des équations différentielles algébriques présente des analogies frappantes. Après en avoir rappelé quelques-unes qui ont été établies dans le Livre *Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen*, 1882 (*Bulletin*, VII_1, 5-14), M. Königsberger discute la question : sous quelles conditions une équation algébrique ou une équation différentielle a-t-elle toutes les solutions communes avec une expression de même nature supposé qu'il en subsiste une commune? Comment peut-on éliminer d'une telle forme toutes les solutions qu'elle a communes avec une forme de même nature et de degré inférieur? Pour les équations algébriques, le procédé de division appliqué aux deux équations données fournit la solution demandée; reste donc à traiter la question pour les équations différentielles. Sans entrer dans le détail des opérations, transcrivons un résultat remarquable. Dans la théorie des équations algébriques, on montre qu'une équation irréductible en y, $f(x, y) = 0$, à coefficients rationnels, se transforme en une équation irréductible de même degré $F(x, Y) = 0$, par l'introduction d'une nouvelle variable Y liée avec y par une relation algébrique sous la seule condition que chacune des variables y et Y puisse s'exprimer rationnellement par l'autre. Voici l'analogue pour les équations différentielles. Supposons qu'une équation différentielle irréductible en y soit transformée en une équation irréductible de même ordre en Y par l'introduction de la nouvelle variable dépendante Y dont la relation avec y soit mise sous la forme d'une équation algébrique entre y avec ses dérivées et Y avec ses dérivées. Alors, il est nécessaire et suffisant que chacune des deux variables dépendantes s'exprime algébriquement

par l'autre et les dérivées de celle-ci. De plus, si l'on demande que l'équation transformée soit du même degré par rapport au quotient différentiel du plus haut degré que l'équation donnée, il faut que les deux équations différentielles à transformer soient linéaires et que chacune des deux variables dépendantes s'exprime algébriquement par l'autre et les dérivées de celle-ci. Un appendice sert à établir une proposition sur la condition d'irrationalité de la somme $a + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \ldots + a_n \alpha^n$, où les a_i sont rationnels, les α_i irrationnels.

Stern. — Irrationalité de séries. (197-200).

Soit, dans la série $\frac{1}{Z^{\alpha_1}} \pm \frac{1}{Z^{\alpha_2}} \pm \frac{1}{Z^{\alpha_3}} + \ldots$ in inf., Z un nombre entier à l'exception de l'unité; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ une série infinie de nombres positifs, telle que chacun de ces nombres soit supérieur à celui qui le précède immédiatement et que d'ailleurs la différence $\alpha_{m+1} - \alpha_m$ augmente indéfiniment avec m croissant indéfiniment; alors la série ne peut avoir nulle valeur rationnelle, quel que soit l'ordre des signes dans les termes de la série. Un second théorème se rapporte à la série plus générale dont les termes ont pour numérateurs les nombres entiers $b_1, b_2, b_3, \ldots$.

Hurwitz (*A.*). — Démonstration du théorème : *Une fonction monotrope d'un nombre quelconque de variables qui peut être représentée partout comme quotient de séries à puissances* (*Potenzreihen*) *est une fonction rationnelle de ses arguments.* (201-206).

Théorème énoncé sans démonstration par M. Weierstrass, t. 89 du même Journal.

Schur (*F.*). — Contribution à la théorie des surfaces de troisième ordre. (207-217).

En désignant par le nom de *surface desmique de quatrième ordre* la surface réciproque à la surface des centres de courbure pour une surface de second ordre, on a le théorème suivant : « La surface caustique d'un système de rayons de deuxième ordre et de sixième classe engendré par les plans tangents correspondants de deux surfaces collinéaires de second degré est une surface desmique de quatrième ordre; les points des deux espaces collinéaires qui se correspondent à eux-mêmes sont les sommets du tétraèdre conjugué commun aux deux surfaces du second degré. D'après une remarque de M. Veronese, les douze nœuds de cette surface forment un système desmique. A chaque triangle de droites situé sur la surface générale de troisième degré appartient une surface desmique de quatrième ordre, lieu des centres des cônes de second ordre qui passent par les trois sections coniques, suivant lesquels la surface est coupée par trois plans quelconques passant par les côtés du triangle. Enfin, l'auteur montre comment on peut trouver l'inverse de ce théorème de Steiner, c'est-à dire construire une surface de troisième ordre qui appartient à une surface desmique donnée de quatrième ordre.

2ud Part.

Kiepert (*L.*). — Sur la théorie de transformation des fonctions elliptiques. Mémoire 3. (218-231).

Suite des recherches publiées t. 87, p. 199-216 [*Bulletin*, (2), IV_2, p. 244], t. 88, p. 205-212 [*Bulletin*, (2), V_2, 106]. — § 1. Développement de $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^n$ suivant les puissances de h^2. — § 2. Définition de l'équation en L. D'autres relations entre les grandeurs $H_x(n)$. — § 3. Application à la transformation de 23e degré. Le dernier paragraphe donne l'équation modulaire pour $n = 23$ sous forme rationnelle. On ne la connaissait jusque-là que sous la forme irrationnelle due à M. Schröter.

Perott (*J.*). — Sur la formation des déterminants irréguliers. (232-236).

Netto (*E.*). — Note sur les équations dont le discriminant est un carré. (237-239).

Rudio (*F.*). — Sur la théorie des surfaces pour lesquelles les lieux des centres de courbure sont des surfaces confocales de second degré. (240-246).

L'auteur a déjà étudié ces surfaces dans sa dissertation de 1880. Le problème de les trouver n'est pas beaucoup différent de celui de déterminer la longueur d'arc d'une ligne géodésique sur une surface de second ordre, et le problème particulier à résoudre n'est donc pas dépourvu d'un intérêt plus général. M. Kummer, qui a engagé l'auteur à entrer dans cette recherche, lui a, en même temps, montré le chemin à suivre : c'est celui qu'il avait pris lui-même dans sa théorie des systèmes de rayons. Considérons le système de rayons de quatrième ordre et de quatrième classe dont les surfaces caustiques se composent de deux surfaces confocales de second degré : il s'agit de déterminer la surface qui a ce système de rayons pour système de normales. Les calculs effectués dans la dissertation étaient encore bien compliqués; maintenant, l'auteur les a simplifiés de beaucoup.

Rosanes. — Sur les systèmes ponctuels dépendants et sur le rapport qu'ils ont à la correspondance réciproque de deux plans (247-255).

En général, cinq couples d'éléments de deux domaines ternaires déterminent un sixième couple formant, avec ceux-là, un système dépendant; cependant, si les cinq points d'un plan correspondent collinéairement aux cinq de l'autre plan, ces cinq couples constituent déjà un système dépendant. De ce cas important de systèmes dépendants, on tire des relations entre des systèmes polaires d'une ou de plusieurs formes bilinéaires et, comme cas spéciaux, quelques théorèmes connus de la théorie des sections coniques; de plus, on gagne ainsi quelques théorèmes sur deux triangles et quadrilatères réciproques. Enfin, on

trouve la solution du problème algébrique : composer trois formes bilinéaires simultanément des mêmes quatre formes spéciales. Cette composition n'est possible que quand un certain invariant (combinant) s'évanouit; encore résulte-t-il que les trois formes se changent tout à la fois en formes symétriques par l'application d'une transformation linéaire à un système de variables.

Krause (*M.*). — Sur la théorie de transformation des fonctions hyperelliptiques de premier ordre. (256-263).

Dans la théorie de transformation des fonctions elliptiques, le problème d'établir, pour un degré quelconque de transformation, des relations entre les modules primitifs et les transformés, est un problème des plus importants. Quoiqu'on n'ait pas encore réussi à développer ces relations sous forme finie pour tous les degrés, il a été pourtant possible d'établir, pour un degré quelconque, une équation différentielle de troisième ordre, à laquelle satisfont les modules transformés, envisagés comme fonctions des modules primitifs. Dans la théorie des fonctions hyperelliptiques, on a achevé peu de chose dans cette direction. Pour combler cette lacune, M. Krause montre que, dans le domaine des fonctions hyperelliptiques de premier ordre, il existe aussi des équations différentielles auxquelles satisfont les modules transformés, envisagés comme fonctions des modules primitifs, et il indique une méthode propre à déterminer ces équations différentielles.

Frobenius (*G.*). — Sur la transformation principale des fonctions thêta de plusieurs variables. (264-296).

Dans un Mémoire inséré aux *Comptes rendus* de l'Académie de Berlin (octobre 1866) et, plus tard, au tome LXVIII du même Journal, M. Kronecker a traité le problème de découvrir les conditions sous lesquelles les paramètres des fonctions thêta, désignés par $\tau_{\alpha\beta}$ dans la notation de M. Weierstrass, deviennent égaux aux paramètres $\bar{\tau}_{\alpha\beta}$ transformés. A l'aide d'un lien remarquable qu'il a trouvé entre les transformations des fonctions théta et les « transformations congruentes de formes bilinéaires », il a réussi, dans le travail cité, à exprimer les paramètres $\tau_{\alpha\beta}$ par ρ racines d'une équation du degré 2ρ, tout en se bornant d'abord au cas où cette équation a ses racines toutes inégales. Après avoir développé la solution du problème, il insiste, en particulier, sur quelques observations importantes : Toutes les valeurs résultant de cette analyse pour les paramètres $\tau_{\alpha\beta}$ ne remplissent pas toujours les conditions nécessaires à la convergence des séries thêta; de plus, si l'équation contient des racines égales, les quantités τ restent en partie indéterminées, c'est-à-dire, dans ce cas, il y a certaines fonctions d'une ou de plusieurs variables qui, étant substituées pour les $\tau_{\alpha\beta}$, satisfont au problème. Ces remarques ont suggéré à M. Weber le point de départ de son Mémoire (*Annali di Mat.*, (2), IX, p. 140). Il y a montré que si l'équation caractéristique de la transformation donnée ne possède que des racines simples, il lui correspondra tout au plus un système de paramètres singuliers qui satisfait en même temps à la condition de convergence de la série thêta. « Cependant », continue M. Weber, « il n'existe pas toujours un tel système de grandeurs, comme l'on peut s'en convaincre par des exemples. » C'est pourquoi M. Frobenius s'est proposé de découvrir les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles une

transformation doit satisfaire, pour qu'elle puisse être une *transformation principale*, c'est-à-dire telle que les paramètres transformés $\bar{\tau}_{\alpha\beta}$ deviennent égaux aux primitifs $\tau_{\alpha\beta}$. La solution se tire presque immédiatement d'une transformation remarquable des relations entre les paramètres primitifs et transformés, signalée déjà par M. Hermite pour le cas de deux variables (*Comptes rendus*, XL, p. 785) et exécutée, en toute généralité, par M. Laguerre (*Journal de l'École Polytechnique*, cahier XLII, p. 215). Après avoir exposé préalablement (§§ 1 et 2) quelques propositions auxiliaires appartenant à l'algèbre des formes bilinéaires et à la théorie des fonctions thêta, M. Frobenius développe (§ 3) les propriétés caractéristiques d'une transformation principale et montre (§§ 4 et 5) comment on peut trouver, pour une transformation satisfaisant aux conditions découvertes, tous les systèmes de paramètres qui deviennent égaux aux transformés. Les autres paragraphes servent à amplifier les développements précédents et à illustrer la théorie par quelques exemples.

Stahl (*W.*). — Sur les systèmes de rayons du second ordre. (297-316).

Les systèmes de rayons du second ordre qui n'ont pas de courbes caustiques peuvent être décrits (celui de septième classe excepté) au moins par un système d'une simple infinité de surfaces réglées de second ordre. En partant de cette propriété des systèmes de rayons du second ordre, on est amené d'abord à considérer les deux sortes de systèmes de rayons de sixième classe que M. Kummer a déjà étudiées dans son Mémoire célèbre *Ueber die algebraischen Strahlensysteme*, et alors les systèmes de rayons de cinquième classe et les autres résultent comme cas spéciaux communs pour l'un et l'autre. Des constructions synthétiques de ces systèmes ont été communiquées par M. Reye (même Journal, LXXXVI, p. 84; *Bulletin* IV_2, 41) qui a engendré les deux systèmes de rayons de sixième classe par deux méthodes bien diverses l'une de l'autre (l'une directe, l'autre indirecte). Il est donc intéressant de déduire, par une voie directe, les liens et les discordances qui s'ensuivent avec nécessité pour les constructions de ces systèmes. La considération d'autres surfaces réglées qui appartiennent aux systèmes de rayons conduit à de nouveaux systèmes de rayons qui sont adjoints aux premiers, c'est-à-dire qui possèdent les mêmes surfaces caustiques qu'eux sans être de même nature. Les particularités de ces systèmes adjoints, surtout les rapports qu'ils ont à ceux de même nature, forment l'objet des recherches de M. Stahl. C'est d'eux que dépendent certaines singularités de la surface caustique qui ne découlent pas des systèmes de second ordre, comme par exemple le faisceau des plans doublement tangents, etc. L'auteur se réserve de revenir à ces singularités de la surface caustique du système de quatrième classe. On trouve encore un nombre de générations intéressantes de la courbe steinérienne (*Kern-Curve*) d'un réseau de surfaces de second degré à l'aide de faisceaux projectifs de cônes, générations qui sont étroitement liées aux systèmes de rayons.

§ 1. Introduction. — § 2. Le système de rayons de second ordre, de sixième classe, de première espèce. — § 3. Le système de rayons de deuxième ordre, de sixième classe, de seconde espèce. — § 4. Le système de rayons de deuxième ordre, de cinquième classe. — § 5. Le système de rayons de deuxième ordre, de quatrième classe. — § 6. Le système de rayons de deuxième ordre, de troisième

classe. — § 7. Le système de rayons de deuxième ordre, de deuxième classe. — § 8. La courbe steinérienne d'un réseau de surfaces de deuxième ordre.

Schoute (*P.-H.*). — Supplément au Mémoire « Les polygones steinériens ». (317-324).

Weingarten (*J.*). — Suite du Mémoire « Sur les propriétés de l'élément linéaire des surfaces à mesure constante de courbure ». (325-329).

Le commencement a été inséré au tome XCIV, p. 181. Signalons cette proposition de la continuation :

Si une équation différentielle linéaire partielle

$$\frac{\partial V}{\partial q} + c_1 \frac{\partial V}{\partial p} + cV = 0$$

a des solutions linéairement indépendantes en commun avec une équation différentielle ordinaire linéaire de second ordre

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} + a_1 \frac{\partial V}{\partial p} + aV = 0,$$

son intégration peut être ramenée à l'intégration de deux équations linéaires ordinaires de second ordre, à savoir, outre celle que nous venons d'écrire, de celle-ci :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} + b_1 \frac{\partial V}{\partial q} + bV = 0,$$

où les coefficients ont des significations définies dans le Mémoire. La théorie de l'élément linéaire des surfaces à mesure constante de courbure offre un exemple de l'existence d'équations différentielles partielles linéaires de cette espèce.

Reye (*Th.*). — Sur les complexes de rayons et tissus de complexes (*Complexen-Gewebe*) linéaires et quadratiques. (330-348).

L'ensemble de toutes les droites étudiées dans la géométrie de rayons de Plücker est une variété quadratique de quatre dimensions, tandis que toutes les sphères de l'espace forment une variété linéaire de quatrième degré. Cette différence essentielle de pure géométrie se fait déjà voir dans la proposition qui dit que, en général, quatre complexes linéaires de rayons ont en commun deux rayons, mais que quatre complexes linéaires de sphères n'ont, en commun, qu'une sphère. En effet, les coordonnées plückériennes d'une droite sont soumises à une équation quadratique de condition. Par conséquent, en faisant abstraction des dimensions, on peut établir des analogies entre un complexe linéaire de second degré et non une surface de second ordre, mais plutôt une courbe gauche de quatrième ordre suivant laquelle deux surfaces de deuxième ordre s'entrecoupent.

Si l'on donne aux six coordonnées d'une droite des valeurs relatives qui ne satisfont pas à l'équation quadratique de condition, elles représentent les éléments d'une variété linéaire de cinq dimensions qui contient la variété quadratique de droites. La recherche de cette variété quadratique est donc ramenée ainsi à l'étude beaucoup plus facile de cette variété linéaire, tandis que la supériorité de l'intuition peut être conservée par une interprétation géométrique des coordonnées linéaires ainsi généralisées.

Cette généralisation, déjà fructifiée par M. F. Klein, permet d'appliquer immédiatement à la géométrie des rayons les méthodes inventées pour la recherche des surfaces de deuxième degré. Elle offre les mêmes avantages, est autant autorisée et aussi nécessaire que l'emploi des points situés en dehors d'une surface de deuxième ordre pour la théorie de cette surface. Les procédés et les résultats des développements rappellent souvent ceux d'un Mémoire antérieur du même auteur publié en 1881 : *Ueber quadratische Kugelcomplexe und confocale Cykliden.* En particulier, l'ensemble de toutes les droites occupe, dans cette variété de cinquième degré, une position analogue à celle du complexe quadratique de toutes les sphères-points dans la géométrie des sphères et le cercle normal infiniment distant dans l'espace de trois dimensions.

§ 1. Les complexes de rayons et tissus de complexes linéaires. — § 2. Les complexes de rayons et tissus de complexes quadratiques. — § 3. La polaire d'un tissu quadratique de complexes par rapport au tissu principal. Rayons, points et plans singuliers d'un complexe quadratique. — § 4. Complexes quadratiques à points et plans communs singuliers. — § 5. Remarque finale.

Tome XCVI; 1884.

Lipschitz (*R.*). — Contributions à la connaissance des nombres de Bernoulli. (1-16).

Le produit $2^{2m-1}(2^m-1)B_m$, où B_m dénote le $m^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli, est égal à un multiple entier de m. Cette propriété, dont la découverte est due à M. Angelo Genocchi (*Annali di Scienze matematiche* de B. Tortolini, t. III, p. 395, 1852), a été retrouvée de nouveau par M. Stern (t. LXXXVIII, p. 85 du même Journal) et par Worpitzky (t. XCIV, p. 203), et démontrée encore par M. Kronecker à l'aide de certaines considérations très simples (t. XCIV, p. 268). M. Lipschitz l'a généralisée maintenant de beaucoup. Pour un nombre quelconque a et pour un couple quelconque de nombres premiers entre eux a et b, les produits $a^{2m}(a^{2m}-1)B_m$ et $(a^{2m-1}-1)(b^{2m-1}-1)B_m$ sont égaux à des multiples entiers du nombre $2m$. De plus, l'auteur s'est occupé des expressions dues à v. Staudt et à Clausen, pour les nombres de Bernoulli, et qui concernent les parties entières qui appartiennent à ces nombres : propriété étudiée par M. Hermite dans une Note insérée au tome LXXXI du même Journal. L'investigation de la question a poussé M. Lipschitz à approfondir l'étude de la fonction $\Sigma_p \frac{1}{p(uu'-u)}$, où la somme s'étend à tous les nombres premiers impairs p et où l'argument complexe u a son module plus grand que l'unité. Cette fonction semble fournir la clef pour les phénomènes mentionnés. La différence de deux de ces fonctions dont les arguments diffèrent de u par des nombres entiers,

augmentée d'une certaine fonction rationnelle de u simple à former, est développable en série semi-convergente où les parties entières des nombres de Bernoulli entrent comme coefficients. Ainsi, cette fonction de u, formée à l'aide de tous les nombres premiers impairs, peut servir à définir les parties entières des nombres de Bernoulli. Réciproquement, cette série semi-convergente, formée à l'aide des parties entières des nombres de Bernoulli, détermine complètement la fonction que nous venons de signaler. C'est qu'il subsiste, entre la suite des nombres premiers et la suite des parties entières des nombres de Bernoulli, un lien remarquable. Si l'on se donne les parties entières des n premiers nombres de Bernoulli, on peut former un système linéaire de n équations dont la résolution fournit la réponse à la question relative à chacun des n premiers nombres impairs qui font suite à l'unité, si ce nombre est premier ou composé : « la loi qui préside à la suite des parties entières des nombres de Bernoulli et celle qui préside à la continuation des nombres premiers peuvent se remplacer l'une l'autre et ont la même profondeur ».

Wiltheiss. — Sur la théorie de la transformation des fonctions hyperelliptiques à deux arguments. (17-35).

Les racines carrées des valeurs inverses des $n+1$ multiplicateurs qui se présentent dans la transformation des fonctions elliptiques au moyen d'un système de $n+1$ transformations non équivalentes du degré n sont liées par $\frac{1}{2}(n+1)$ équations linéaires d'une forme très spéciale. De plus, ces multiplicateurs sont les racines d'une équation dont les coefficients sont rationnels dans le module k. En se plaçant dans une hypothèse particulière sur les transformations à employer, on obtient les valeurs inverses des multiplicateurs sous la forme

$$1 : M_\nu = \vartheta_3^2(0; \lambda_\nu) : \vartheta_3^2(0; k), \qquad 1 : M = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} n \vartheta_3^2(0; \lambda) : \vartheta_3^2(0; k).$$

Par conséquent, les fonctions

$$\vartheta_3(0; \lambda_\nu), \ (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} n \vartheta_3(0; \lambda)$$

sont liées, elles aussi, par des équations analogues à celles pour les M_ν, et elles sont les racines d'une équation du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de k. Le Mémoire de M. Wittstein fait voir que des propositions analogues existent pour les fonctions thêta de Rosenhain ou bien les fonctions thêta à deux arguments.

Sturm (*Rudolf*). — Remarques et additions faites aux Mémoires de Steiner sur le maximum et le minimum. (36-77).

Le Mémoire se divise en trois Parties. Dans la première, M. Sturm discute les conséquences que Steiner a tirées de son *Théorème fondamental :* « De toutes les figures planes qui ont le même périmètre, c'est le cercle qui a la plus grande aire ». Il s'agit surtout de discerner si les propositions sont toutes générales et si les démonstrations données par lui sont applicables à tous les cas possibles des figures. En particulier, M. Sturm étudie le théorème : « De toutes les lignes de longueur donnée qui joignent les côtés d'un angle donné, c'est l'arc de cercle décrit autour du sommet de l'angle comme centre qui ren-

ferme avec les côtés la plus grande aire ». Ce théorème ne s'applique plus au cas d'un angle convexe où M. Sturm découvre un autre maximum. La première Partie se termine par une modification simplifiée de la démonstration due à M. Edler pour le *Théorème fondamental* de Steiner.

Dans la deuxième Partie, M. Sturm aborde la question relative aux polygones du plus petit périmètre inscrits à un polygone donné. Steiner a traité le cas où le nombre des côtés du polygone donné est impair; ses recherches sur celui où ce nombre est pair se bornent au cas particulier où la somme des angles pairs (ou impairs) est commensurable avec 2π. Cependant, ses résultats ne peuvent pas toujours servir. Ainsi, pour un triangle donné, le triangle qui a ses sommets dans les pieds des trois hauteurs n'est plus le triangle inscriptible du plus petit périmètre, si le triangle donné est obtusangle, remarque que Steiner a déjà faite. De même, pour un quadrilatère inscriptible à une circonférence, le quadrilatère qui a ses sommets dans les pieds des perpendiculaires abaissées de l'intersection des diagonales sur les quatre côtés (et les quadrilatères parallèles) n'est plus le quadrilatère inscriptible au quadrilatère donné, du plus petit périmètre, si ce dernier ne renferme pas le centre du cercle circonscrit. M. Sturm achève de rechercher ces cas qui ne rentrent pas dans les résultats de Steiner, de même que celui du quadrilatère général non traité par ce géomètre.

La troisième Partie, qui est la plus courte, donne plusieurs recherches de petite étendue : la démonstration géométrique d'un théorème énoncé par Steiner sans démonstration, l'étude de la plus petite et de la plus grande d'entre les droites qui partagent en deux parties égales la surface, respectivement le périmètre d'un triangle, enfin la recherche de la droite qui passe par un point donné entre les côtés d'un angle et détermine avec eux le triangle du plus petit périmètre.

Sturm (*R.*) et *Lampe* (*E.*). — Sur le minimum de la surface d'un quadrilatère avec quatre côtés donnés. (78-80).

Dans le Mémoire que nous venons d'analyser, M. Sturm avait énoncé l'opinion que la limite inférieure pour la surface d'un polygone commun (dont le périmètre ne se coupe nulle part) à côtés donnés serait difficile à trouver. Pendant l'impression du travail, M. Lampe a informé M. Sturm que la solution simple et complète de la question pour le quadrilatère, découle immédiatement du principe de la continuité appliqué aux équations de condition, et que la solution, pour les polygones généraux, ne présenterait donc pas, selon toute apparence, un plus grand intérêt que celle pour les quadrilatères.

Frobenius (*G.*). — Sur les groupes des caractéristiques des fonctions thêta. (81-99).

« Parmi les fonctions thêta de degré k à ρ variables qui se multiplient par les mêmes facteurs exponentiels lorsque les arguments sont augmentés de périodes simultanées, il y a précisément k^ρ qui sont linéairement indépendantes, y compris celles qui ont pour périodes déjà la $k^{\text{ième}}$ partie de quelques-unes des périodes primitives. Le nombre des fonctions linéairement indépendantes de celles-ci est inférieur à k^ρ et devient *un* pour les fonctions qui sont des fonctions thêta de premier degré à plus petites périodes, qui résultent donc des

fonctions thêta de premier degré à périodes données par une transformation de $k^{\text{ième}}$ degré.

» Dans ce travail, je me borne (§§ 4-5) à considérer des fonctions thêta de deuxième degré dont la seconde différentielle logarithmique reste invariable lorsque l'argument est augmenté de certaines demi-périodes. Préalablement, j'étudie (§§ 1-3) les groupes formés par les caractéristiques des thêta. Ces fonctions servent à approfondir l'intelligence rigoureuse des formules que MM. Stahl (t. 88 du même Journal), Nöther (*Math. Ann.*, t. XVI) et Prym (*Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel*, Leipzig, 1882) ont trouvées par des voies différentes. »

Frobenius (*G.*). — Sur les fonctions thêta à plusieurs variables. (100-122).

Dénotons le système des ρ variables $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(\rho)}$ d'une fonction thêta par une lettre v, le système des demi-périodes :

$$\tfrac{1}{2}\mu_1 + \tfrac{1}{2}\Sigma_\beta \tau_{1\beta}\nu_\beta, \quad \tfrac{1}{2}\mu_2 + \tfrac{1}{2}\Sigma_\beta \tau_{2\beta}\nu_\beta, \quad \ldots, \quad \tfrac{1}{2}\mu_\rho + \tfrac{1}{2}\Sigma_\beta \tau_{\rho\beta}\nu_\beta$$

par une lettre R, en même temps la caractéristique appartenant à ce système par la même lettre :

$$R = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \ldots & \nu_\rho \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_\rho \end{pmatrix}.$$

On aura donc

$$\vartheta[R](v) = \sum e^{2\pi i \sum \left[v^{(\alpha)} + \frac{1}{2}\mu_\alpha\right]\left(n_\alpha + \frac{1}{2}\nu_\alpha\right) + i\pi \sum \tau_{\alpha\beta}\left(n_\alpha + \frac{1}{2}\nu_\alpha\right)\left(n_\beta + \frac{1}{2}\nu_\beta\right)}.$$

Soient A, B, C, ... les r^2 caractéristiques différentes, où $r = 2^\rho$; x_A, x_B, x_C, ... autant de paramètres; $u_0, \ldots, u_{r-1}$, $v_0, \ldots, v_{r-1}$, $2r$ systèmes indépendants de variables. Alors le déterminant de $r^{\text{ième}}$ degré

$$|\Sigma_R x_R \vartheta[R](u_\alpha + v_\beta)\vartheta[R](u_\alpha - v_\beta)| \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, r-1),$$

où R parcourt toutes les r^2 caractéristiques, se décomposera en deux facteurs, dont l'un ne dépend que des variables u_α et v_β, l'autre des variables x_R. Ce dernier est une fonction homogène entière à nombres entiers de $r^{\text{ième}}$ degré des r^2 variables x_R et dont les propriétés sont très intimement liées à celles des caractéristiques. La recherche de cette fonction fait l'objet principal du travail.

Königsberger (*Léon*). — Sur l'irréductibilité des équations différentielles linéaires. (123-151).

D'après une définition donnée par M. Frobenius, une équation différentielle linéaire homogène s'appelle irréductible lorsqu'elle n'a aucune intégrale commune avec une équation différentielle linéaire homogène d'ordre inférieur et à coefficients de même nature. La définition posée plus tard par M. Königsberger pour des équations différentielles algébriques en général ne la désigne comme irréductible que lorsqu'elle n'a aucune intégrale commune avec une équation différentielle algébrique d'ordre inférieur et à coefficients de même nature. Actuellement, M. Königsberger se propose de décider si ces conditions peuvent

coïncider. Après avoir fait quelques observations sur les méthodes propres à répondre à cette question, l'auteur prend pour point de départ la proposition, qui se tire de considérations assez simples : « Si une équation différentielle linéaire homogène d'ordre m a une intégrale commune avec une équation différentielle algébrique d'ordre inférieur qui n'appartient pas déjà à une équation différentielle de même nature et d'ordre encore plus petit, l'intégrale générale de cette équation différentielle algébrique est exprimable par m intégrales particulières de celle-là sous la forme homogène et linéaire

$$Y = S_1 Y_1 + S_2 Y_2 + \ldots + S_m Y_m,$$

où $S_1, S_2, \ldots, S_m$ dénotent des fonctions d'autant de constantes que l'indique l'ordre de l'équation différentielle, dont une partie peut aussi s'évanouir. » Ce théorème ramène le problème à celui de rechercher les propriétés des équations différentielles algébriques pour lesquelles l'intégrale générale est exprimable par un certain nombre d'intégrales particulières sous une forme homogène linéaire à coefficients constants. Or il faut qu'une telle équation différentielle soit linéaire et homogène. On arrive donc à ce résultat : « Si une équation différentielle homogène et linéaire a une intégrale commune avec une équation différentielle d'ordre inférieur, et si cette intégrale n'appartient pas déjà à une équation différentielle d'ordre encore plus petit, cette équation différentielle sera de nouveau homogène et linéaire, ou bien il existe une relation algébrique entre ses intégrales particulières et les dérivées de celles-ci. »

Böklen (*O.*). — Sur la courbure des surfaces. (152-181).

Dans ses recherches sur la vision (*Comptes rendus,* 1845), Ch. Sturm élucida cette théorie en remplaçant par un conoïde le cône des rayons lumineux qu'on avait considéré jusque-là; il étudia le faisceau infiniment mince des normales d'une surface à l'aide des coefficients différentiels de premier et de deuxième ordre. Maintenant, M. Böklen passe à ceux du troisième ordre et éclaircit, par ce moyen, quelques questions sur la courbure des surfaces et sur les surfaces osculatrices de second ordre. Il trouve ainsi deux certains segments qu'il nomme *segments polaires* et qui servent à définir la première série principale des ellipsoïdes (ou bien des surfaces de second ordre) qui ont un contact de troisième ordre avec la surface. Enfin il gagne, par une voie purement géométrique, des explications sur les effets de l'accommodation de l'œil, explications pour lesquelles la forme du conoïde n'est plus suffisante.

§ 1. Introduction. — § 2. Les segments polaires des lignes sur les surfaces. — § 3. Les rayons de courbure des développées des sections de surface. — § 4. Application aux surfaces du second degré. — § 5. Le contact de troisième ordre. — § 6. La théorie de la vision, fondée sur la considération de la surface des centres. § 7. — Les surfaces réglées des normales de l'ellipsoïde. — § 8. La théorie de la vision, fondée sur la considération des faisceaux infiniment minces de normales.

Caspary (*F.*). — Démonstration du théorème fondamental de M. Weierstrass pour la fonction sigma de plusieurs arguments, tirée des relations de M. Kronecker pour les déterminants mineurs de systèmes symétriques. (182-184).

Thomé (*L.-W.*). — Sur la théorie des équations différentielles linéaires. (Résumé des Mémoires de l'auteur dans les tomes 74-95 du Journal). (185-281).

M. Thomé a publié, dans les tomes 74-95 du Journal, neuf Mémoires plus ou moins étendus sur la théorie des équations différentielles linéaires; le total comprend plus de cinq cents pages distribuées entre neuf volumes. Le dixième Mémoire que nous avons à analyser est destiné à faciliter l'étude des recherches dispersées qui ont paru pendant un intervalle de douze ans. Une introduction remarquable révèle en détail la filiation des idées qui ont présidé à la théorie qu'il a développée. Représenter les intégrales dans le voisinage des points singuliers et trouver la continuation de ces intégrales, c'est ce qu'il pose comme problème à résoudre dans la théorie des équations différentielles linéaires et homogènes à coefficients rationnels. Les points où les coefficients deviennent infinis sont ceux qui se nomment *singuliers* (dans le voisinage de $x = \infty$, il faut substituer t^{-1} pour x). L'intégration de l'équation différentielle pour la série hypergéométrique sert de modèle.

On sait que la forme générale des intégrales, dans le voisinage des points singuliers, a été établie par M. Fuchs dans un travail inséré au tome 66 du même Journal. Mais M. Thomé montre que le procédé employé par M. Fuchs dans la démonstration de l'existence de cette forme générale n'est pas également approprié à fournir effectivement la représentation : car on a affaire à une équation dont les coefficients s'expriment par des séries infinies, et il faut décider si cette équation a des racines multiples.

Les équations différentielles traitées par M. Thomé sont d'une nature que nous allons caractériser. L'expression intégrale

$$\mu_1 \int dx\, \mu_1^{-1}\, \mu_2 \int dx\, \mu_2^{-1}\, \mu_3 \int \ldots \int \mu_{\lambda-1}^{-1}\, \mu_\lambda\, dx$$

est nommée un système d'intégrales élémentaires normales, lorsque les quantités μ sont de la forme

$$e^w (x-a)^r \sum_0^\infty c_\mathfrak{a} (x-a)^\mathfrak{a},$$

où w est égal à zéro ou à $\sum_1^n c_{-\mathfrak{a}} (x-a)^{-\mathfrak{a}}$. Si les intégrales d'un système d'intégrales normales (pour $\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, k$) satisfont à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels, les constantes dans les expressions des μ sont liées algébriquement aux constantes dans les coefficients rationnels de l'équation différentielle. Il faut donc d'abord chercher les quantités μ et puis représenter les intégrations dans le système d'intégrales élémentaires normales pour parvenir ainsi à la forme des intégrales dans le voisinage des points singuliers.

Le Mémoire se divise en cinq Sections. Dans la première, on cherche la représentation formelle des quantités μ. L'effectuation de la représentation exige des recherches de convergence dont le détail se trouve plus tard dans la cinquième Section. Il y a cependant un genre général d'équations différentielles où ces études de convergence s'achèvent tout de suite à l'aide des théorèmes généraux de convergence. Ce sont les équations différentielles traitées dans la

deuxième Section et dont l'expression différentielle est représentable par un système d'expressions différentielles normales : on peut les réduire à une forme canonique. La troisième Section traite la représentation des intégrations dans un système d'intégrales élémentaires normales. Ce qui constitue le principe de cette représentation, c'est l'expression des fonctions intégrales par des intégrales définies où l'on a introduit de nouvelles variables d'intégration multipliées par $x - a$ et où les fonctions primitives reviennent sous les signes d'intégrale. De ces expressions découlent la représentation des intégrales dans le voisinage des points singuliers et les expressions des constantes dans la continuation des intégrales. Les problèmes d'Algèbre inhérents à cette théorie se discutent dans la quatrième Section. Pour des renseignements plus détaillés, l'auteur renvoie toujours le lecteur aux Mémoires où il a développé plus amplement ses idées. Les titres des vingt-six articles en résument succinctement le contenu et aident ainsi à faire rapidement saisir l'ensemble du matériel.

Schrœter (*H.*). — Constructions linéaires qui servent à engendrer la surface cubique. (282-323).

Jusqu'à présent, on a étudié de préférence deux constructions linéaires de la surface cubique, à savoir la génération :

1° Par trois réseaux de plans liés par la relation collinéaire;

2° Par trois faisceaux de plans liés par la relation trilinéaire.

Ces deux méthodes sont dues à Grassmann [*Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades und die dadurch erzeugten Oberflächen* (*Crelle Journal*, t. 49, p. 47)]; la première a été énoncée par ce géomètre directement dans la même forme, l'autre se tire de son principe de *multiplication stéréométrique*. Depuis, on les a choisies pour points de départ quand il s'agissait d'étudier les propriétés essentielles de la surface cubique, en particulier de rechercher les vingt-sept droites. Le Mémoire cité de Grassmann contient encore deux autres modes de construction pour la surface cubique. En les dégageant de la forme particulière qui émane du principe de multiplication stéréométrique et en les transcrivant dans le langage usité de Géométrie, on parvient à certaines constructions nouvelles et très simples de la surface cubique qui méritent peut-être d'être préférées à celles qui ont été en usage. Après les avoir indiquées, M. Schroeter en fait couler les propriétés les plus saillantes des surfaces cubiques. Contentons-nous de décrire ces méthodes en peu de mots.

3° Choisissons deux droites $a_1 a_2$ de l'espace, non situées dans le même plan, comme axes de deux faisceaux de plans; de plus, un point quelconque $\mathfrak{O}$ comme centre d'un réseau de plans; soient enfin $b_1 b_2$ deux droites de l'espace qui ne se rencontrent pas. Un plan variable ξ passant par $\mathfrak{O}$ coupe les droites fixes $b_1 b_2$ en $(\xi b_1) = \mathfrak{x}_1$, $(\xi b_2) = \mathfrak{x}_2$. Menons deux plans par a_1 et $\mathfrak{x}_1$, a_2 et $\mathfrak{x}_2$; les trois plans $[a_1 \mathfrak{x}_1]$, $[a_2 \mathfrak{x}_2]$, ξ ont un point $\mathfrak{x}$ commun : le point $\mathfrak{x}$ décrira la surface cubique $F^{(3)}$. Cette construction peut aussi être envisagée comme génération par un système de rayons et un réseau de plans dont les éléments ont été mis en relation.

4° Soient $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ deux points, a_3 une droite; $\beta_1 \beta_2$ deux plans, b_3 une droite; $\mathfrak{O}$ un point. Un plan variable ξ passant par $\mathfrak{O}$ rencontrera les plans β_1, β_2 en deux droites x_1, x_2, la droite b_3 au point $\mathfrak{x}_3$. Le point d'intersection des plans $[\mathfrak{A}_1 x_1]$, $[\mathfrak{A}_2 x_2]$, $[a_3 \mathfrak{x}_3]$ décrira la surface cubique $F^{(3)}$.

5° Soient a_1, a_2, a_3 trois droites dont aucune ne rencontre les autres; α_1, α_2, α

trois plans quelconques, $\mathfrak{o}$ un point. Un rayon variable x passant par $\mathfrak{o}$ rencontrera les trois plans respectifs en $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3$. Le point d'intersection des trois plans $[a_1\mathfrak{x}_1]$, $[a_2\mathfrak{x}_2]$, $[a_3\mathfrak{x}_3]$ décrira la surface cubique $F^{(3)}$.

6° Soient a_1, a_2 deux droites non situées dans le même plan, $\mathfrak{p}$ un point; α_1, α_2 deux plans, $\mathfrak{o}$ un point. Un rayon variable x passant par $\mathfrak{o}$ coupera $\alpha_1\alpha_2$ en $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2$ et déterminera un plan $[x\mathfrak{p}]$. Les trois plans $[a_1\mathfrak{x}_1]$, $[a_2\mathfrak{x}_2]$, $[x\mathfrak{p}]$ auront un point commun : c'est celui qui décrira la surface cubique $F^{(3)}$.

Caspary (*F.*). — Contribution à la théorie des fonctions thêta. (324-326).

Dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin (1882, p. 506), M. Weierstrass a établi un théorème fondamental pour la fonction σ; en même temps, il a observé qu'on pourrait tirer une démonstration, pour ce théorème, d'un déterminant pfaffien qui s'annule. Ce déterminant se trouve être un cas spécial d'un autre plus général qui s'évanouit aussi identiquement. De là, M. Caspary obtient une proposition analogue à celle de M. Weierstrass.

Perott (*Joseph*). — Sur la formation des déterminants irréguliers. (327-347).

Dans son premier Mémoire (t. XCV, p. 232) sur le même sujet, M. Perott avait donné une méthode pour former des déterminants ayant pour exposants d'irrégularités (*voir* Gauss, *Disq. arithm.*, art. 256) des multiples d'un nombre premier p donné à l'avance. Cependant, l'existence de ces déterminants n'était pas évidente pour une valeur quelconque de p. Le second Mémoire fournit les moyens pour en démontrer l'existence, si les déterminants sont positifs et non carrés. Soient t_1, u_1 les nombres qui constituent la plus petite solution de $t^2 - pu^2 = 1$; posons $(t_1 + u_1\sqrt{p})^p = \tau + \upsilon\sqrt{p}$. Soient q_1 le plus petit diviseur premier de υ qui ne divise pas $2pt_1u_1$, q_2 le plus petit diviseur premier de τ qui ne divise pas $2pt_1u_1$, p^ν la plus haute puissance de p contenue dans u_1; alors le déterminant $\Delta = p^{2\nu+2}q_1^2q_2^2$ a un exposant d'irrégularité qui contient p comme facteur.

Kronecker (*L.*). — Démonstration de la loi de réciprocité pour les restes quadratiques. (348).

Extrait d'un Mémoire inséré aux *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin, 88

E. Lampe.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE [1]. — 3e série.

Tome V; 1886, 1er semestre.

Maleyx (*L.*). — Méthode élémentaire pour calculer le rapport de la circonférence au diamètre. (5-30).

Cette étude est extraite d'un travail plus étendu sur le même sujet, que l'auteur se propose de publier ultérieurement. Il reprend, en la perfectionnant, la méthode inventée par Archimède, laquelle diffère à la fois de celle des périmètres et de celle des isopérimètres. Incidemment on rencontre, dans l'article de M. Maleyx, des considérations très intéressantes sur des procédés d'extraction de la racine carrée par approximation. Nous n'oserions pas affirmer toutefois que la méthode proposée conduise pratiquement à des calculs plus simples et faciles que les procédés habituellement enseignés. D'ailleurs, le mérite de ces recherches ne saurait être que théorique, les moyens actuels de calculer π par les séries étant incomparablement supérieurs en rapidité. L'article se termine par un examen minutieux des limites de l'erreur commise.

Benoît. — Note sur la décomposition d'une forme quadratique à m variables en une somme de $m - n$ carrés. (30-36).

Les équations de condition pour que cette décomposition soit possible ne sont pas distinctes. L'auteur cherche quelles sont celles de ces équations dont les autres sont des conséquences, et termine par certaines applications à des exemples du second degré, à deux et quatre variables.

Gomes Teixeira (*F.*). — Sur une formule d'Analyse. (36-39).

Cette formule donne le rapport des expressions

$$f(x) - f(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0),$$

calculées pour deux fonctions f et F et pour deux valeurs différentes de i.

Fouret (*G.*). — Sur une généralisation de la quadratrice. (39-43).

Étude des courbes ayant pour équation polaire $\rho = a \frac{\omega - \alpha}{\sin \omega}$ et dont la quadratrice est un cas particulier répondant à $\alpha = 0$. Les analogies entre la courbe généralisée et la quadratrice sont intéressantes, et l'auteur les fait ressortir.

Cesaro (*E.*). — Le déterminant de Smith et Mansion. (44-47).

Ce déterminant dérive de fonctions numériques et les considérations de M. Cesaro conduisent à des conséquences arithmologiques très curieuses.

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XI$_1$, p. 36.

Correspondance. — Extrait d'une Lettre de M. le Dr Louis Saalschütz : Sur une identité trigonométrique étudiée par MM. Hermite et Glaisher, d'où résulte une relation nouvelle. (47-52).

Bibliographie. — *J. Kœhler :* Exercices de Géométrie analytique et de Géométrie supérieure, questions et solutions; Ire Partie, Géométrie plane, in-8°, VI-347 p., 1886; Compte rendu, par M. *Maurice d'Ocagne*. — *Jules Tannery :* Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, in-8°, 1886; extrait de la Préface. (53-61).

Publications récentes. — (61-64).

Cesaro (*E.*). — Sur les lignes de poursuite. (65-83).

L'étude de M. Cesaro tire son origine des tracés graphiques relatifs à la construction des voûtes. Un point M décrivant une trajectoire et q étant une fonction de l'arc s, on applique en chaque point M une masse $q\,ds$; M_0 étant le centre de gravité de ces masses le long de l'arc AM, la courbe (M_0) est une ligne de poursuite d'une espèce particulière : c'est cette ligne qu'étudie M. Cesaro, et dont il établit de nombreuses et intéressantes propriétés.

Jaggi (*E.*). — Sur les équations différentielles linéaires sans second membre. (83-85).

Méthode pour former l'équation aux produits deux à deux des intégrales.

Jaggi (*E.*). — Sur les équations différentielles linéaires. (86-88).

Méthode pour former l'équation qui admet pour intégrale la fonction

$$u = \frac{y_1 y_2 \cdots y_n}{y_{n+1} y_{n+2} \cdots y_{n+p}}$$

de $p + n$ intégrales d'une équation différentielle linéaire sans second membre.

D'Ocagne (*M.*). — Sur l'enveloppe de certaines droites variables. (88-97).

Suite d'une étude publiée antérieurement dans le même Recueil en 1883 (3e série, t. II, p. 252). Nous ne nous lasserons pas d'exprimer le regret que des Mémoires paraissent ainsi en fragments séparés par de si longs intervalles de temps.

D'Ocagne (*M.*). — Sur le cercle orthoptique. (97-106).

On appelle ainsi le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une conique. M. d'Ocagne établit un certain nombre de théorèmes fort intéressants, exprimant des propriétés de ce cercle.

Cesaro (*E.*). — Sur la série de Lambert. (106-109).

Évaluation approximative de la somme des n premiers termes de cette série :

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\cdots$$

Bibliographie. — *F. I. C.* : Exercices de Géométrie descriptive, 2e édition, gr. in-18, 1884. — *F. I. C.* : Éléments de Géométrie, 5e édition, gr. in-18, 1885. — *Despeyrous* : Cours de Mécanique, avec Notes de M. G. Darboux, 2 vol. gr. in-8°, x-458 et 616 p.; 1884-1886. (109-111).

Publications récentes. — (111-112).

Realis (*S.*). — Développements nouveaux sur quelques propositions de Fermat. (113-122).

Les propositions en question sont les suivantes :

« 1° Si p, compris dans la forme $8q+1$, est premier ou composé de facteurs premiers de la même forme, p est la somme d'un carré et d'un double carré; 2° tout nombre premier de la forme $8q+3$ est la somme d'un carré et d'un double carré; 3° si p, de la forme $6q+1$, est premier ou composé de facteurs premiers de la même forme, p est la somme d'un carré et d'un triple carré. »

M. Realis en déduit des conséquences analogues intéressantes, particulièrement sur les nombres triangulaires.

Lemoine (*E.*). — Note sur le cercle des neuf points. (122-127).

Étude de certaines propriétés établies simplement par la considération des points associés. *Voir*, sur le même sujet, *Association française pour l'avancement des Sciences*, Congrès de Rouen, p. 126, 1883; Congrès de Blois, p. 49, 1884, et *Nouv. Ann.*, p. 220, 1885.

Cesaro (*E.*). — Sur l'emploi des coordonnées intrinsèques (127-142).

La position d'un point M d'une courbe de l'espace peut être définie par l'arc $s = \mathrm{AM}$ et les rayons de courbure ρ et r. C'est là ce que M. Cesaro appelle les *coordonnées intrinsèques*. Il s'attache à montrer que, par l'emploi de ces coordonnées, on peut passer de l'étude des faits inhérents à la courbe à celle des faits extérieurs, et faire intervenir les coordonnées ordinaires ou *extrinsèques*. Plusieurs exemples touchant les lignes sphériques, et la loxodromie en particulier, complètent cette étude, qui ouvre, à notre avis, une voie nouvelle et féconde à l'étude des lignes et des surfaces.

Du Chatenet (*M.*). — Sur la représentation des figures tracées

sur une surface. Applications aux cartes de Géographie. (142-155).

L'auteur étudie la transformation d'une figure située sur une surface en une autre figure, située sur une autre surface, en s'imposant la condition que toute famille de courbes de la première surface définie par une équation linéaire entre deux fonctions de ses coordonnées se transforme en une famille représentée par une équation linéaire entre les coordonnées, sur la deuxième surface. L'analyse à laquelle le conduit cette question lui permet de formuler des conclusions applicables au cas des projections géographiques.

Godefroy (*R.*). — Sur le système d'une conique et d'un cercle. (155-158).

Propriété permettant d'établir la théorie du cercle osculateur.

Un ancien élève de l'École Polytechnique. — Condition pour que quatre droites soient les génératrices d'un même système d'un hyperboloïde. (158-160).

Méthode assez simple, fondée sur l'emploi des déterminants.

Nécrologie. — Annonce de la mort de M. Moret-Blanc, décédé le 20 mars 1886. (160).

Publications récentes. — (160).

Resal (*H.*). — Note sur la balance de Roberval. (161-163).

Extrait du *Cours de Mécanique* de l'auteur. Théorie rigoureuse de la balance de Roberval, indépendante de la considération des couples.

Picquet (*H.*). — Construction des points doubles de la projection de la courbe d'intersection de deux cônes ou cylindres du second degré. Considérations sur le théorème de Desargues. (163-168).

Cette construction élémentaire, c'est-à-dire n'exigeant que la règle et le compas, est fondée sur le théorème de Desargues, généralisé par Sturm. L'auteur y ajoute une démonstration simple de ce théorème de Desargues.

Du Chatenet (*M.*). — Détermination des systèmes de cartes de géographie dans lesquels tous les cercles de la sphère sont représentés par des cercles. (168-176).

La conclusion est que la projection stéréographique seule jouit de cette propriété.

De Saint-Germain. — Sur la détermination géométrique des brachistochrones. (177-185).

L'auteur, pour le cas où il n'existe pas de résistances passives, se propose d'établir géométriquement certaines propriétés de la courbe, et de la déterminer tout entière dans un cas assez étendu où elle n'est pas plane.

Lac de Bosredon (*V.*). — Étude sur les sections planes des surfaces. Théorie nouvelle des plans cycliques et des ombilics. (186-200, 214-223).

L'auteur s'attache à obtenir l'équation de la section plane d'une surface, dans son plan même, problème d'une grande utilité, que les méthodes ordinaires résolvent d'une façon insuffisante. Cela le conduit facilement à la détermination des plans cycliques et des ombilics, pour les surfaces du second ordre, qu'il étudie en considérant successivement l'ellipsoïde, les hyperboloïdes à une nappe et à deux nappes, le paraboloïde elliptique, le paraboloïde hyperbolique, le cône oblique à base circulaire.

L'étude en question se termine par ce problème :

« Trouver le lieu des droites d'intersection de deux plans rectangulaires menés par deux droites données. »

Savin Realis. — Notice nécrologique, par M. *E. Catalan*, sur S. Realis, décédé à Turin, le 9 février 1886. (200-203).

Publications récentes. — (204-208).

Cesaro (*E.*). — Sur la distribution mutuelle des nombres polygones (solution de la question 1470). (209-213).

L'auteur démontre qu'entre deux carrés consécutifs il y a un triangulaire au moins et deux au plus; que deux carrés de même parité, consécutifs, comprennent entre eux deux ou trois triangulaires, et il établit en outre sur les probabilités certaines propriétés d'une extrême originalité; par exemple, il y a environ quatre-vingt-dix-sept à parier contre cinquante-six qu'un nombre est triangulaire plutôt que pentagonal.

Hofmann (*Fritz*). — Sur la marche du cavalier. (224-226).

Cette marche ne peut se fermer sur un échiquier d'un nombre impair de cases. L'auteur le démontre par un ingénieux emploi des notations imaginaires.

Desboves. — Application des formules générales qui donnent la solution complète, en nombres entiers, de l'équation homogène du second degré contenant un nombre quelconque d'inconnues. (226-233).

L'auteur étudie successivement les équations

$$X^2 + bY^2 + dXY = Z^2,$$

$$X^2 + Y^2 = cZ^2, \quad aX^2 + bY^2 + dXY = cZ^2, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 U^2$$

et, en général,

$$X^2 + Y^2 + \ldots = (\alpha^2 + \beta^2 - \ldots) U^2.$$

Du Chatenet (*M.*). — Sur les courbes dans lesquelles la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est avec lui dans un rapport constant. (233-237).

L'équation générale de ces courbes est $r^{m-1} = a^{m-1} \cos(m-1)\omega$, m représentant le rapport constant donné. Pour $m = 2$, on trouve la circonférence; pour $m = 3$, la lemniscate de Bernoulli; pour $m = \frac{1}{2}$, la parabole; pour $m = \frac{3}{2}$, une épicycloïde; pour $m = -1$, une hyperbole équilatère.

Godefroy (*R.*). — Sur les centres de courbure de l'ellipse et de la parabole. (237-245).

Utilisation d'une propriété de la normale à l'ellipse; extension à la parabole. Les constructions indiquées et les principes sur lesquels elles reposent sont d'une extrême élégance.

Concours général de 1884. — Énoncés des compositions : Mathématiques élémentaires, Philosophie, Seconde. (245-247).

École navale (Concours de 1885). — Énoncés des compositions : Arithmétique, Algèbre, Trigonométrie, Géométrie, Géométrie descriptive. (247-249).

École spéciale militaire (Concours de 1885). — Énoncés des compositions : Mathématiques, Calcul trigonométrique, Géométrie descriptive. (250-251).

École forestière (Concours de 1885). — Énoncés des compositions : Mathématiques, Trigonométrie et Calcul logarithmique. (251-252).

Enseignement secondaire des jeunes filles. — Énoncés des compositions mathématiques : Certificat d'aptitude, Agrégation. (252-253).

Concours général de 1885. — Énoncés des compositions : Ma-

thématiques spéciales, Mathématiques élémentaires, Philosophie, Troisième. (253-255).

École des mineurs de Saint-Étienne (Concours de 1885). — Énoncés des compositions : Mathématiques (Admissibilité, Admission), Calcul trigonométrique, Mathématiques (session supplémentaire). (255-256).

Concours pour les bourses de licence (Paris, 1885). — Énoncés des compositions. (256).

D'Ocagne (*M.*). — Sur l'algorithme $[abc\ldots l]^{(n)}$. (257-272).

L'auteur représente par cette notation le résultat de la substitution de l'unité aux coefficients numériques dans le développement de $(a+b+c+\ldots+l)^n$. Il en déduit des règles de calcul applicables à cet algorithme, et un grand nombre de formules, parmi lesquelles nous signalerons la suivante :

$$[1^{(p)}]^{(n)} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1.2\ldots(p-1)}.$$

A rapprocher d'articles précédents du même auteur (*Nouv. Ann.*, 3e série, t. II, p. 230, et 3e série, t. III, p. 65) et d'un travail de M. Cesaro (*Nouv. Ann.*, 3e série, t. IV, p. 67).

Godefroy (*R.*). — Théorèmes sur les rayons de courbure d'une classe de courbes géométriques. (272-279).

Les courbes étudiées par M. Godefroy sont les ellipses et paraboles d'ordre quelconque $Ax^m + By^m = C$, $y^m = Ax^n$. Il en fait application aux développées d'ellipse et de parabole.

Hofmann (*Fritz*). — Une application élémentaire du théorème d'Abel. (279-283).

Démonstration de la formule donnant $\cos(A+B)$.

Picquet (*H.*). — Rectification. (284-286).

Reconnaissance de priorité en faveur de M. Lefèvre, au sujet de la construction des points doubles de l'intersection de deux cônes du second degré (*voir* ci-dessus).

Concours d'admission a l'École navale en 1885. — Énoncés des compositions : Mathématiques, Lavis, Géométrie descriptive, Trigonométrie. (286-287).

Concours d'admission a l'École Polytechnique en 1885. —

Énoncés des compositions données à quelques élèves qui n'ont pu composer que plus tard : Mathématiques, Géométrie descriptive. (288-289).

Agrégation des Sciences mathématiques (Concours de 1885). — Énoncés des compositions. Admissibilité : Mathématiques spéciales, Mathématiques élémentaires; sujet de Licence (théorie, application). Épreuves définitives : Composition d'Analyse et de Mécanique, Épure, Calcul. (289-292).

Concours d'admission a l'École Centrale en 1885 (Deuxième session). — Énoncés des compositions : Géométrie analytique, Triangle, Épure, Physique, Chimie. (292-294).

D'Ocagne (*M.*). — Théorème sur les courbes algébriques et le cercle. (295-298).

Le centre de gravité des points d'intersection d'une courbe algébrique de degré quelconque donnée, et d'un cercle de centre fixe et de rayon variable, est un point fixe.

Problème. — (299).

Quatre énoncés, relatifs aux cylindres du second degré passant par les six sommets d'un octaèdre régulier.

Correspondance. — *M. d'Ocagne :* Sur les lignes de poursuite; réclamation de priorité. — *F. Dumont :* Il y a lieu d'attribuer à Chasles le système de coordonnées dit *de Schwering*. (300-301).

Bibliographie. — *B. Boncompagni :* Sur l'histoire des Sciences mathématiques et physiques de M. *Maximilien Marie;* Note de *M. Marie*. (301-303).

Questions proposées. — 1561-1562. (303-304). A. L.

SITZUNGSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN [1].

Premier semestre; 1882.

Helmholtz (*H. v.*). — Sur la thermodynamique des phénomènes chimiques. (22-39).

Oberbeck (*A.*). — Sur les différences de phases des vibrations électriques. (125-131).

Weierstrass. — Sur la théorie des fonctions elliptiques. (443-451).

1. Dans la première Partie de cette Note, M. Weierstrass montre comment on obtient des relations entre les fonctions $\sigma(u|\omega, \omega')$, $\sigma_1(u|\omega, \omega')$, $\sigma_2(u|\omega, \omega')$, $\sigma_3(u|\omega, \omega')$ et leurs dérivées partielles par rapport à u, ω, ω'. Inutile de rappeler encore une fois ce que sont les fonctions σ et $\mathfrak{p}$ de M. Weierstrass. Le recueil de formules publié par M. Schwarz et le récent Ouvrage de M. Halphen sont dans toutes les mains.

Ne considérons d'abord que la fonction $\sigma(u|\omega, \omega')$; sa seconde dérivée logarithmique, changée de signe, est $\mathfrak{p}(u; g_2, g_3)$ et l'on a l'équation différentielle

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u}\right)^2 = 4\mathfrak{p}^3 - g_2\mathfrak{p} - g_3$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial u^2} = 6\mathfrak{p}^2 - \frac{g_2}{2}. \tag{1}$$

Désignons par $d'F$ la différentielle d'une quantité quelconque F, prise par rapport à ω et ω', et par d_1, d_2 des quantités déterminées par les deux égalités

$$dg_2 = -4g_2 d_1 - 6g_3 d_2,$$

$$dg_3 = -6g_3 d_1 - \frac{1}{3} g_2^2 d_2,$$

ce qui est possible parce que l'invariant

$$G = g_2^3 - 27 g_3^2$$

est supposé différent de zéro.

---

[1] Les Comptes rendus mensuels des séances de l'Académie des Sciences de Berlin ont cessé de paraître à la fin de l'année 1881. Ils ont été remplacés par des Comptes rendus de chaque séance, publiés sous le titre de *Sitzungsberichte*. Ces *Sitzungsberichte* comprennent des Mémoires scientifiques qui sont publiés à part sous le titre : *Mathematische und naturwissenschaftliche Mittheilungen aus den Sitzungsberichten der K. P. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*.

On déduit de l'égalité (1) cette autre égalité

$$d'\wp + \left(u\frac{\partial\wp}{\partial u} + 2\wp\right)d_1 + \left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\frac{\partial \log\sigma}{\partial u} + 2\wp^2 - \frac{1}{3}g_2\right)d_2 = 0,$$

qui se transforme aisément en

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left[2\frac{d'\sigma}{\sigma} + 2\frac{u}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial u}d_1 + \left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} + \frac{1}{12}g_2u^2\right)d_2\right] = 0,$$

d'où l'on tire, en observant que chacun des termes de la quantité entre crochets, et par suite la quantité entre crochets elle-même, est une fonction paire de u,

$$(2)\qquad 2d'\sigma + 2u\frac{\partial\sigma}{\partial u}d_1 + \left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} + \frac{1}{12}g_2u^2\sigma\right)d_2 = C\sigma,$$

où C est une constante par rapport à u. En comparant les premiers termes des développements en série des deux membres, on voit que $C = 2d_1$.

Suit le calcul des quantités d_1 et d_2. De l'équation précédente on déduit simultanément les relations

$$d\omega = \eta_1 d_2 + \omega d_1,$$
$$d\omega' = \eta_1' d_2 + \omega' d_1,$$
$$d\eta_1 = -\frac{1}{12}g_2\omega d_2 - \eta_1 d_1,$$
$$d\eta_1' = -\frac{1}{12}g_2\omega' d_2 - \eta_1' d_1;$$

d'où, en tenant compte de la relation fondamentale

$$\eta_1\omega' - \eta_1'\omega = \frac{\pi i}{2},$$

on obtient immédiatement d_1, d_2, et puis $d\eta_1$, $d\eta_1'$, en fonction linéaire et homogène de $d\omega$ et $d\omega'$. Les équations qui définissent d_1 et d_2 nous donnent aussi maintenant par une simple substitution dg_2 et dg_3 en fonction linéaire et homogène de $d\omega$ et $d\omega'$.

L'équation (2) et les fonctions linéaires et homogènes de $d\omega$ et $d\omega'$ trouvées pour d_1, d_2, $d\eta_1$, $d\eta_1'$, dg_2, dg_3 nous montrent que toute dérivée partielle de σ par rapport à ω et ω' peut être mise sous la forme

$$F_0\sigma + F_1\frac{\partial\sigma}{\partial u} + F_2\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} + \ldots,$$

où F_0, F_1, F_2, ... désignent des fonctions entières des quantités ω, ω', η_1, η_1', g_2, g_3 et u.

Rappelons, d'autre part, que la fonction σ peut être développée en une série entière par rapport à u, g_2, g_3, partout convergente. Si donc nous considérons σ comme une fonction de u, g_2, g_3, l'équation (2) et les relations

$$d_1 = -\frac{1}{12}\frac{dG}{G}, \qquad d_2 = \frac{9g_3\,dg_2 - 6g_2\,dg_3}{2G}$$

(que nous déduisons simplement des fonctions linéaires et homogènes de $d\omega$,

$d\omega'$ trouvées plus haut pour d_1, d_2, dg_2, dg_3, en éliminant $d\omega$, $d\omega'$) nous montrent que chaque dérivée partielle de σ par rapport à g_2 et g_3 peut être mise sous la forme

$$G_0\sigma + G_1\frac{\partial\sigma}{\partial u} + G_2\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} + \ldots,$$

où chaque G_k est une fonction entière de u, g_2, g_3, divisée par une puissance de l'invariant G.

M. Weierstrass parvient, non seulement aux développements précédents, mais encore à des développements semblables pour les dérivées partielles des trois fonctions σ_λ ($\lambda = 1, 2, 3$), prises par rapport à ω et ω', ainsi que pour les dérivées partielles des σ_λ par rapport à e_λ et ε_λ, où e_1, e_2, e_3 sont les racines de l'équation

$$4e^3 - g_2 e - g_3 = 0$$

et

$$\varepsilon_1 = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3), \qquad \varepsilon_2 = (e_2 - e_1)(e_2 - e_3), \qquad \varepsilon_3 = (e_3 - e_1)(e_3 - e_2).$$

2. La seconde Partie de cette Note est consacrée au calcul des coefficients des fonctions σ, σ_1, σ_2, σ_3. Bornons-nous ici de nouveau à la fonction σ.

En mettant $d'\sigma$ sous la forme

$$\frac{\partial\sigma}{\partial g_2}dg_2 + \frac{\partial\sigma}{\partial g_3}dg_3 = -\left(4g_2\frac{\partial\sigma}{\partial g_2} + 6g_3\frac{\partial\sigma}{\partial g_3}\right)d_1 - \left(6g_3\frac{\partial\sigma}{\partial g_2} + \frac{1}{3}g_2^2\frac{\partial\sigma}{\partial g_3}\right)d_2,$$

en remplaçant dans l'équation (2) et en observant que les quantités d_1 et d_2, considérées comme fonctions de dg_2, dg_3, sont indépendantes l'une de l'autre, on obtient les deux équations aux dérivées partielles

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} - 12g_3\frac{\partial\sigma}{\partial g_2} - \frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial\sigma}{\partial g_3} + \frac{1}{12}g_2u^2\sigma = 0,$$

$$\text{(B)} \qquad u\frac{\partial\sigma}{\partial u} - 4g_2\frac{\partial\sigma}{\partial g_2} - 6g_3\frac{\partial\sigma}{\partial g_3} - \sigma = 0.$$

Si l'on pose

$$\sigma = \sum_{(\mu,\nu,\rho)} \alpha_{\mu,\nu,\rho}\, g_2^\mu g_3^\nu u^\rho \qquad (\mu, \nu, \rho = 0, 1, \ldots, \infty),$$

l'équation (B) montre que, pour tout terme dont le coefficient n'est pas nul, on a, entre les indices, la relation

$$\rho - 4\mu - 6\nu - 1 = 0.$$

On peut donc poser

$$\sigma = \sum a_{\mu,\nu}\left(\frac{1}{2}g_2\right)^\mu (2g_3)^\nu \frac{u^{4\mu+6\nu+1}}{(4\mu+6\nu+1)!}.$$

Alors l'équation (A) donne la formule récurrente

$$a_{\mu,\nu} = 3(\mu+1)a_{\mu+1,\nu-1} + \frac{16}{3}(\nu+1)a_{\mu-2,\nu+1} - \frac{1}{3}(2\mu+3\nu-1)(4\mu+6\nu-1)a_{\mu-1,\nu},$$

dans laquelle chaque coefficient à indice négatif doit être considéré comme nul et $a_{0,0} = 1$. Si l'on forme un groupe de tous les $a_{\mu,\nu}$ pour lesquels la somme

$4\mu + 6\nu$ a la même valeur, on peut calculer tout nombre $a_{\mu,\nu}$ d'un groupe déterminé à l'aide de deux nombres du groupe qui précède immédiatement et d'un nombre de l'avant-dernier groupe.

M. Weierstrass obtient de même pour la fonction σ_λ ($\lambda = 1, 2, 3$) le développement

$$\sigma_\lambda = e^{-\frac{1}{2}e_\lambda u^2} \sum_{(\mu,\nu)} c_{\mu,\nu} (12 e_\lambda)^\mu (2\varepsilon_\lambda)^\nu,$$

où les coefficients $c_{\mu,\nu}$ sont donnés par la formule récurrente

$$c_{\mu,\nu} = 16(\mu+1) c_{\mu+1,\nu-1} + \nu c_{\mu-1,\nu} - (\mu + 2\nu - 1)(2\mu + 4\nu - 3) c_{\mu,\nu-1};$$

les c à indice négatif doivent être considérés comme nuls et $c_{00} = 1$.

Mais on peut aussi mettre la fonction σ sous une forme analogue à celle de σ_λ. A cet effet, nous écrivons l'équation (2)

$$2d'\sigma + 2u\frac{\partial\sigma}{\partial u} d_1 + \left[\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} + \left(\frac{1}{12} g_2 u^2 + e_\lambda\right)\sigma\right] d_2 - 2\sigma(d_1 - e_\lambda d_2) - 3e_\lambda \sigma d_2 = 0,$$

et nous poserons

$$\sigma = e^{-\frac{1}{2}e_\lambda u^2} S^{(\lambda)}.$$

En égalant à zéro les coefficients des deux quantités d_1 et d_2, nous aurons, comme tout à l'heure pour σ, deux équations différentielles pour $S^{(\lambda)}$, d'où nous tirerons le développement cherché. Il vient

$$\sigma = e^{-\frac{1}{2}e_\lambda u^2} \sum_{(\mu,\nu)} b_{\mu,\nu} (3e_\lambda)^\mu (2\varepsilon_\lambda)^\nu \frac{u^{2\mu+4\nu+1}}{(2\mu+4\nu+1)!},$$

les coefficients $b_{\mu,\nu}$ étant déterminés par la série récurrente

$$b_{\mu,\nu} = 4(\mu+1) b_{\mu+1,\nu-1} + (4\mu+1) b_{\mu-1,\nu} - (\mu + 2\nu - 1)(2\mu + 4\nu - 1) b_{\mu,\nu-1},$$

où chaque b à indice négatif est nul et $b_{00} = 1$.

On peut observer que $2\varepsilon_\lambda = 6e_\lambda^2 - \frac{g_2}{2}$.

Les formules récurrentes pour les coefficients b et c des deux derniers développements montrent immédiatement que tous ces coefficients b et c sont des *nombres entiers*.

Le dernier développement obtenu pour σ montre que, si l'on pose

$$\sigma = \sum_{\tau=0} \gamma_\tau \frac{u^{2\tau+1}}{(2\tau+1)!},$$

chaque coefficient γ_τ est nécessairement une fonction entière à coefficients entiers de $\frac{g_2}{2}$ et $\frac{e_\lambda}{2}$. A l'aide de l'équation $4e_\lambda^3 - g_2 e_\lambda - g_3 = 0$, on peut faire disparaître de γ_τ toutes les puissances de e_λ supérieures à la seconde sans introduire d'autres dénominateurs que des puissances de 2. Comme γ_τ doit avoir la même valeur pour $\lambda = 1, 2, 3$, les coefficients de e_λ et de e_λ^2, dans l'expression de γ_τ ainsi réduite, doivent être nuls. Donc γ_τ est une fonction entière de g_2

et g_1, dont les coefficients sont des nombres fractionnaires ne pouvant avoir comme dénominateur que des puissances de 2. Si les coefficients $a_{\mu,\nu}$ étaient des fractions, ces fractions ne pourraient donc également avoir comme dénominateur que des puissances de 2. Or la formule récurrente obtenue pour ces coefficients $a_{\mu,\nu}$ montre que cela n'est pas; donc les coefficients $a_{\mu,\nu}$ sont des *nombres entiers*.

Cette Note de M. Weierstrass nous permet ainsi de nous rendre compte de la source des développements cités par M. Schwarz, sans démonstration, à la page 6 de son Recueil de formules consacré à la fonction σ. En définissant, comme le fait généralement M. Weierstrass dans ses Leçons sur les fonctions elliptiques, la fonction σ par un double produit infini de facteurs primaires, il convient, avant de chercher l'équation différentielle et, par suite, les coefficients du développement de σ, de chercher d'abord l'équation différentielle de p. On obtient d'ailleurs facilement cette dernière en faisant usage des deux théorèmes de Liouville sur les fonctions doublement périodiques pour mettre toute fonction univoque, doublement périodique, sans point singulier essentiel fini, sous forme d'un quotient de deux produits de fonctions σ, et en comparant ensuite ces quotients de deux produits de fonctions σ dans le cas des deux fonctions doublement périodiques $p(u) - p(v)$, où v est une constante et $\frac{\partial p(u)}{\partial u}$. Une fois que l'on a établi l'équation différentielle de p, la Note que nous venons d'analyser nous montre comment on obtient les coefficients du développement de σ.

Cette marche si simple, où l'on ne suppose connus que quelques théorèmes de la théorie des fonctions univoques, semble particulièrement avantageuse pour parvenir rapidement aux formules de la théorie des fonctions elliptiques qui sont nécessaires pour les applications.

Il convient à peine de signaler des fautes d'impression dans les formules établies; elles se renouvellent cependant à plusieurs reprises.

Weingarten (*J.*). — Note relative aux déplacements, sur des surfaces, de triangles géodésiques de ces surfaces. (453-456).

M. Christoffel a recherché les conditions qui doivent être remplies, pour que tout triangle curviligne formé par des lignes géodésiques d'une surface puisse être déplacé sur cette surface d'une manière continue sans que ses éléments varient. M. Christoffel a rattaché cette question aux principes d'une théorie générale des triangles de grandeur finie situés sur une surface, principes qu'il avait exposés dès 1868 dans un Mémoire inséré parmi ceux de l'Académie royale de Prusse. Il a trouvé que les conditions cherchées se ramenaient à ce qu'un déterminant du troisième ordre doit s'annuler. Toutes les surfaces sont ainsi réparties en groupes d'après la facilité plus ou moins grande du déplacement de leurs triangles géodésiques.

M. Weingarten suit une marche différente qui lui semble préférable pour pénétrer plus avant dans la solution de la question posée.

Les conditions du déplacement des triangles infiniment petits de la surface sont évidemment des conditions nécessaires pour le déplacement de triangles finis de la surface. On peut démontrer que ce sont aussi des conditions suffisantes. Dès lors, la théorie, donnée par Gauss, des triangles infiniment petits tracés sur une surface, suffit pour résoudre entièrement la question proposée.

M. Weingarten énonce d'abord, comme conséquences immédiates de formules bien connues données par Gauss, les deux propositions suivantes :

« Lorsqu'un triangle infiniment petit peut être déplacé d'une manière continue sur une surface sans que ses côtés et ses angles varient, ses sommets parcourent, dans ce déplacement, des courbes à courbure invariable. »

« Lorsque, dans ce déplacement continu, l'un des sommets du triangle invariable, infiniment petit, peut décrire une quelconque des courbes tracées sur la surface, cette surface est une surface à courbure constante. »

M. Weingarten démontre ensuite que, dans le cas où la première de ces deux propositions a lieu pour tout triangle infiniment petit situé sur une surface, une portion finie de la surface qui est décomposable en triangles infiniment petits peut aussi être déplacée sur la surface d'une manière continue; cette surface appartient, par suite, à la classe des surfaces applicables sur une surface de révolution dont la courbure n'est pas constante.

La possibilité, observée par Bour, d'appliquer toutes les surfaces hélicoïdales sur des surfaces de révolution est un cas particulier du théorème démontré.

On peut, en résumé, énoncer les deux théorèmes suivants :

« Lorsque les côtés et angles des triangles géodésiques tracés sur une surface sont liés par *une seule* relation indépendante de la position des sommets du triangle, cette surface est une surface applicable sur une surface de révolution dont la courbure n'est pas constante. »

« Lorsque les côtés et angles des triangles géodésiques tracés sur une surface sont liés par *trois* relations indépendantes de la position des sommets des triangles, cette surface est une surface à courbure constante ».

Weierstrass. — Sur la théorie des fonctions de Jacobi à plusieurs variables. (505-508).

Une traduction de cette Note a paru dans le *Bulletin*. M. Weierstrass y indique un problème qu'il serait intéressant de voir résolu.

Voigt. — Sur la théorie du choc longitudinal d'une barre cylindrique. J. Molk.

Deuxième semestre; 1882.

Kirchhoff. — Sur la théorie des rayons lumineux. (641-689).

1. Les travaux de Fresnel ont montré que l'explication des phénomènes lumineux devait se déduire de l'hypothèse que la lumière consiste en vibrations transversales d'un milieu non pesant partout répandu, l'éther. La concordance, parfois surprenante, que présentent les phénomènes de la diffraction ou de la double réfraction avec les conséquences des théories de Fresnel a fait éclater à tous les yeux la fécondité de ces dernières. Mais, si l'expérience a pleinement confirmé les intuitions de Fresnel, il s'en faut bien que les considérations par lesquelles ces intuitions sont rattachées à l'hypothèse fondamentale du mou-

vement lumineux présentent le degré de clarté et de rigueur nécessaire pour en faire de véritables raisonnements. Depuis Fresnel, bien des géomètres ont cherché à éliminer les difficultés qui hérissent l'œuvre du grand physicien. Mais, malgré tous ces travaux, il s'en faut bien que l'Optique ait atteint le plus haut degré de perfection.

Prenons, par exemple, la théorie de la propagation de la lumière dans les milieux isotropes. Que d'hypothèses, parfois bien obscures, viennent se greffer sur les hypothèses fondamentales du mouvement lumineux! Tout d'abord le principe d'Huygens, dont l'énoncé même peut à peine être donné d'une manière précise, sert à expliquer les phénomènes de la propagation rectiligne, de la réflexion et de la réfraction de la lumière; puis viennent les modifications que l'on fait subir à ce principe pour arriver à l'explication des phénomènes de diffraction par l'emploi, si singulier parfois, des zones dites d'Huygens; puis, en descendant plus avant dans les détails, s'offrent une foule d'approximations permises pour des ouvertures très étroites que l'on étend à des ouvertures infiniment larges.

Après avoir traversé toutes ces difficultés, lorsqu'on rencontre le saisissant accord de l'expérience avec les résultats des formules de Fresnel, on est saisi par la conviction que ces formules possèdent un degré d'exactitude bien supérieur à celui des raisonnements qui ont servi à les obtenir; que, par conséquent, il est possible de les relier aux hypothèses fondamentales de l'Optique par une série de déductions plus rigoureuses.

Construire cette série de déductions, tel est le but poursuivi depuis quelque temps par les travaux de M. Fröhlich (1) et de M. Voigt (2), tel est le but vers lequel M. G. Kirchhoff vient de faire un grand pas dans un Mémoire qui résume les Leçons professées par lui pendant plusieurs années à l'Université de Berlin (3).

Dans un travail de ce genre, les principes qui servent de point de départ ont une importance capitale; nous demanderons donc la permission d'insister sur les parties du Mémoire de M. Kirchhoff qui renferment l'exposé de ces principes, pour glisser plus rapidement sur les développements analytiques dont l'intelligence ne présente aucune difficulté.

2. Commençons par l'exposé des hypothèses et des principes qui servent dans tout le cours du Mémoire; ces hypothèses et principes sont les suivants :

1° Une lumière d'une couleur déterminée correspond à un mouvement vibratoire des points matériels qui constituent un certain milieu, l'éther. Ces vibrations sont des vibrations simples; elles ont toutes la même durée de vibration. Il en résulte que, si l'on désigne par u, v, w les composantes à

---

(1) Fröhlich, *Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie*, t. III, p. 376; t. VI, p. 414; t. XV, p. 592.

(2) Voigt, *Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie*, t. III, p. 532.

(3) A cause de son importance, ce Mémoire de M. G. Kirchhoff a été traduit dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. III, p. 303; 1886.

l'instant t de l'élongation en un point (x, y, z), on a

$$(1)\qquad \begin{cases} u = \mathfrak{U}\cos 2\pi\dfrac{t}{T} + \mathfrak{U}'\sin 2\pi\dfrac{t}{T}, \\ v = \mathfrak{V}\cos 2\pi\dfrac{t}{T} + \mathfrak{V}'\sin 2\pi\dfrac{t}{T}, \\ w = \mathfrak{W}\cos 2\pi\dfrac{t}{T} + \mathfrak{W}'\cos 2\pi\dfrac{t}{T}. \end{cases}$$

$\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{V}'$, $\mathfrak{W}'$ étant six fonctions de x, y, z.

2° On nomme *intensité* de la lumière au point (x, y, z) la valeur moyenne pendant la durée d'une vibration de la force vive d'un point matériel qui vibrerait comme le point (x, y, z) et aurait une masse égale à la densité ρ de l'éther en ce point. Cette intensité est donc exprimée par l'égalité

$$(2)\qquad i = \frac{1}{2}\rho(\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{U}'^2 + \mathfrak{V}^2 + \mathfrak{V}'^2 + \mathfrak{W}^2 + \mathfrak{W}'^2).$$

Dans le cas où l'éther est homogène, ρ a la même valeur en tous les points; on peut alors laisser de côté ce facteur constant et prendre pour définition de i l'égalité

$$(2\ bis)\qquad i = \frac{1}{2}(\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{U}'^2 + \mathfrak{V}^2 + \mathfrak{V}'^2 + \mathfrak{W}^2 + \mathfrak{W}'^2).$$

3° Dans un milieu homogène et isotrope, nous admettrons que l'éther est homogène et que le mouvement de l'éther est semblable aux vibrations transversales d'un solide élastique, homogène et isotrope, c'est-à-dire que chacune des trois quantités u, v, w vérifie l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(3)\qquad a^2\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

a étant une constante dont nous trouverons bientôt la signification, et que l'on a en outre l'égalité

$$(4)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

exprimant que la densité du milieu demeure invariable dans le mouvement.

4° Nous donnerons à la quantité

$$(5)\qquad \lambda = aT,$$

qui représente une longueur constante pour le mouvement lumineux que nous considérons, le nom de *longueur d'onde* de la lumière étudiée; à l'égard de cette longueur d'onde, nous supposerons qu'on puisse la considérer comme infiniment petite.

5° Lorsqu'en un point la valeur de l'une au moins des trois quantités u, v, w sera infiniment grande par rapport aux valeurs que ces quantités ont en général dans l'espace considéré, ce point sera dit *point lumineux*.

Telles sont les définitions ou, si l'on aime mieux, les hypothèses, prises

comme point de départ par M. G. Kirchhoff; M. G. Kirchhoff fait en outre un constant usage d'un théorème dû à Clebsch [1] et qui est le suivant.

Si U, V, W représentent trois solutions quelconques de l'équation (3)

$$a^2 \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

les quantités

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \\ v &= \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}, \\ w &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned} \right.$$

vérifient à la fois les équations (4) et (3). Réciproquement, à tout système u, v, w de solutions des équations (3) et (4) correspondent trois fonctions U, V, W, vérifiant les équations (3) et (6).

3. Le premier problème à traiter est le suivant : un point lumineux étant placé dans un milieu homogène, isotrope et indéfini, quel est le mouvement engendré par ce point lumineux; ce problème peut s'énoncer encore de la manière suivante : Trouver pour u, v, w des expressions qui satisfassent aux conditions imposées à ces quantités dans ce qui précède, qui soient finies dans tout l'espace sauf au point lumineux (x_1, y_1, z_1) et qui s'annulent à l'infini.

Si l'on désigne par r_1 la distance du point (x, y, z) au point lumineux (x_1, y_1, z_1), il est aisé de voir que l'expression

$$\varphi = \frac{1}{r_1} \cos 2\pi \left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

est une intégrale de l'équation (3)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta\varphi.$$

Il en est de même de l'expression obtenue en multipliant la précédente par une constante quelconque et en ajoutant à t une constante quelconque; de même aussi des dérivées partielles d'ordre quelconque par rapport à x_1, y_1, z_1, de semblables quantités; de même encore d'une fonction linéaire et homogène à coefficients constants de ces dérivées partielles. Une semblable fonction est d'une forme très compliquée. Mais, si l'on observe que λ est, en vertu de l'une des hypothèses générales, une quantité infiniment petite, on voit sans peine que la fonction considérée peut se réduire à la forme

$$(7) \qquad \varphi = \frac{D}{r_1} \cos 2\pi \left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + \frac{D'}{r_1} \sin 2\pi \left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right),$$

D et D' étant des fonctions des seules quantités $\frac{\partial r_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial r_1}{\partial y_1}$, $\frac{\partial r_1}{\partial z_1}$, ou, ce qui revient

---

[1] Clebsch, *Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik*, Band LXI.

au même, de $\frac{\partial r_1}{\partial x}, \frac{\partial r_1}{\partial y}, \frac{\partial r_1}{\partial z}$, paramètres qui fixent la direction de la ligne r_1.

Si l'on prend pour U, V, W trois fonctions telles que φ, il paraît au premier abord que les expressions de u, v, w ne seront pas de la forme (1). Mais elles se réduiront à cette forme si l'on observe que λ est infiniment petit, et l'on aura alors

$$u = \frac{A}{r_1}\cos 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \frac{A'}{r_1}\sin 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right),$$

$$v = \frac{B}{r_1}\cos 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \frac{B'}{r_1}\sin 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right),$$

$$w = \frac{C}{r_1}\cos 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \frac{C'}{r_1}\sin 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right),$$

A, B, C, A′, B′, C′ étant des fonctions analogues à D et D′.

On a ainsi une solution du problème du mouvement engendré par un point lumineux dans un milieu indéfini.

M. G. Kirchhoff admet que cette solution est la plus générale.

Cela étant admis, il est facile de voir :

1° Que a représente la vitesse de propagation du mouvement lumineux;

2° Qu'en vertu de l'égalité (2 *bis*) l'intensité de ce mouvement a pour valeur

$$i = \frac{1}{2r_1^2}(A^2 + B^2 + C^2 + A'^2 + B'^2 + C'^2).$$

Cette intensité est donc inversement proportionnelle au carré de la distance au point lumineux; elle varie en outre avec la direction de la ligne r_1; la loi de ces variations dépend de la loi du mouvement du point lumineux.

Le mouvement lumineux engendré dans un milieu indéfini par plusieurs points lumineux peut être aisément trouvé. Il suffit de prendre pour U, V, W, u, v, w la somme des expressions qui conviendraient si chaque point lumineux existait seul.

4. Tous les autres problèmes de l'optique des milieux isotropes se ramènent à une question du genre de celle-ci :

Ayant un certain nombre de points lumineux et connaissant le mouvement lumineux que ces points engendreraient dans un espace indéfini, on place dans ce milieu un certain corps; le mouvement lumineux doit vérifier certaines conditions aux limites le long de la surface du corps; on demande de trouver ce mouvement lumineux. Ce qui distingue les problèmes d'Optique les uns des autres, c'est la forme des conditions aux limites qui doivent être vérifiées le long de la surface du corps et la forme même de ce corps.

Pour résoudre les problèmes de ce genre, M. G. Kirchhoff fait un constant usage de propositions, déjà démontrées en partie par M. Helmholtz [1] en s'appuyant sur le théorème de Green. Ces propositions sont les suivantes :

1° Étant donnés dans l'espace indéfini une surface fermée s et un certain nombre de points lumineux tous situés en dehors de cette surface s, si $\varphi_0(t)$ représente, à l'instant t, la valeur de l'une des six fonctions u, v, w, U, V, W, en un certain point $O(x_0, y_0, z_0)$ intérieur à la surface s; si $\varphi(t)$ représente la valeur de la même fonction en un point (x, y, z); si r_0 désigne la distance des

deux points (x, y, z) et (x_0, y_0, z_0); si N désigne la normale à la surface s vers l'intérieur de cette surface et si l'on pose

$$f(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial N},$$

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial N} \frac{\varphi\left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0} - \frac{f\left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0},$$

en convenant, dans la dernière différentiation, de regarder r_0 comme seul variable et de laisser aux autres quantités dont dépend $\varphi(t)$ les valeurs qu'elles ont en un point de l'élément ds, on a

$$4\pi\, \varphi_0(t) = \int \Omega\, ds,$$

l'intégration s'étendant à toute la surface s.

Si l'on suppose que jusqu'à une certaine valeur du temps l'équilibre ait régné dans tout l'espace, la même proposition s'étend au cas où les points lumineux sont intérieurs à la surface s et où le point O lui est extérieur à la seule condition de changer le sens de la normale N.

Le mouvement lumineux dans celle des deux régions de l'espace délimitées par la surface s qui ne renferme pas de point lumineux est identique au mouvement que déterminerait dans l'espace indéfini une certaine couche de points lumineux distribuée sur la surface s. Ce théorème constitue en quelque sorte une forme plus générale et plus précise du principe d'Huygens.

2° L'intégrale $\int \Omega\, ds$ s'annule si la surface fermée ne renferme ni le point O, ni les points lumineux, ou bien encore si elle renferme à la fois le point O et les points lumineux.

Ces résultats conduisent alors à la solution du problème général de l'Optique que nous avons énoncé au commencement du n° 4.

Un milieu renferme n points lumineux et un corps en dehors duquel se trouvent ces points. Un certain mouvement lumineux a lieu en dehors de ce corps. Ce mouvement lumineux est caractérisé par la connaissance des trois fonctions u, v, w ou des trois fonctions U, V, W; soit $\varphi_0(t)$ la valeur d'une de ces fonctions en un point O de l'espace considéré. On a

$$4\pi\, \varphi_0(t) = \Sigma \int \Omega\, dS + \int \Omega\, ds,$$

ds étant un élément de la surface du corps et dS un élément d'une sphère infiniment petite entourant l'un des n points.

D'autre part, si les points lumineux existaient seuls dans le milieu indéfini, ils y exciteraient un certain mouvement analogue à celui que nous avons étudié au n° 3; $\varphi_0(t)$ aurait dans ce cas une valeur $\varphi'_0(t)$, Ω une valeur Ω', et l'on aurait

$$4\pi\, \varphi'_0(t) = \Sigma \int \Omega'\, ds.$$

(¹) H. Helmholtz, *Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden* (*Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik*, Band LVII).

Mais, si l'on fait l'hypothèse que *l'introduction d'un corps étranger ne produit en général qu'une altération finie dans le mouvement lumineux au voisinage immédiat du point lumineux*, on peut remplacer dans la dernière égalité Ω par Ω' et l'on arrive à l'équation fondamentale du Mémoire de M. Kirchhoff

$$4\pi\varphi_0(t) = 4\pi\varphi'_0(t) + \int \Omega\, ds,$$

égalité qui détermine le mouvement engendré par certains points lumineux dans un espace qui renferme un corps étranger lorsqu'on connait le mouvement que ces points engendreraient dans un milieu indéfini et les valeurs de φ et de $\frac{\partial\varphi}{\partial N}$ à la surface du corps.

5. Les considérations sur lesquelles M. G. Kirchhoff fait reposer la détermination de ces quantités présentent quelques difficultés; nous croyons que ces considérations peuvent s'interpréter de la manière suivante.

Considérons un point (x, y, z) infiniment voisin de la surface de séparation de deux milieux A et B et situé dans le milieu A par exemple. Soit φ l'une des six quantités u, v, w, U, V, W relatives à ce point. A l'instant t, φ est la somme d'un certain nombre de termes de la forme

$$\psi = D\cos 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t+\alpha}{T}\right),$$

r_1 étant la distance du point (x, y, z) à un certain point (x_1, y_1, z_1), D une fonction des paramètres qui fixent la direction de la ligne r_1, α une constante particulière à chacun des termes ψ dont se compose φ. Si, lorsqu'on augmente r_1, le point (x, y, z) s'éloigne de la surface de séparation vers l'intérieur du milieu A, nous dirons que le terme ψ correspond à une onde qui se propage de la surface vers l'intérieur du milieu A. Dans le cas contraire, nous dirons que le terme ψ correspond à une onde se propageant à l'intérieur du milieu A vers la surface, ou encore à une *onde incidente située à l'intérieur du milieu* A.

Cela étant, nous faisons les *deux hypothèses* suivantes :

1° A chaque onde incidente se propageant à l'intérieur du milieu A correspond une et une seule onde, se propageant de la surface à l'intérieur du milieu A (nous la nommerons l'*onde réflechie*), une et une seule onde se propageant de la surface à l'intérieur du milieu B (nous la nommerons l'*onde réfractée*).

2° Si, en un point du milieu A infiniment voisin de la surface, ψ_i désigne le terme ψ relatif à une certaine onde incidente, ψ_r le terme ψ relatif à l'onde réfléchie correspondante, $\psi_{r'}$ le terme ψ relatif à l'onde réfractée correspondante en un point situé à l'intérieur du milieu B et infiniment voisin du précédent, on a

$$\psi_r(t) = c\psi_i(t+\gamma),$$

$$\frac{\partial\psi_r(t)}{\partial N} = -c\frac{\partial\psi_i(t+\gamma)}{\partial N},$$

et deux autres égalités analogues pour $\psi_{r'}$, N désignant la normale à la surface de séparation vers l'intérieur du premier milieu, c et γ deux constantes qui varient avec la nature des deux milieux, avec l'onde que l'on considère, avec

2nd Part.

l'orientation de la ligne r_1 qui correspond à cette onde, avec celle des six quantités u, v, w, U, V, W que ψ représente.

Ces hypothèses faites, M. Kirchhoff restreint son analyse au cas où le milieu B ne renferme pas d'onde incidente. Dans ce cas, le milieu A ne renferme que des ondes incidentes et des ondes réfléchies, en sorte que, si l'on désigne par φ_i la somme des quantités ψ_i pour un point du milieu A infiniment voisin de la surface de séparation et par φ_r la somme des quantités ψ_r pour le même point, on a

$$\varphi = \varphi_i + \varphi_r,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial N} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial N} + \frac{\partial\varphi_r}{\partial N}.$$

Ces égalités sont, avec les précédentes, celles qui, dans chaque cas particulier, servent à M. G. Kirchhoff à fixer les conditions aux limites.

L'un des cas particuliers les plus importants est celui qui est présenté par un *corps complètement noir*, c'est-à-dire par un milieu B pour lequel la constante c est toujours égale à 0. Une onde incidente qui tombe sur un pareil corps ne fournit jamais ni onde réfléchie ni onde réfractée.

6. Tels sont, en résumé, les principes sur lesquels repose l'analyse de M. G. Kirchhoff. Énonçons rapidement les résultats de cette analyse.

A un point lumineux 1, opposons un corps parfaitement noir. En un point 0 du milieu, le mouvement lumineux sera le même que si le milieu était indéfini si la ligne 10 ne rencontre pas le corps entre les points 1 et 0. Il sera nul si cette rencontre a lieu.

Ce théorème est l'énoncé sous sa forme la plus précise de la loi de la propagation rectiligne de la lumière.

La démonstration même de ce théorème montre qu'il peut cesser d'être exact dans deux cas et dans deux cas seulement. Ces cas d'exception peuvent s'énoncer de la manière suivante :

Concevons un point lumineux 1 entouré par un écran complètement noir percé d'une ouverture. Nous appellerons *bord* de l'ouverture la ligne de contact de la surface du corps qui forme l'écran avec un cône issu du point 1 et circonscrit à cette surface. Cette ligne partage la surface de l'écran en deux régions, une région intérieure et une région extérieure.

Désignons par s une surface limitée au bord de l'ouverture et formant, soit avec la surface interne de l'écran, soit avec la surface externe, une surface fermée. Soient r_1 et r_0 les distances d'un point de la surface s au point 1 et au point 0.

Les cas dans lesquels le théorème précédent peut cesser d'être exact sont ceux où est remplie l'une des conditions suivantes :

1° La quantité $r_1 + r_0$ est constante ou infiniment peu variable, soit pour une portion finie de la surface s, soit pour une portion finie de son contour.

2° La ligne 10 rencontre la surface s entre les points 1 et 0, en passant infiniment près du bord de l'écran. (Dans ces énoncés, on entend par longueur infiniment petite une longueur comparable à la longueur d'onde.)

C'est donc dans ces deux cas et dans ces deux cas seulement que se produiront les *phénomènes de diffraction*.

Fresnel a étudié les phénomènes de diffraction sur l'axe d'un écran circulaire

ou d'un trou circulaire; dans ce cas, $r_1 + r_0$ est constant pour tous les points du bord de l'écran.

Fresnel a étudié les franges voisines du bord de l'ombre géométrique d'un écran, d'une fente ou d'un cheveu. Dans ce cas la ligne 10 passe infiniment près du bord de l'écran.

Fraunhofer a étudié les phénomènes de diffraction en lumière parallèle. Dans ce cas, $r_1 + r_0$ varie infiniment peu pour les divers points de la surface s.

Dans tous ces cas, si nous posons

$$c = \int \cos 2\pi \frac{r_1 + r_0}{\lambda} ds,$$

$$s = \int \sin 2\pi \frac{r_1 + r_0}{\lambda} ds,$$

les intégrales s'étendant à la surface s, l'intensité lumineuse au point o sera donnée par la formule

$$I = \frac{1}{\lambda^2 r_0^2} \left(\frac{\partial r_1}{\partial N}\right)^2 (c^2 + s^2),$$

formule de laquelle on déduit toutes les lois des phénomènes de diffraction.

La démonstration de cette égalité suppose que les dimensions de l'ouverture diffringente sont très grandes par rapport à la longueur d'onde. Pour obtenir des spectres de diffraction, on emploie souvent des réseaux dont les fentes ont seulement une largeur de quelques longueurs d'onde. On ne saurait donc regarder comme permise l'application de l'égalité précédente à ces réseaux. Cependant, les mesures auxquelles nous devons la connaissance des longueurs d'onde ont montré que l'emploi de cette égalité donnait avec une grande exactitude la *position des maxima* de lumière; la théorie de M. G. Kirchhoff rend compte de cette particularité.

Enfin la théorie de M. G. Kirchhoff appliquée à des corps non complètement noirs conduit aux lois connues de la réflexion et de la réfraction de la lumière.

7. Dans cet exposé, nous nous sommes attaché surtout à mettre en lumière l'enchaînement logique de la théorie de M. G. Kirchhoff; si l'on admet que le but de la Physique est de représenter le plus grand nombre possible de lois naturelles comme des conséquences logiques d'hypothèses énoncées sous une forme précise, on doit reconnaître que le Mémoire dont nous venons de rendre compte fait faire à l'Optique un pas considérable vers ce but; il serait à désirer que d'autres physiciens, suivant l'exemple de M. G. Kirchhoff, parvinssent enfin à construire sur des bases solides l'édifice dont Fresnel a tracé le plan.

P. Duhem.

Lindemann. — Sur le nombre π. (679-682).

M. *Hermite* a démontré (*Comptes rendus, Paris* 1873) dans son célèbre Mémoire sur la fonction exponentielle que la base des logarithmes naturels est un nombre transcendant. Sans s'écarter du mode de démonstration de M. Hermite, M. Lindemann démontre que le rapport de la longueur d'une circonférence de cercle à son diamètre est également un nombre transcendant, c'est-à-dire n'est racine d'aucune équation algébrique à coefficients rationnels.

M. Lindemann énonce d'abord le théorème suivant, pour la démonstration

duquel il indique la marche à suivre dans le cas où le système de s équations se réduit à une seule.

« Soient $f_1(z) = 0, \ldots, f_s(z) = 0$, s équations algébriques, chacune irréductible et de la forme

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

où $a_1, \ldots, a_n$ désignent des nombres entiers. Soient $Z_i, Z'_i, \ldots$ les racines de l'équation $f_i(z) = 0$, et écrivons pour abréger Σe^{Z_i} au lieu de $e^{Z_i} + e^{Z'_i} + \ldots$. Soient enfin $N_0, N_1, \ldots, N_s$ des nombres entiers, quelconques, mais non tous nuls. Alors une relation de la forme

$$N_0 + N_1 \Sigma e^{Z_1} + \ldots + N_s \Sigma e^{Z_s} = 0$$

n'est possible que si l'une des quantités Z est nulle. »

Ce théorème une fois admis, on en déduit, pour un choix particulier des fonctions $f_i(z)$, le suivant :

« Si z est un nombre rationnel différent de zéro ou un nombre irrationnel algébrique quelconque, la quantité e^z est toujours transcendante. »

Donc, en particulier, le nombre π est un nombre transcendant.

Ainsi, il est impossible de résoudre, par des constructions algébriques, le problème de la quadrature du cercle.

Le résultat auquel est parvenu M. Lindemann met définitivement fin aux tentatives nombreuses que l'on a faites depuis des siècles pour résoudre le célèbre problème de la quadrature du cercle. Le problème ne peut être résolu non seulement à l'aide de la règle et du compas, mais encore à l'aide de constructions algébriques quelconques.

M. Lindemann fait remarquer que les théorèmes établis ont encore lieu lorsque les quantités désignées par N_i sont des nombres irrationnels algébriques quelconques. On a, en particulier, le théorème :

« Si des deux nombres x et y vérifiant l'équation $x = e^y$, l'un est rationnel ou irrationnel algébrique, l'autre est transcendant, excepté $x = 1$, $y = 0$. »

Fuchs. — Sur les équations différentielles linéaires et homogènes dont les intégrales sont liées par des relations homogènes de degrés supérieurs au premier. (703-710).

Cette Note contient, outre plusieurs théorèmes concernant le cas où l'ordre des équations différentielles considérées est quelconque, la recherche des propriétés particulières des intégrales de ces équations différentielles dans le cas où leur ordre est égal à 3.

Soit

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^3y}{dz^3} + p\frac{d^2y}{dz^2} + q\frac{dy}{dz} + ry = 0$$

une équation différentielle linéaire et homogène du troisième ordre, à coefficients fonctions rationnelles de z, appartenant à la classe d'équations caractérisées dans un précédent Mémoire de M. Fuchs (*Crelle*, t. 66, p. 146).

Supposons que les racines de toutes les équations fondamentales soient des nombres rationnels et que les éléments d'un système fondamental d'intégrales

y_1, y_2, y_3 de l'équation (A) soient liés par une équation irréductible

$$(\mathrm{B}) \qquad f(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

où f est une fonction rationnelle entière homogène du $n^{\text{ième}}$ degré.

Si $\mathrm{H}(f)$ est le covariant hessien de f, $\mathrm{H}(f) = \mathrm{X}(z)$ est racine d'une fonction rationnelle de z qui ne s'annule pas identiquement. La substitution

$$y = v\mathrm{X}(z)^{\frac{1}{3n-6}}$$

transforme l'équation (A) en

$$(\mathrm{A}') \qquad \frac{d^3 v}{dz^3} + p' \frac{d^2 v}{dz^2} + q' \frac{d}{dz} + r' v = 0.$$

Si v_1, v_2, v_3 est le système fondamental d'intégrales de (A') correspondant au système fondamental y_1, y_2, y_3 d'intégrales de (A), on a

$$(\mathrm{B}') \qquad f(v_1, v_2, v_3) = 0.$$

Soit z une valeur quelconque de la variable. Si chaque quotient de deux quelconques des intégrales de (A) prend, pour des chemins d'intégration convenablement choisis, la même valeur pour $z = z_1$ que pour $z = z$, les intégrales v_1, v_2, v_3 effectuées le long des mêmes chemins d'intégration auront en z et en z_1 des valeurs qui ne différeront que par un *même* facteur égal à une racine de l'unité.

Si l'on a $n > 2$, z_1 est fonction *algébrique* de z et toutes les intégrales de (A) sont algébriques.

Soit u_1, u_2, u_3 le système fondamental de l'équation différentielle *adjointe* à l'équation (A) (Fuchs, *Crelle*, t. 76, p. 183; Frobenius, *Crelle*, t. 77, p. 245). L'équation différentielle adjointe est ici

$$\frac{d^3 u}{dz^3} - \frac{d^2(pu)}{dz^2} + \frac{d(qu)}{dz} - ru = 0;$$

on trouve, M désignant une racine d'une fonction rationnelle de z,

$$\frac{df}{dy_i} = \mathrm{M} u_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

En particulier, pour $n = 2$, les coefficients p, q, r de l'équation différentielle (A) sont liés par la relation

$$(1) \qquad 2r = -\frac{1}{3} p^{(2)} - \frac{2}{3} pp^{(1)} - \frac{4}{27} p^3 + \frac{2}{3} pq + q^{(1)},$$

où l'on a posé

$$p^{(i)} = \frac{d^i p}{dz^i}, \qquad q^{(i)} = \frac{d^i q}{dz^i},$$

et il vient

$$\mathrm{M} = e^{-\frac{2}{3}\int p\, dz}.$$

Inversement, si les coefficients p, q, r de l'équation différentielle sont liés

par une relation (1), les intégrales y_1, y_2, y_3 sont liées par une équation (B) du *second* degré.

On voit ensuite que, pour $n = 2$, l'équation différentielle (A) coïncide avec l'équation différentielle du troisième ordre qui est vérifiée par le carré de chacune des intégrales de l'équation linéaire et homogène du second ordre

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p_1 \frac{dy}{dz} + p_0 y = 0,$$

où les coefficients p_1 et p_0 sont liés aux fonctions p, q par les équations

$$p_1 = \frac{1}{3} p, \qquad 4p_0 = q - 2p_1^2 - \frac{dp_1}{dz}$$

et sont donc aussi fonctions rationnelles de z.

Ainsi se trouve élucidé le cas $m = 3$, $n = 2$.

Soit maintenant une équation différentielle d'ordre m, dont les coefficients soient fonctions rationnelles de z,

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dz^m} + f_1(z) \frac{d^{m-1} y}{dz^{m-1}} + \ldots + f_m(z) y = 0,$$

et supposons que toutes les intégrales de cette équation différentielle soient algébriques.

Soit z une valeur quelconque de la variable. Si, pour des chemins d'intégration convenablement choisis, chaque quotient de deux quelconques des intégrales de l'équation différentielle a, pour $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ et pour aucune autre valeur de la variable, la même valeur que pour z, on peut former une fonction rationnelle de z, $\varphi(z)$ telle que, pour les mêmes chemins d'intégration, la quantité

$$w = y\, \varphi(z)^{-\frac{1}{\mu}},$$

dans laquelle y désigne l'une quelconque des intégrales de l'équation différentielle (I) et μ un nombre entier, prenne en $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ des valeurs qui ne diffèrent de la valeur de la même quantité en z que par des facteurs égaux à des racines de l'unité. D'ailleurs w vérifie l'équation différentielle, à coefficients fonctions rationnelles de z,

$$\frac{d^m w}{dz^m} + g_1(z) \frac{d^{m-1} w}{dz^{m-1}} + \ldots + g_m(z) w = 0.$$

Si l'on pose, α étant une quantité quelconque,

$$t = (\alpha - z)(\alpha - z_1)\ldots(\alpha - z_{\sigma-1}),$$

t est une fonction rationnelle de z.

On peut, en prenant t comme variable indépendante, transformer l'équation différentielle que nous venons d'écrire en cette autre, dont les coefficients sont fonctions rationnelles de t,

$$\frac{d^m w}{dt^m} + h_1(t) \frac{d^{m-1} w}{dt^{m-1}} + \ldots + h_m(t) w = 0.$$

Cette dernière équation différentielle jouit des deux propriétés suivantes :

A une valeur de t arbitrairement choisie n'en correspond aucune autre t_1, telle

que chaque quotient de deux quelconques des intégrales de l'équation différentielle ait même valeur pour t_1 que pour t.

Le nombre V de valeurs que prend une quelconque des intégrales de l'équation différentielle lorsque la variable t suit tous les chemins fermés possibles est égal au nombre de valeurs que prend une quelconque des intégrales de l'équation différentielle (I) lorsque la variable z correspondante suit aussi tous les chemins fermés possibles; en ne comptant pas deux fois les valeurs dont le quotient est une constante.

Le nombre de valeurs différentes de z correspondant à une même valeur du quotient de deux quelconques des intégrales de l'équation différentielle considérée n'est pas inférieur à $\frac{m-1}{2}$ V.

Ceci posé, revenons au cas où $m = 3$, et où le degré n de l'équation (B) est plus grand que 2. Désignons par p la classe de l'équation (B), c'est-à-dire (Riemann) le nombre d'intégrales de première espèce, linéairement indépendantes, qui appartient à cette équation.

M. Fuchs parvient aux résultats suivants :

» Si p est plus grand que l'unité, le nombre de racines *réduites* (Fuchs, *Crelle*, t. 81, p. 111) de l'équation algébrique que vérifie l'intégrale générale de l'équation différentielle (A) n'est pas plus grand que *quatre*.

» Si p est égal à l'unité, ce même nombre de racines réduites est égal à l'un des nombres 2, 3, 4, 6.

» Si p est nul, l'intégrale générale de l'équation différentielle (A) est (à un facteur près qui est racine d'une fonction rationnelle) une fonction rationnelle entière et homogène de degré n du système fondamental d'intégrales d'une équation différentielle du *second* ordre, à coefficients rationnels en z, linéaire, homogène et pouvant être intégrée algébriquement ».

Dans les trois cas, $p > 1$, $p = 1$, $p = 0$, les intégrales de l'équation différentielle (A) sont fonctions algébriques de z. Comme les éléments du système fondamental y_1, y_2, y_3 de toute équation différentielle (A) pouvant être intégrée algébriquement sont liés par une équation (B), les résultats obtenus élucident complètement le cas où une équation différentielle du troisième ordre, linéaire, homogène, à coefficients rationnels, n'a que des intégrales algébriques.

M. Fuchs termine en annonçant un Mémoire plus détaillé sur le même sujet, dans lequel il se propose aussi de comparer les théorèmes concernant le nombre de racines réduites dans le cas où l'équation différentielle (A) est intégrable algébriquement aux résultats obtenus par M. Jordan (*Crelle*, t. 84, p. 89).

Kronecker. — Sur les déterminants mineurs d'un système symétrique. (821-824).

Cette Note, d'une rare élégance, débute par la définition des systèmes réciproques.

Deux systèmes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{1n} & a'_{2n} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

sont *réciproques* lorsque leurs éléments sont liés par les relations

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} a_{h1}a'_{1h} + a_{h2}a'_{2h} + \ldots + a_{hn}a'_{nh} = 1, \\ a_{h1}a'_{1k} + a_{h2}a'_{2k} + \ldots + a_{hn}a'_{nk} = 0, \end{cases}$$

où h désigne successivement chacun des nombres $1, 2, \ldots, n$ et où k prend, pour chacune des valeurs de h, toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$, excepté $k = h$.

On peut résumer ces deux égalités en une seule, en introduisant un symbole δ_{hk} égal à l'unité pour $h = k$ et égal à zéro pour h différent de k. On a alors

$$a_{h1}a'_{1k} + a_{h2}a'_{2k} + \ldots + a_{hn}a'_{nk} = \delta_{hk},$$
$$(h, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Le théorème de multiplication des déterminants appliqué aux déterminants des deux systèmes réciproques nous donne immédiatement

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \ldots & a'_{nn} \end{vmatrix} = 1.$$

Cette notion de système réciproque permet d'énoncer d'une manière simple les théorèmes concernant les mineurs des déterminants et d'apercevoir ainsi plus clairement la portée de ces théorèmes.

Tout d'abord, nous observons que les deux systèmes formés par les mineurs d'un ordre quelconque de deux systèmes réciproques sont aussi réciproques. Ainsi, par exemple, pour $n = 4$, les deux systèmes formés l'un par les trente-six mineurs du second ordre du système (a)

$$(\mathrm{II})\qquad a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21}, \quad \ldots,$$

et l'autre par les trente-six mineurs du second ordre du système (a')

$$a'_{11}a'_{22} - a'_{12}a'_{21}, \quad \ldots,$$

sont réciproques. Il est facile de le vérifier directement.

D'autre part, le système formé par les déterminants mineurs *adjoints* des éléments d'un système de mineurs, divisés par le déterminant du système total, est aussi réciproque de ce système de mineurs. Ainsi, dans l'exemple choisi, le système dont les éléments sont les mineurs adjoints des éléments du système (II), divisés par le déterminant du système total, est réciproque du système (II).

Donc le déterminant adjoint d'un déterminant mineur quelconque, divisé par le déterminant total du système, est égal au déterminant mineur correspondant du système réciproque.

En énonçant ainsi le théorème de Jacobi, on voit que les développements donnés par M. Franke dans le t. 61 du *Journal de Crelle* n'offrent qu'en apparence un plus grand caractère de généralité que le théorème de Jacobi lui-même. On démontre, en effet, qu'ils découlent immédiatement de ce théorème.

On peut démontrer directement ce théorème de Jacobi en faisant usage de n^2 quantités *indéterminées* $u_{h,i}$ $(h, i = 1, 2, \ldots, n)$. A cet effet, écrivons les équa-

tions (I)

$$\sum_{(i)} (u_{hi} + a_{hi}) a'_{ik} = \delta_{hk} + \sum_{(i)} u_{hi} a'_{ik},$$

$$(h, i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

et formons le déterminant dont les éléments sont les premiers membres de ces équations et le déterminant dont les éléments sont les seconds membres de ces équations. Ces deux déterminants sont manifestement égaux; on a donc

$$| u_{gh} + a_{gh} | . | a'_{ik} | = \left| \delta_{gk} + \sum_{(h)} u_{gh} a'_{hk} \right|,$$

$$(g, h, i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

En développant les deux membres de cette égalité suivant les produits des indéterminées, on obtient comme coefficient de

$$u_{g_1 h_1} u_{g_2 h_2} u_{g_3 h_3} \ldots u_{g_m h_m},$$

dans le premier membre, un produit de deux déterminants

$$| a'_{ik} |, \text{ adjoint de } | a_{gh} |,$$

et, dans le second membre, le déterminant

$$| a'_{hg} |,$$

$$\begin{pmatrix} g = g_1, g_2, \ldots, g_m; & i = 1, 2, \ldots, n \\ h = h_1, h_2, \ldots, h_m; & k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Ces deux coefficients sont nécessairement égaux. En se rappelant que l'on a

$$| a'_{ik} | . | a'_{ik} | = 1 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

il vient donc

$$\frac{1}{| a_{ik} |} \cdot \text{adjoint de } | a_{gh} | = | a'_{hg} |,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi, dans le cas particulier considéré, où $n = 4$ et $m = 2$, pour trouver, par exemple, le coefficient de $u_{23} u_{34}$ indépendant des autres indéterminées, il suffit de remplacer toutes les indéterminées par zéro, excepté u_{23} et u_{34}; ce coefficient est donc, dans le développement du premier déterminant, égal à

$$(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) | a'_{ik} |;$$

dans le développement du second déterminant, il est égal à

$$a'_{32} a'_{43} - a'_{33} a'_{42}.$$

On a donc

$$\frac{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}{| a_{ik} |} = a'_{32} a'_{43} - a'_{33} a'_{42}.$$

c'est-à-dire

$$\frac{\text{adjoint de } |a_{gh}|}{|a_{ik}|} = |a'_{hg}|,$$
$$(g = 2, 3; \quad h = 3, 4) \text{ (1)}.$$

Supposons maintenant que le système formé par les n^2 éléments a_{ik} soit un système symétrique, c'est-à-dire que l'on ait

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

Transformons alors, pour une substitution à coefficients *indéterminés*, les quantités a_{ik} en d'autres U_{ik}. Soient

$$U_{ik} = \sum_{(g,h)} a_{gh} u_{gi} u_{hk}, \quad (g, h, i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

ces substitutions. On a alors, entre les mineurs d'ordre m du premier système et du système transformé, les relations

$$|U_{ik}| = \Sigma |a_{gh}| . |u_{gi}| . |u_{hk}|,$$
$$\begin{pmatrix} g = g_1, g_2, \ldots, g_m; & i = i_1, i_2, \ldots, i_m, \\ h = h_1, h_2, \ldots, h_m; & k = k_1, k_2, \ldots, k_m, \end{pmatrix},$$

où la somme Σ est étendue à *tous* les systèmes possibles de m indices g_1, g_2, ..., g_m et de m indices h_1, h_2, ..., h_m que l'on peut former avec les nombres 1, 2, ..., n.

Tout déterminant mineur d'ordre m des quantités transformées U_{ik} est ainsi une *forme* des indéterminées u_{ik}; et les coefficients de cette forme sont *tous* les déterminants mineurs d'ordre m du système des quantités données a_{ik}.

M. Kronecker démontre qu'il y a des relations linéaires entre les différents produits de mineurs

$$|u_{gi}| . |u_{hk}|,$$

qui paraissent multipliés par les mineurs $|a_{gh}|$ dans l'expression de $|U_{ik}|$; ces relations sont les mêmes que celles qui lient les mineurs $|a_{gh}|$ eux-mêmes lorsque l'on considère les quantités a comme des indéterminées.

On peut, pour abréger, représenter les différents mineurs d'ordre m

$$|a_{gh}|$$

par les symboles A_1, A_2, ..., A_ν et les différents produits correspondants

$$|u_{gi}| . |u_{hk}|,$$
$$\begin{pmatrix} g = g_1, g_2, \ldots, g_m; & i = 1, 2, \ldots, m \\ h = h_1, h_2, \ldots, h_m; & k = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

par P_1, P_2, ..., P_ν. Soient alors

$$A'_1, \; A'_2, \ldots, \; A'_\mu$$

μ fonctions linéaires de A_1, A_2, ..., A_ν quelconques mais linéairement indépendantes les unes des autres et telles que l'on puisse exprimer les mineurs A par

(1) Dans le texte des *Sitzungsberichte* il y a, si je ne me trompe, une faute d'impression, $|a'_{gh}|$ au lieu de $|a'_{hg}|$.

ces A′. On a alors

$$A_h = \sum_{(g)} c_{hg} A'_g$$

et, de même,

$$P_h = \sum_{(g)} c_{hg} P'_g ;$$

donc

$$| U_{ik} | = \sum_{(h, g, g')} c_{hg} c_{hg'} A'_g P'_{g'},$$

$$(g, g' = 1, 2, \ldots, \mu; \quad h = 1, 2, \ldots, \nu; \quad i, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Je rappelle que l'on nomme déterminant *mineur principal* un déterminant mineur pour lequel les deux indices i et k prennent les mêmes valeurs.

Chaque déterminant mineur principal $| U_{ik} |$ est ainsi représenté par une fonction linéaire et homogène de tous les déterminants mineurs linéairement indépendants du système (a_{ik}), $(i, k = 1, 2, \ldots, m)$.

Les coefficients de cette fonction linéaire et homogène sont des fonctions entières, *linéairement indépendantes,* des indéterminées u_{ik}. Cette propriété importante résulte immédiatement de ce que le déterminant

$$\left| \sum_{(h)} c_{hg} c_{hg'} \right|,$$

$$(g, g' = 1, 2, \ldots, \mu; \quad h = 1, 2, \ldots, \nu)$$

est nécessairement différent de zéro comme étant une somme de carrés.

C'est d'ailleurs là une propriété non seulement des mineurs principaux $| U_{ik} |$, mais encore de tous les mineurs $| U_{ik} |$. On s'en rend compte en démontrant que tout mineur $| U_{ik} |$ peut être représenté par une somme de mineurs d'un système transformé dont l'un soit un mineur principal multiplié par une quantité indéterminée. Il ne semble pas que l'on ait remarqué avant M. Kronecker que les mineurs des systèmes symétriques soient, dans le cas général, liés par des identités linéaires.

M. Kronecker indique la relation suivante :

$$| a_{gh} | = \sum_{(r)} | a_{ik} |,$$

$$\left(\begin{array}{ll} g = 1, 2, \ldots, m; & h = m+1, m+2, \ldots, 2m, \\ i = 1, 2, \ldots, m-1, r; & k = m+1, \ldots, r-1, m, r+1, \ldots, 2m \end{array} \right)$$

où la somme Σ est étendue à $r = m+1, m+2, \ldots, 2m$.

Il ne sera peut-être pas inutile d'écrire cette relation tout au long dans un cas particulier. Pour $m = 4$, on a

$$\begin{vmatrix} a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} \\ a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} \\ a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} \\ a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} \\ a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} \\ a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} \\ a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{15} & a_{14} & a_{17} & a_{18} \\ a_{25} & a_{24} & a_{27} & a_{28} \\ a_{35} & a_{34} & a_{37} & a_{38} \\ a_{45} & a_{44} & a_{47} & a_{48} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a_{15} & a_{17} & a_{14} & a_{18} \\ a_{25} & a_{27} & a_{24} & a_{28} \\ a_{35} & a_{37} & a_{34} & a_{38} \\ a_{45} & a_{47} & a_{44} & a_{48} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{14} \\ a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{24} \\ a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{34} \\ a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

On vérifie facilement cette relation en développant les cinq déterminants par rapport aux éléments de leur dernière ligne horizontale et en tenant compte de ce que $a_{ik} = a_{ki}$ par hypothèse. Quel que soit m, la vérification se ferait de même.

Il faut maintenant remarquer que les mineurs principaux d'ordre $(n-m)$

$$|U_{ik}|, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m)$$

deviennent, pour $p = n - m$, des déterminants d'ordre p identiques à ceux que M. Darboux a désignés par Φ_p, si l'on prend pour les quantités désignées par X_k^i par M. Darboux les réciproques des indéterminées u_{ik}. [Comparez Darboux, *Mémoire sur la théorie algébrique des formes quadratiques* (*Journal de Liouville*, 2e série, t. XIX)]. Les développements précédents permettent donc aussi de mettre bien en évidence les propriétés des déterminants Φ_p qui ont été développées par M. Darboux.

Kronecker. — Sur la composition des équations abéliennes. (1059-1071).

Dans les *Monatsberichte* de 1853, M. Kronecker a établi le théorème fondamental :

« Les racines de toute équation abélienne, à coefficients entiers, peuvent être représentées par des fonctions rationnelles de racines de l'unité. »

Considérons le cas particulier où le degré n de l'équation abélienne est égal à 3.

En tenant compte de la forme des équations de la division du cercle données par Gauss (*Disq. arith.*, art. 358) et en y ajoutant l'équation

$$y^3 - 3y + 1 = 0,$$

dont les racines sont les trois périodes

$$2\cos\frac{2\pi}{9}, \quad 2\cos\frac{4\pi}{9}, \quad 2\cos\frac{8\pi}{9},$$

formées à l'aide des racines de l'unité, on peut, dans le cas particulier considéré, énoncer le théorème précédent en disant :

« Les racines de toutes les équations abéliennes du troisième degré peuvent être exprimées rationnellement par les racines des équations abéliennes

$$y^3 - 3py + p(r+s) = 0,$$

où p est égal successivement à l'unité et aux nombres premiers de la forme $6n+1$, et où l'on a, pour $p = 1$,

$$r = 1, \qquad s = 0;$$

pour tout autre p,

$$r^2 - rs + s^2 = p, \qquad r \equiv s \pmod 3.$$

On suppose ici déjà connu le théorème démontré dans la théorie des formes quadratiques que, pour tout nombre premier p de la forme $6n+1$, il existe

des nombres r, s, tels que

$$r^2 - rs + s^2 = p.$$

Sous cette forme, l'énoncé du théorème est débarrassé de tout rapport avec les équations de la division du cercle. On est alors amené à se demander s'il ne serait pas possible de démontrer directement ce théorème pour $n = 3$, et un théorème analogue pour n quelconque, sans passer par l'intermédiaire des équations de la division du cercle. M. Kronecker répond que cela est possible et, ce qui n'est pas sans importance, qu'on le peut, non pas en employant un artifice particulier à la question que l'on a en vue, mais en introduisant dans cette question particulière une notion essentielle dans toute une série de questions d'Algèbre, à savoir la notion de *composition*.

Gauss, dans ses *Disquisitiones*, a d'abord introduit la notion de composition des formes quadratiques.

Dans son Mémoire fondamental : *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*, M. Kronecker a été amené à introduire, pour faciliter l'étude générale des formes algébriques, la notion toute semblable de *composition de formes algébriques quelconques*. Ici il introduit de même et d'après les mêmes principes la notion de *composition des équations abéliennes*.

Rappelons, pour commencer, la définition des fonctions cycliques [1].

Une fonction rationnelle de $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ quantités

$$x_{h_1, h_2, \ldots, h_\nu},$$
$$(h_\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n_\alpha - 1; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \nu)$$

(où nous conviendrons que tout indice $h_\alpha \overset{=}{>} n_\alpha$ doit être remplacé par un indice congru suivant le module n_α, et plus petit que n_α) est *cyclique* lorsqu'elle ne change pas quand on substitue, pour $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$, à la quantité

$$x_{h_1, h_2, \ldots, h_{\alpha-1}, h_\alpha, h_{\alpha+1}, \ldots, h_\nu},$$

la quantité

$$x_{h_1, h_2, \ldots, h_{\alpha-1}, h_{\alpha+1}, h_{\alpha+1}, \ldots, h_\nu}.$$

Ces $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ quantités

$$x_{h_1, h_2, \ldots, h_\nu}$$

sont racines d'une équation abélienne, dans le sens le plus général que l'on attache à ce mot, lorsque leurs fonctions symétriques et cycliques sont prises comme éléments du domaine de rationnalité [2].

Nous pouvons répéter ce que nous venons de dire en prenant, au lieu des $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ quantités x, $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ quantités

$$y_{k_1, k_2, \ldots, k_\nu},$$
$$(k_\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n_\alpha - 1; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \nu).$$

---

(1) Comparez KRONECKER, *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1877.

(2) Pour les définitions de domaine de rationnalité et autres notions dont il est fait ici usage, comparez les *Grundzüge* déjà cités de M. Kronecker, ou mon Mémoire sur la *Théorie générale de l'élimination* (*Acta math.*, t. VI).

Considérons alors les quantités z définies par les équations

$$z_{h_1+k_1, h_2+k_2, \ldots, h_\nu+k_\nu} = \Sigma x_{h_1, h_2, \ldots, h_\nu} \cdot y_{k_1, k_2, \ldots, k_\nu},$$

où la somme Σ est étendue aux $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ systèmes de valeurs des indices h et k pour lesquels

$$h_1 + k_1, \quad h_2 + k_2, \quad \ldots, \quad h_\nu + k_\nu,$$

ont des valeurs constantes. Ces quantités z, qui sont fonctions bilinéaires des quantités x et y, sont évidemment au nombre de $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$.

On voit sans peine que toute fonction cyclique de ces quantités z est fonction cyclique des quantités x et aussi fonction cyclique des quantités y.

Il résulte de ce théorème que, si l'on prend comme éléments du domaine de rationnalité les fonctions symétriques et cycliques des quantités x, ainsi que les fonctions symétriques et cycliques des quantités y, les quantités z sont racines d'une équation abélienne.

Ceci posé, nous donnerons la définition suivante :

L'équation abélienne $Z = 0$, *dont les racines sont les* $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ *quantités* z, *est l'équation* composée *de l'équation abélienne* $X = 0$ *dont les racines sont les quantités* x *et de l'équation abélienne* $Y = 0$ *dont les racines sont les quantités* y.

Le domaine de rationnalité de l'équation abélienne composée $Z = 0$ se compose, par définition, des éléments des domaines de rationnalité des deux équations abéliennes composantes $X = 0$, $Y = 0$. De même, le domaine du genre déterminé par une quelconque des racines de l'équation abélienne composée se compose des éléments qui déterminent les deux domaines des genres des racines des équations composantes.

Suivant toujours l'exemple de Gauss qui étend aux *classes* la composition des formes qu'il considère, M. Kronecker étend la composition des équations aux *genres* auxquels ces équations appartiennent. Alors, d'après ce que nous venons d'observer, à la composition des genres d'équations abéliennes correspond la composition des domaines des genres de leurs racines.

M. Kronecker indique ensuite comment on peut *décomposer* les équations abéliennes en équations abéliennes qu'il nomme *élémentaires*. Cette décomposition repose sur des formules où figurent des racines de l'unité, formules que je citerai tout à l'heure, dans le cas particulier où $\nu = 1$. M. Kronecker fait d'ailleurs lui-même observer que, comme il a démontré [1] que les équations abéliennes, dans le sens le plus général de ce mot [2], se ramènent aux équations abéliennes simples où l'on a $\nu = 1$, il suffit d'effectuer cette décomposition dans le cas particulier où l'on a $\nu = 1$. Mais alors les formules dont nous venons de parler et les divers résultats sont bien plus simples. Nous conviendrons une fois pour toutes, avec M. Kronecker, de réserver le nom d'équations abéliennes à ces équations abéliennes simples où $\nu = 1$.

---

[1] Voir *Monatsberichte der Berliner Akademie,* 1853.

[2] On pourrait peut-être, pour éviter toute confusion, nommer ces équations abéliennes, dans le sens le plus général de ce mot, équations *cycloïdales,* comme je l'ai fait dans le *Bulletin,* dans le compte rendu du *Traité des substitutions* de M. Netto.

En changeant les notations, on définit n quantités

$$x_{h'+h''}$$

par les n équations

$$x_{h'+h''} = \Sigma x'_{h'} x''_{h''} \qquad [h', h'' = 0, 1, \ldots, (n-1)],$$

où les quantités $x'_{h'}$ sont les racines d'une équation abélienne $X' = 0$; les quantités $x''_{h''}$ sont les racines d'une équation abélienne $X'' = 0$ et où, dans chaque équation, la somme Σ est étendue aux n systèmes h' et h'', tels que $h' + h''$ ait une valeur constante.

Ces n quantités

$$x_{h'+h''}$$

sont alors racines d'une équation abélienne $X = 0$ dont le domaine de rationnalité se compose des éléments des domaines de rationnalité des deux équations abéliennes $X' = 0$ et $X'' = 0$.

On voit sans peine qu'en composant *trois* équations abéliennes, dont les racines sont

$$x'_{h'}, \quad x''_{h''}, \quad x'''_{h'''} \qquad [h', h'', h''' = 0, 1, \ldots, (n-1)],$$

on obtient une nouvelle équation abélienne dont les n racines sont données par les relations

$$x_{h'+h''+h'''} = \Sigma x'_{h'} x''_{h''} x'''_{h'''},$$

où, pour chaque relation, la somme Σ est étendue à tous les systèmes de valeurs indiquées de h', h'', h''' tels que $h' + h'' + h'''$ soit constant.

Si l'on désigne par ω une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité, et si l'on pose

$$(B) \quad \left\{ \begin{aligned} \varpi_h &= \Sigma \omega^{hr} x_r, \\ \varpi'_{h'} &= \Sigma \omega^{h'r} x'_r, \\ \varpi''_{h''} &= \Sigma \omega^{h''r} x''_r, \\ (h, h', h'', r &= 0, 1, 2, \ldots, n-1), \end{aligned} \right.$$

on a

$$\varpi_h = \varpi'_{h'} . \varpi''_{h''},$$

formule qui va nous permettre d'effectuer la décomposition des équations abéliennes.

A cet effet, nous commencerons par fixer un domaine de rationnalité $[R, R', \ldots, R^{(\mu)}]$. Alors une équation abélienne quelconque de degré n, dont nous désignerons les racines par $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, peut être décomposée en deux autres équations abéliennes lorsque l'expression ϖ_h formée à l'aide de ces racines peut être mise sous la forme d'un produit de deux expressions analogues ϖ'_h et ϖ''_h; donc aussi lorsque l'on peut trouver ϖ'_h et ϖ''_h, telles que

$$(\varpi_h)^n = (\varpi'_{h'})^n (\varpi''_{h''})^n.$$

Or ces trois puissances $n^{\text{ièmes}}$ appartiennent au domaine de rationnalité déterminé par $\omega, R, R', \ldots, R^{(\mu)}$. Donc le problème est bien déterminé. Il s'agit de décomposer $(\varpi_h)^n$ en facteurs dans un domaine connu $[\omega, R, R', \ldots, R^{(\mu)}]$.

Mais cette décomposition est une application des théories exposées dans le Mémoire fondamental déjà cité de M. Kronecker [1].

Bornons-nous d'abord au cas particulier où le domaine de rationnalité donné $[R, R', \ldots, R^{(k)}]$ est simplement $R = 1$ et où, d'autre part, n est un nombre premier.

On peut alors caractériser *a priori*, par le procédé de décomposition indiqué, les équations abéliennes *élémentaires* de degré n à l'aide desquelles on peut obtenir par composition *toutes* les équations abéliennes de degré n. Sans doute il faut ensuite démontrer qu'il y a de telles équations abéliennes. Mais, si l'on suit la méthode des *Disquisitiones*, on ne peut également se dispenser de faire une démonstration analogue; ainsi, pour $n = 3$, il faut démontrer qu'il existe des solutions entières de l'équation $r^2 - rs + s^2 = p$ lorsque le nombre premier p est de la forme $6n + 1$, d'où résulte l'existence d'une équation (A) pour chaque nombre premier de la forme $6n + 1$.

Pour le domaine de rationnalité $R = 1$ et pour $n = 4$, la série complète des équations abéliennes *élémentaires* se compose :

1° Des équations du second degré dont les racines sont les racines carrées de (-1) et de tous les nombres premiers de la forme $4k - 1$. On peut écrire ces équations

$$(C) \qquad x^2(x^2 - q) = 0,$$
$$(q = -1, 3, 7, 11, 19, \ldots).$$

2° Des équations abéliennes du quatrième degré

$$(D) \qquad x^4 - x^2 + \frac{b^2}{4(a^2 + b^2)} = 0,$$

dont les racines peuvent être représentées par

$$\cos \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a}.$$

a et b désignent successivement tous les nombres entiers, tels que $a^2 + b^2$ soit égal au nombre 2 ou à l'un des nombres premiers impairs de la forme $4k + 1$ et que $(a + bi)$ soit un nombre premier complexe *primaire* dans le sens attaché par Gauss à ce mot.

En composant les équations (C) *et* (D) *entre elles et avec des équations du quatrième degré dont les quatre racines sont rationnelles, on peut former toutes les équations abéliennes du quatrième degré à coefficients entiers.*

Il est intéressant de constater qu'il n'est pas nécessaire de composer plus d'une fois avec elle-même chacune des équations (D) pour obtenir toutes les équations abéliennes du quatrième degré à coefficients entiers.

---

[1] *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen.* Berlin, Reimer; 1882 (*Bulletin*, VIII, p. 145).

En général, en composant une équation abélienne irréductible du $n^{\text{ième}}$ degré avec une équation dont les n racines sont rationnelles, on obtient une équation du même genre. Inversement *toute* équation de degré n d'un genre donné peut être obtenue par la composition d'*une* équation abélienne irréductible du $n^{\text{ième}}$ degré de ce genre et d'équations dont les n racines sont rationnelles.

Enfin on peut observer qu'en composant une équation abélienne avec elle-même, on obtient une équation du même genre. La suite des racines change alors, il est vrai, mais de manière que les fonctions cycliques restent les mêmes.

Lorsque le domaine de rationnalité est $R = \sqrt{n}$, où n est un nombre entier, nous rencontrons par le même procédé de décomposition les équations de la division des fonctions elliptiques à modules singuliers.

En général, nous avons ainsi par ce procédé de décomposition une définition *a priori* algébrico-arithmétique d'équations bien importantes au point de vue des développements contemporains de l'Analyse.

Lipschitz. — Recherches sur la détermination des surfaces jouissant de certaines propriétés concernant leurs courbures. (1077-1082.)

I.

1. Considérons une variété d'ordre n, déterminée par n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dans laquelle le carré d'un élément linéaire est donné par la somme

$$\sum_{k=1}^{n} dx_k^2.$$

Soit

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

une fonction donnée de ces n variables. Si nous égalons la fonction φ à une constante c, nous aurons une variété d'ordre $(n-1)$

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c.$$

En tenant compte de la relation

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx_k = 0,$$

et en posant [1]

$$\xi_h = \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} : \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

on obtient facilement pour le rayon de courbure ρ d'une section normale quel-

---

[1] Comparez le Mémoire de M. Lipschitz, *Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen* (*Journal de Crelle*, t. 78).

conque au point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la surface $\varphi = c$, l'expression

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sum_{k=1}^{n} d\xi_h \, dx_h}{\sum_{k=1}^{n} dx_k^2}.$$

On peut dire que les quantités $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont les cosinus des angles que la normale à la variété d'ordre $(n-1)$, $\varphi = c$, fait avec les n axes de coordonnées. Elles sont d'ailleurs liées par la relation

$$\sum_{h=1}^{n} \xi_h^2 = 1$$

et peuvent être aussi envisagées comme les n coordonnées d'un point situé sur une variété d'ordre $(n-1)$ qui, pour $n = 3$, est la sphère de Gauss et que nous pouvons également nommer, dans le cas général, sphère de rayon égal à l'unité dont le centre est à l'origine des coordonnées.

Ces coordonnées $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont liées aux éléments différentiels $dx_1, \ldots, dx_n$ par la relation

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \, dx_k = 0.$$

A chaque point $(x_1, \ldots, x_n)$ de la variété $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = c$ correspond ainsi, par définition, un point déterminé $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de la sphère

$$\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1.$$

On peut aussi considérer inversement les $(n-1)$ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ comme des fonctions des $(n-1)$ variables indépendantes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, lorsque le déterminant fonctionnel

$$\Sigma \pm \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}$$

a une valeur finie différente de zéro.

M. Lipschitz cherche d'abord à transformer cette condition.

Dans son Mémoire déjà cité [1], le problème des maxima et minima de l'expression trouvée plus haut pour ρ est ramené à la résolution de n équations

$$d\xi_h + \omega \, dx_h = 0,$$

et à chacune des $(n-1)$ racines réelles $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ de l'équation du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré que l'on obtient pour ω correspond une des $(n-1)$ valeurs réelles cherchées de ρ, par les relations

$$\omega_h \cdot \rho_h = -1 \qquad [h = 1, 2, \ldots, (n-1)].$$

---

[1] *Journal de Crelle*, t. 78.

Mais, si l'on envisage les variables $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ comme des fonctions des variables $x_1, \ldots, x_{n-1}$, la relation

$$d\xi_h + \omega\, dx_h = 0$$

peut s'écrire, pour $h = 1, 2, \ldots, (n-1)$,

$$\frac{\partial \xi_h}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_h}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial x_h} + \omega\right) dx_h + \ldots + \frac{\partial \xi_h}{\partial x_{n-1}} dx_{n-1} = 0$$

La quantité ω est ainsi déterminée par l'équation du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \omega & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \omega & \ldots & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_{n-1}} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} + \omega \end{vmatrix} = 0,$$

dans laquelle le terme constant est le déterminant fonctionnel

$$\Sigma \pm \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}.$$

Ce déterminant fonctionnel est donc égal à $(-1)^{n-1}\omega_1\omega_2 \ldots \omega_{n-1}$, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{\rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_{n-1}}.$$

Or c'est précisément cette expression $\frac{1}{\rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_{n-1}}$ que M. Kronecker a désignée [1] par *courbure de la variété d'ordre* $(n-1)$ considérée, en étendant à n variables la notion de courbure donnée par Gauss.

Pour que l'on puisse exprimer les variables x en fonction des variables ξ, il faut donc que la courbure ne soit nulle en aucune partie de la variété d'ordre $(n-1)$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = c$. Nous supposerons dans ce qui va suivre que la surface donnée $\varphi = c$ est telle que cette condition soit remplie.

2. L'expression trouvée pour $\frac{1}{\rho}$ contient au numérateur et au dénominateur des formes quadratiques des différentielles dx_k. On peut transformer ces formes en formes quadratiques des différentielles $d\xi_h$.

En posant, pour abréger,

$$\eta_i = \frac{\xi_i}{\xi_n}, \qquad [i = 1, 2, \ldots, (n-1)],$$

---

[1] *Comparez* KRONECKER, *Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln* (*Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1869).

on peut écrire l'équation $\sum_{h=1}^{n} \xi_h \, dx_h = 0$, établie plus haut,

$$-dx_n = \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i \, dx_i;$$

la condition d'intégrabilité $\frac{\partial \nu_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial \nu_\beta}{\partial x_\alpha}$ $[\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, (n-1), \alpha \gtrless \beta]$ est ici manifestement vérifiée.

On a aussi, en introduisant les quantités ν_i dans l'expression trouvée pour $\frac{1}{\rho}$, une nouvelle expression

$$\frac{1}{\rho} = \frac{N}{D},$$

où

$$\frac{N}{\xi_n} = \frac{\partial \nu_1}{\partial x_1} dx_1^2 + \left(\frac{\partial \nu_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \nu_2}{\partial x_1}\right) dx_1 \, dx_2 + \ldots + \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x_{n-1}} dx_{n-1}^2,$$

et où le dénominateur

$$D = dx_1^2 + \ldots + dx_{n-1}^2 + (\nu_1 \, dx_1 + \ldots + \nu_{n-1} \, dx_{n-1})^2$$

est une forme essentiellement positive des $(n-1)$ différentielles $dx_1, \ldots, dx_{n-1}$. D'après un théorème démontré [1] dans toute sa généralité par M. Weierstrass, on peut donc transformer le numérateur et le dénominateur de $\frac{1}{\rho}$ de manière que le dénominateur soit égal à la somme de $(n-1)$ carrés de fonctions linéaires de $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-1}$ et que le numérateur soit la somme des termes obtenus en multipliant chacun des carrés du dénominateur par le terme correspondant de la suite $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \ldots, \frac{1}{\rho_n}$.

Cette transformation effectuée, remplaçons les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ par leurs valeurs en fonction des variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$. Alors chacune des fonctions linéaires précédentes de $dx_1, \ldots, dx_{n-1}$ deviendra une fonction linéaire des quantités $d\xi_1, \ldots, d\xi_{n-1}$ et, par suite, une fonction linéaire des quantités $d\nu_1, d\nu_2, \ldots, d\nu_{n-1}$; et nous aurons

$$\frac{N}{\xi_n^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\rho_i} (P_{i,1} \, d\nu_1 + P_{i,2} \, d\nu_2 + \ldots + P_{i,n-1} \, d\nu_{n-1})^2,$$

$$\frac{D}{\xi_n^2} = \sum_{i=1}^{n-1} (P_{i,1} \, d\nu_1 + P_{i,2} \, d\nu_2 + \ldots + P_{i,n-1} \, d\nu_{n-1})^2,$$

où les quantités $P_{i,k}$ désignent des fonctions de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$.

---

[1] *Comparez* WEIERSTRASS, *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1858.

3. Ceci posé, M. Lipschitz exprime les différentielles dx_h en fonctions linéaires des différentielles dv_i, dont les coefficients ne dépendent que des quantités $P_{i,k}$ et de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$. A cet effet, il considère successivement le numérateur N et le dénominateur D de $\frac{1}{\rho}$.

On peut représenter directement en fonction de $dv_1, dv_2, \ldots, dv_{n-1}$ l'expression

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) dx_1 dx_2 + \ldots,$$

qui est précisément $\frac{N}{\xi_n}$. On obtient facilement

$$\frac{N}{\xi_n} = \frac{\partial x_1}{\partial v_1} dv_1^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial v_2} + \frac{\partial x_2}{\partial v_1}\right) dv_1 dv_2 + \ldots + \frac{\partial x_{n-1}}{\partial v_{n-1}} dv_{n-1}^2,$$

et

$$\frac{\partial x_i}{\partial v_k} = \frac{\partial x_k}{\partial v_i} \qquad [i, k = 1, 2, \ldots, (n-1); i \gtrless k].$$

En comparant cette expression de $\frac{N}{\xi_n}$ à l'expression trouvée tout à l'heure pour $\frac{N}{\xi_n^2}$, il vient, pour $i = 1, 2, \ldots, (n-1)$,

$$\frac{1}{\xi_n} dx_i = \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{\rho_h} (P_{h,1} dv_1 + P_{h,2} dv_2 + \ldots + P_{h,n-1} dv_{n-1}) P_{hi}.$$

L'égalité $dx_n = -\sum_{i=1}^{n-1} v_i dx_i$ nous permet d'écrire une relation analogue pour $\frac{1}{\xi_n} dx_n$. C'est exactement la relation précédente pour $i = n$, si nous définissons des quantités $P_{i,n}$ par les relations

$$P_{i,n} = -P_{i,1} v_1 - P_{i,2} v_2 - \ldots - P_{i,n-1} v_{n-1},$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Si nous formons maintenant l'expression représentée par D et si nous la comparons à celle trouvée plus haut pour $\frac{D}{\xi_n^2}$, il vient

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} P_{hi}^2}{\rho_h^2} = 1, \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{hi} P_{ki}}{\rho_h \rho_k} = 0,$$
$$(h, k = 1, 2, \ldots, n; k \gtrless h).$$

On peut ajouter à ce système d'équations l'équation déjà citée

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 1$$

et, en outre, en tenant compte de la définition des quantités $P_{i,n}$, les équations

$$\sum_{i=1}^{n} P_{hi}\xi_i = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

En posant

$$\frac{P_{hi}}{\rho_h} = A_{hi},$$

on peut écrire ces équations

$$\sum_{i=1}^{n} A_{hi}^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} A_{hi}A_{ki} = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} A_{hi}\xi_i = 0,$$
$$(h, k = 1, 2, \ldots, n, h > k).$$

Mais sous cette forme on reconnaît *le système d'équations caractéristiques d'une substitution qui transforme une somme de n carrés en elle-même.*

4. Il est maintenant facile de rétablir la symétrie en repassant des quantités $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1}$ aux quantités $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. On obtient immédiatement, pour les n différentielles dx_k,

$$dx_k = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\rho_i A_{i,k}\sum_{h=1}^{n} A_{i,h}\, d\xi_h\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

tandis que le numérateur et le dénominateur de $\frac{1}{\rho}$ deviennent

$$\sum_{h=1}^{n} d\xi_h\, dx_h = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\rho_i \sum_{h=1}^{n} A_{i,h}\, d\xi_h\right),$$
$$\sum_{k=1}^{n} dx_k^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\rho_i^2 \sum_{h=1}^{n} A_{i,h}\, d\xi_h\right).$$

M. Lipschitz parvient ainsi à *représenter les coefficients des formes quadratiques de* $d\xi_1, d\xi_2, \ldots, d\xi_n$ *qui figurent au numérateur et au dénominateur de* $\frac{1}{\rho}$, *par des fonctions rationnelles de* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$ *et des quantités* $A_{h,k}$. *Et, en même temps, il représente les coefficients qui figurent dans l'expression des différentielles* dx_k *en fonction des différentielles* $d\xi_h$, *également par des fonctions rationnelles entières des mêmes quantités* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$ *et* $A_{h,k}$ $(h, k = 1, 2, \ldots, n)$.

II.

En résumé, M. Lipschitz développe dans la première partie de son Mémoire des formules qui permettent, lorsque la variété d'ordre $(n-1)$, $\varphi = c$ est *donnée*, de trouver $\frac{1}{\rho}$ et les différentielles dx_k en fonction des différentielles $d\xi_h$.

de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$ et des fonctions de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ que nous avons désignées par $A_{h,k}$ $(h, k = 1, 2, \ldots, n)$.

Dans la seconde Partie de son Mémoire il aborde la question inverse. Ce n'est plus la variété d'ordre $(n-1)$ qui est donnée; ce sont au contraire $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$ et les quantités $A_{h,k}$ qui sont données, d'une manière arbitraire, en fonction des coordonnées $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ des points de la sphère de rayon 1, et il s'agit de voir sous quelles conditions il existe une variété d'ordre $(n-1)$, telle que ρ et les différentielles dx_k soient données par les formules précédentes en fonction des ξ_h et $d\xi_h$. Dans le cas où cette variété d'ordre $(n-1)$ existe, il s'agit en outre d'exprimer les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de ses points en fonction des coordonnées $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ des points de la sphère de rayon 1.

La variété cherchée d'ordre $(n-1)$ existe ou n'existe pas suivant que, pour les quantités $\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$ et $A_{h,k}$ données, toutes les conditions d'intégrabilité des expressions trouvées dans la première Partie du Mémoire pour les différentielles dx_h en fonction des différentielles $d\xi_k$ sont ou ne sont pas vérifiées. Si elles sont vérifiées, l'intégration des mêmes expressions nous donne la réponse à la seconde question posée.

Tout revient donc à la recherche des conditions d'intégrabilité d'un système d'équations différentielles données.

M. Lipschitz commence par faire une remarque importante. Comme les fonctions A_{hk} jointes aux variables ξ_h forment une substitution qui transforme une somme de n carrés en elle-même, on voit, en se reportant à la théorie de ces substitutions, que les fonctions A_{hk} vérifient l'équation

$$\sum_{h=1}^{n} d\xi_h^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \left[\sum_{k=1}^{n} (A_{i,k}\, d\xi_k) \right]^2;$$

mais alors il est manifeste que tout système de ces fonctions $A_{h,k}$ peut être obtenu en multipliant l'un quelconque d'entre eux par la substitution la plus générale qui transforme une somme de $(n-1)$ carrés en elle-même. *La source même des propriétés du système formé par les conditions d'intégrabilite cherchées se trouve donc dans la théorie algébrique de la transformation d'une somme de $(n-1)$ carrés en elle-même.*

Considérons maintenant le système formé par les conditions d'intégrabilité; c'est un système d'équations aux dérivées partielles qui exprime la dépendance des fonctions ρ_i, $A_{h,k}$ des variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Comme les coefficients de la substitution la plus générale qui transforme une somme de $(n-1)$ carrés en elle-même peuvent être exprimés rationnellement par $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ éléments indépendants, on pourra également exprimer les $A_{h,k}$ par $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ éléments indépendants; les fonctions $\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$ sont indépendantes; il vient donc en tout $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions indépendantes des variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$; $(n-1)$ de ces variables sont d'ailleurs indépendantes.

Mais on sait [1] que les conditions d'intégrabilité d'une expression de la

---

[1] *Comparez* Lipschitz, *Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen* (*Journal de Crelle*, t. 70).

forme

$$\sum_{h=1}^{n} a_h \, dz_h$$

peuvent être condensées en une seule équation symbolique

$$\delta \sum_{h=1}^{n} a_h \, dz_h = d \sum_{h=1}^{n} a_h \, \delta z_h,$$

à l'aide des deux symboles différents de différentiation d et δ. Cette équation continue à avoir la même signification lorsque les quantités désignées par z_h sont liées par une ou plusieurs équations.

Les conditions d'intégrabilité des n expressions

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\rho_i A_{ik} \sum_{h=1}^{n} A_{ih} \, d\xi_h \right),$$

trouvées pour dx_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ dans la première Partie du Mémoire actuel peuvent donc être représentées par les n équations

$$\begin{aligned} &\delta \sum_{i=1}^{n-1} \left(\rho_i A_{ik} \sum_{h=1}^{n} A_{ih} \, d\xi_h \right) \\ &= d \sum_{i=1}^{n-1} \left(\rho_i A_{ik} \sum_{h=1}^{n} A_{ih} \, \delta\xi_h \right), \end{aligned}$$

pour $k = 1, 2, \ldots, n$. Mais ces n équations sont entièrement équivalentes aux $(n-1)$ équations

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n-1} \left[\rho_i \sum_{h=1}^{n} (A_{\alpha h} \, \delta A_{ih}) \sum_{h=1}^{n} (A_{ih} \, d\xi_h) \right] + \delta \left(\rho_\alpha \sum_{h=1}^{n} A_{\alpha h} \, d\xi_h \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left[\rho_i \sum_{h=1}^{n} (A_{\alpha h} \, dA_{ih}) \sum_{h=1}^{n} (A_{ih} \, \delta\xi_h) \right] + d \left(\rho_\alpha \sum_{h=1}^{n} A_{\alpha h} \, \delta\xi_h \right), \end{aligned}$$

pour $\alpha = 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Chacune des dernières équations symboliques représente $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations aux dérivées partielles. Nous obtenons donc comme condition d'intégrabilité des n expressions trouvées pour dx_k

$$(n-1) \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

équations aux dérivées partielles entre les dérivées partielles du premier ordre des $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions indépendantes dont nous avons parlé plus haut, prises par rapport aux $(n-1)$ variables indépendantes.

M. Lipschitz annonce, dans son Introduction à ce Mémoire, qu'il compte appliquer ces résultats au cas où $n = 3$, c'est-à-dire aux surfaces dans l'espace géométrique.

Kronecker. — Sur les équations abéliennes du troisième degré, dont les coefficients font partie du domaine $\sqrt{-31}$. (1151-1154.)

Cette Note sert en quelque sorte de complément à celle sur la composition des équations abéliennes. C'est, en effet, une belle application des principes qui y sont exposés et cette application est d'autant plus intéressante que le cas particulier choisi nous amène précisément à l'équation des modules singuliers des fonctions elliptiques correspondant à $\sqrt{-31}$.

J'ai cité plus haut les équations abéliennes élémentaires à l'aide desquelles on peut, par composition, former toutes les équations abéliennes du troisième degré dans le domaine de rationnalité ($R = 1$). Parmi ces équations abéliennes il y en a une

$$y^9 - 3y + 1 = 0$$

dont les racines sont données par les racines neuvièmes de l'unité. Elle répond dans la formule générale au cas où $p = 1$ et pourrait, entre toutes les équations abéliennes élémentaires, être désignée par le nom d'*équation unité*.

Au lieu du domaine de rationnalité $R = 1$, M. Kronecker considère maintenant le domaine de rationnalité $(R = \sqrt{-31})$. Il trouve alors, comme équation unité, l'équation

$$y^9 + \sqrt{-31}\,y^2 - 10y - \sqrt{-31} = 0.$$

Or cette équation caractérise précisément le genre particulier d'équations dont les racines sont les modules singuliers des fonctions elliptiques correspondant à $\sqrt{-31}$. Ce genre particulier d'équations peut donc être défini simplement d'une manière purement algébrique.

Pour démontrer ce que je viens de dire, M. Kronecker montre d'abord que les nombres premiers p se partagent en ceux que l'on peut représenter comme normes de nombres algébriques entiers du domaine $(\sqrt{-3}, \sqrt{-31})$ et en ceux dont le cube seulement peut être représenté de cette manière. C'est à ces derniers qu'il s'attache particulièrement; désignons-les par p'.

Toutes les équations abéliennes du troisième degré pour lesquelles les expressions

$$(x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2)(x_0 + \omega^2 x_1 + \omega x_2),$$

formées à l'aide de leurs racines x_0, x_1, x_2 et d'une racine primitive cubique de l'unité ω, sont égales à une puissance de p', peuvent être décomposées en d'autres équations abéliennes pour lesquelles on ait

$$(x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2)^3 = H(\zeta, \omega)\, H(\zeta, \omega^2),$$

où $H(\zeta, \omega)$ désigne un nombre algébrique entier du domaine (ζ, ω), dont la norme est égale à $(p')^3$:

$$\zeta = \frac{1 + \sqrt{-31}}{2}$$

est racine de l'équation

$$\zeta^2 + \zeta + 8 = 0.$$

Or on peut démontrer, à l'aide de considérations empruntées au *Grundzüge*, et M. Kronecker le fait en détail, que le second membre de l'égalité précédente peut être transformé en

$$\Theta(\zeta, \omega)^3 \, U(\zeta, \omega),$$

où $\Theta(\zeta, \omega)$ désigne comme $H(\zeta, \omega)$ un nombre algébrique entier du domaine (ζ, ω) et où $U(\zeta, \omega)$ est une unité algébrique entière du même domaine, c'est-à-dire un nombre algébrique entier du domaine (ζ, ω), dont la norme est égale à l'unité.

On a donc

$$x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2 = \Theta(\zeta, \omega) \sqrt[3]{U(\zeta, \omega)}.$$

Mais, dans le domaine (ζ, ω), il n'y a qu'une seule unité fondamentale; toutes les autres unités algébriques de ce domaine sont des puissances entières de l'unité fondamentale, multipliées par l'une des unités ordinaires.

On peut en conclure que toutes les équations abéliennes du troisième degré considérées appartiennent au même genre que l'équation abélienne

$$y^3 + \sqrt{-31}\, y^2 - 10 y - \sqrt{-31} = 0,$$

dont les trois racines sont données à l'aide de l'unité fondamentale du domaine (ζ, ω).

Le genre tout entier de nombres algébriques définis par l'équation des modules singuliers des fonctions elliptiques correspondant à $\sqrt{-31}$ se distingue ainsi de tous les autres par une propriété arithmétique aussi bien que par une propriété algébrique.

Ce que nous avons indiqué pour le domaine $(R = \sqrt{-31})$ a lieu de même pour le domaine $(R = \sqrt{-D})$ lorsque $(-D)$ est ce que l'on nomme, d'après Gauss, un *déterminant régulier* de formes quadratiques.

Mais lorsque $(-D)$ est un *déterminant irrégulier*, l'analogie ne subsiste plus avec le cas particulier où $D = 31$. On a alors, non pas une, mais plusieurs équations abéliennes particulières, juste autant qu'il y a de formes nécessaires pour la composition correspondante.

Il semble que cette analogie entre la composition des équations abéliennes et la composition des formes quadratiques doive à elle seule déjà légitimer l'introduction en Algèbre de la notion de composition des équations abéliennes.

J. Molk.

ANNALES DES MINES (1).

8e série. — Tome IV; 2e semestre 1883.

Mallard et *Le Chatelier*. — Recherches expérimentales et théoriques sur la combustion des mélanges gazeux explosifs. (274-568, 11 pl.).

Ces recherches sont exposées dans trois Mémoires distincts, le premier, sur les températures d'inflammation des mélanges gazeux; le deuxième, sur la vitesse de propagation de la flamme dans les mélanges gazeux, et le troisième, sur les températures de combustion et les chaleurs spécifiques des gaz aux températures élevées. Dans chacun d'eux se trouve la description des procédés d'observation et des méthodes d'expérimentation, suivie des résultats des observations.

Tome V, 1er semestre 1884.

Haton de la Goupillière. — Note sur la théorie des bobines d'extraction. (162-170).

Combes a présenté la théorie des bobines d'enroulement pour l'extraction des mines à l'aide d'une analyse ingénieuse, depuis longtemps devenue classique, et qui peut être considérée comme l'un des meilleurs modèles de l'application du calcul à l'étude d'une question de Mécanique. Mais les formules auxquelles il est parvenu, pour exprimer les rayons d'enroulement, sont d'une grande complication, qui tient à la difficulté de discerner le sens de la variation que subissent les rayons, lorsque chacun des paramètres vient à prendre diverses valeurs. Un choix convenable de variable auxiliaire permet de résoudre la question et de simplifier les formules de Combes, pour en donner toutes les conséquences intéressant la pratique.

Tournaire. — Des dimensions à donner aux piliers des carrières. (415-429, 1 pl.).

Considérations relatives à ce sujet et sur les pressions auxquelles les terrains sont soumis dans les profondeurs.

Berger (*L.*). — Étude sur les câbles aériens. (430-464, 2 pl.).

La présente étude a pour objet de préciser les conditions d'établissement des câbles aériens; elle a été faite surtout en vue d'installations peu coûteuses et afin d'éviter de recourir aux plans inclinés, quelquefois dispendieux ou difficiles à aménager. Elle est suivie d'exemples d'installations satisfaisant au programme indiqué.

---

(1) Voir *Bulletin*, VIII, 68.

Thoulet (*J.*). — Expériences relatives à la vitesse des courants d'eau ou d'air susceptibles de maintenir en suspension des grains minéraux. (507-530, 1 pl.).

Comparaison des résultats de ces expériences avec ceux de divers observateurs.

Tome VI, 2e semestre 1884.

Ce Volume ne renferme pas de Mémoires ayant trait aux Mathématiques pures ou appliquées, dépassant la portée des connaissances usuelles et pouvant, à ce titre, intéresser les géomètres et contribuer à quelque réel progrès de la Science.

Tome VII, 1er semestre 1885.

Badoureau (*A.*). — Théorie des appareils employés au lavage des matières minérales. (521-534, 1 pl.).

Les cuves de lavage, les appareils à courant ascendant, les aires de lavage, les tables à secousses, les tables de Rittinger, les cribles à piston, le laveur hydraulique Bazin, etc., sont fondés sur ce principe qu'une grenaille placée dans de l'eau en repos, ou en mouvement, soit au milieu du liquide, soit sur un fond solide, fixe ou mobile, décrit un mouvement différent, selon sa grosseur et sa densité.

La théorie de quelques-uns de ces appareils a été donnée, en 1871, par M. Henry, mais celle de la Table de Rittinger est ici modifiée. La théorie du laveur Bazin, à force centrifuge, a été donnée par M. Moreau, puis remaniée par M. Haton de la Goupillière.

Tome VIII, 2e semestre 1885.

Lebreton (*F.*). — Mémoire sur la méthode de congélation de M. Pœtsch pour le fonçage des puits de mines en terrains aquifères. (111-171, 1 pl.).

Depuis 1883, on emploie avec succès, en Allemagne, pour le fonçage des puits en terrains aquifères, une méthode nouvelle due à M. Pœtsch, qui partage avec les méthodes à niveau plein l'avantage de ne causer aucune dépense d'épuisement, et de ne pas troubler l'équilibre statique des eaux, et qui a, en outre, le mérite de permettre une évaluation assez précise, *a priori*, de la durée et du prix de fonçage.

La méthode de M. Pœtsch consiste à congeler l'eau contenue dans la partie du terrain mouvant qui occupe la position du puits projeté, de manière à en faire un bloc solide de glace, puis à creuser à la main sans avoir d'eau à pomper.

A cet effet, des tubes métalliques verticaux traversent le terrain qui envi-

ronne le puits et pénètrent à $0^m,60$ dans la couche sous-jacente; après avoir hermétiquement fermé ces tubes à leurs pieds et introduit au centre de chacun d'eux d'autres tubes plus petits ouverts aux deux extrémités, il ne reste plus qu'à faire parcourir ces derniers par une solution de chlorure de magnésium ou de calcium, refoulée par une petite pompe, après avoir passé par un réfrigérant du système Carré, produisant le froid par ébullition du gaz ammoniac liquéfié.

L'étude de cet ingénieux mode de fonçage amène à traiter d'intéressantes questions de calorimétrie.

De Langlade. — Méthode pour déterminer les dimensions qu'il convient de donner aux sections successives des conduites d'air ou de gaz dans lesquelles la température passe par des valeurs différentes. (172-176).

La formule de d'Aubuisson permet déjà de résoudre la question, à la condition de subdiviser la conduite en autant de portions qu'il y a de températures différentes, ce qui entraîne à de longs calculs, mais il paraît possible de simplifier cette détermination, en ramenant le problème à supposer la température égale à 0° dans tout le parcours, puis multipliant les sections ainsi obtenues (appelées *sections primitives*) par un coefficient défini une fois pour toutes pour chaque température.

Desdouits. — Application de la méthode rationnelle aux études dynamométriques. (481-599, 2 pl.).

Appareils et procédés d'expérience. Résultats obtenus dans l'étude de la résistance des trains.

H. B.

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, publié par le Conseil d'instruction de cet établissement [1].

LVe Cahier, 1885.

Léauté. — Mémoire sur les oscillations à longues périodes dans les machines actionnées par les moteurs hydrauliques et sur les moyens de prévenir ces oscillations. (1-126).

Une des difficultés les plus graves que l'on rencontre dans la réglementation des machines consiste dans les oscillations à longues périodes de la vitesse dues aux variations brusques du travail résistant. MM. Rolland et Resal ont abordé cette question dans le cas des machines à vapeur, où le régulateur agit direc-

---

[1] Voir *Bulletin*, t. IX, 231.

tement sur l'admission. Il n'en est plus de même dans les machines hydrauliques où l'appareil centrifuge et le vannage, séparés par le mécanisme intermédiaire, n'ont plus qu'une connexion indirecte. La force nécessaire est alors fournie par la machine elle-même, et non par le régulateur, dont le seul but est d'embrayer au moment voulu le mécanisme de commande du vannage. Le problème a donc complètement changé de nature, et il convient d'en reprendre l'étude à nouveau. C'est ce que fait M. Léauté dans ce Mémoire, divisé en sept Chapitres dont l'énumération fera bien comprendre la méthode suivie dans ces recherches :

Chapitre I. — Analyse du phénomène. Description du cycle. Le problème revient à l'étude des cycles. Éléments des cycles qu'il convient de considérer.

Chapitre II. — Détermination mathématique du cycle. Équation des courbes de déplacement. Leur réduction à une parabole.

Chapitre III. — Calcul des éléments de chaque portion du cycle. Périodes d'immobilité de la vanne. Période de fermeture. Période d'ouverture.

Chapitre IV. — Discussion du problème. Étude des cycles successifs. Oscillations à longues périodes. Condition pour qu'elles ne se produisent pas.

Chapitre V. — Conséquences pratiques. Application aux régulateurs existants. Règles à suivre pour éviter qu'ils permettent des oscillations à longues périodes.

Chapitre VI. — Modifications à introduire dans l'établissement de régulateurs nouveaux. Idée générale de la solution à adopter.

Chapitre VII. — Indication de la méthode à suivre dans certains cas spéciaux.

Humbert. — Sur les surfaces cyclides. (127-252).

L'auteur fait l'étude géométrique des cyclides, c'est-à-dire des surfaces du quatrième ordre qui ont le cercle à l'infini pour ligne double. Nous reproduisons le passage suivant de l'Introduction, qui donne une idée très nette du travail de M. Humbert :

» Le présent Mémoire est divisé en deux Parties :

» La première est consacrée à l'étude des quadriques inscrites dans une cyclide et à celle des systèmes de *points conjugués* sur cette surface.

» M. Darboux a montré que toute tangente à une quadrique V, inscrite dans une cyclide, coupe cette surface en quatre points dont la détermination dépend de deux équations du premier degré : ces quatre points se divisent donc en deux couples, et j'ai appelé *points conjugués dans le système* V les points des couples analogues, obtenus en considérant toutes les tangentes à la quadrique V.

» J'ai appelé ensuite *sphères du groupe* V les sphères qui coupent la cyclide suivant une courbe telle qu'un des quatre cônes du second ordre qui la contiennent soit circonscrit à la quadrique V. »

Cela posé, les théorèmes principaux démontrés dans la première Partie sont les suivants :

« 1° Le lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant à un même groupe V, par rapport à une cyclide S, est une cyclide S′, homofocale à la première, et dont les focales singulières sont les focales de la quadrique V. »

Ce théorème donne lieu à de nombreuses applications relatives aux pro-

priétés focales des courbes sphériques situées sur une cyclide, aux lignes de courbure, aux rayons de courbure principaux, etc.

» Il m'a permis, en particulier, d'arriver simplement aux théorèmes de M. Moutard sur le système triple orthogonal formé par les cyclides homofocales.

» 2° Les plans perpendiculaires en leurs milieux aux droites qui joignent » deux points d'une cyclide conjugués dans un système V enveloppent une qua- » drique U homofocale aux déférentes de la cyclide.

» De là résultent des propriétés relatives à l'intersection d'une cyclide et d'une sphère ou d'un cercle, à la courbure des cyclides, etc.

» Dans la deuxième Partie, on s'occupe spécialement d'une courbe déjà considérée par M. Darboux, et dont l'étude est liée intimement à celle de la cyclide. Cette courbe est une cubique gauche et jouit de nombreuses propriétés : je l'ai désignée sous le nom de *cubique principale*. C'est le lieu des centres des quadriques inscrites dans une cyclide et dans les cyclides homofocales, et aussi le lieu des centres des déférentes de ces cyclides.

» Les théorèmes les plus importants de cette seconde Partie sont les suivants :

» 1° Les axes des spiriques planes qu'on peut tracer sur une cyclide ren- » contrent en deux points la cubique principale;

» 2° Les normales à une cyclide en quatre points situés sur une droite ren- » contrant la cubique principale en deux points sont dans un plan qui passe par » un point fixe.

» De ces théorèmes on déduit des propriétés intéressantes des sections planes et des normales d'une cyclide.

» Pour terminer, j'étudie les différentes formes de la cubique principale dans les différentes espèces de cyclides. »

Lecornu. — Sur les forces analytiques. (252-273).

Il s'agit des forces, contenues dans un plan, dont les composantes X et Y parallèles à deux axes rectangulaires sont liées par la relation $X + iY = Z$, Z étant une fonction analytique de la seule variable $z = x + iy$.

Les courbes lieux des points pour lesquels la force a une grandeur donnée forment un système isotherme. Les courbes lieux des points pour lesquels la force a une direction donnée forment un autre système isotherme orthogonal au premier.

Le mouvement d'un point matériel de masse 1, soumis à l'action du système de forces considéré, est déterminé par l'équation $\frac{d^2 z}{dt^2} = Z$. Si l'on pose $Z = \frac{1}{2} F'(z)$, une première intégration donne

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{C + F(z)}}.$$

C étant une constante arbitraire qui fixe le *régime*. Pour un régime donné, les trajectoires constituent une famille isotherme.

Soient

v la vitesse :

ρ le rayon de courbure de la trajectoire :

ρ' celui de la courbe orthogonale.

La composante normale de l'accélération est, comme on sait, $\frac{v^2}{\rho}$; sa composante tangentielle ρ s'exprime par $\frac{v^2}{\rho'}$.

Le temps peut être envisagé comme une quantité complexe $t + it'$, t variant seul quand le mobile parcourt une trajectoire réelle, et t' variant seul quand on passe orthogonalement, sans changement de régime, d'une trajectoire à l'autre. L'accélération tangentielle est égale à $\frac{dv}{dt}$, l'accélération centripète à $\frac{\partial v}{\partial t'}$.

L'auteur examine ce qui se passe aux environs des points pour lesquels $\frac{dz}{dt}$ s'annule (points d'arrêt) ou devient infini (points de projection) et de ceux pour lesquels $\frac{d^2z}{dt^2}$ s'annule (points d'équilibre). Il donne les conditions pour que le mobile décrive une trajectoire fermée, ou circuit réel : un circuit réel renferme toujours un nombre pair de points d'arrêt ou de projection.

Resal. — Note sur la courbure de l'herpolhodie. (275-285).

L'auteur se propose, en prenant pour point de départ l'équation différentielle de Poinsot, de trouver l'expression du rayon de courbure de l'herpolhodie et d'en déduire le théorème de M. de Sparre : « L'herpolhodie n'a ni point d'inflexion ni point de rebroussement. »

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ DE STATISTIQUE, DES SCIENCES NATURELLES ET DES ARTS INDUSTRIELS DU DÉPARTEMENT DE L'ISÈRE. 3e Série. Gr. in-8° (1).

Tome V; 1876.

Breton (Ph.). — Points dits radiants des essaims d'étoiles filantes. (8-16, 1 pl.).

Nécessité de bien préciser les notions indispensables à l'observation des étoiles filantes. Utilité de la définition du pôle de divergence et du pôle de convergence, diamétralement opposé sur la sphère céleste.

Démonstration de l'existence d'un rassemblement réel d'astéroïdes qui ont passé à leur périgée plus haut que l'atmosphère. Ce rassemblement auquel, faute de nom déjà adopté, l'auteur propose de donner celui de *fausse comète*, subsiste pendant l'apparition de l'essaim d'astéroïdes, et doit être visible sur la ligne droite menée du centre de la Terre vers le pôle de convergence. Elle doit, en outre, se présenter sous la forme d'une queue de comète presque verticale. Jusqu'à présent, l'observation n'a pas réussi à confirmer l'existence de cette

(1) Voir *Bulletin*, t. V, p. 204, et t. I, p. 78.

concentration d'astéroïdes, ce qu'il faut probablement attribuer à l'insuffisance de leur nombre; mais l'attention des astronomes devra être appelée sur cette observation, notamment en 1899, à l'époque du prochain maximum dans l'apparition de l'essaim des Léonides qui, en 1872, au 27 novembre, a donné lieu à une si grande profusion d'étoiles filantes.

De Sparre (*M.*). — Mouvement des projectiles oblongs dans le cas du tir de plein fouet. (321-407, 3 pl.).

La déviation d'un projectile oblong lancé par une pièce rayée se fait à droite, tandis que celle d'un projectile sphérique se fait à gauche, mais elle est beaucoup moins prononcée. La véritable cause de ce mouvement réside dans le mouvement conique de l'axe de figure du projectile (H.-G. Magnus), et le mouvement de cet axe autour de la tangente à la trajectoire est dû à la composition du couple de la résistance de l'air avec la rotation initiale du projectile (de Saint-Robert). Le général Mayewski parvint à calculer la dérivation, mais seulement par des méthodes approximatives dont il fit l'application au canon de 4 russe. Grâce à l'emploi heureux d'une méthode de représentation géométrique imaginée par Gauss, l'auteur de ce Mémoire a pu compléter l'étude de la question et obtenir, sous forme finie, l'expression des variations des angles formés par l'axe de figure avec la tangente à la trajectoire, et par le plan vertical projetant de la tangente avec le plan mené par cette tangente et l'axe de figure. Il a réussi également à exprimer la dérivation par des formules très simples, dont l'exactitude est pleinement vérifiée par leur comparaison avec les expériences du général Mayewski sur le 4 russe.

Ce Mémoire est un de ceux qui ont été le plus justement appréciés parmi d'autres études balistiques. Les applications analytiques s'y trouvent judicieusement guidées par des considérations géométriques fort intéressantes.

Jarrige. — Sur une série de moyennes géométriques. (409-411).

On forme une suite de nombres

$$a,\quad ab,\quad ab^{\frac{1}{2}},\quad ab^{\frac{3}{4}},\quad ab^{\frac{5}{8}},\quad ab^{\frac{11}{16}},\quad \ldots,$$

tels que l'un d'eux soit la moyenne géométrique des deux précédents. Partant des deux nombres $A = a$ et $B = ab$, la limite des nombres B_n est $\sqrt[3]{AB^2}$; cette série d'extractions de racines carrées se transforme ainsi finalement en une seule extraction de racine cubique.

Tome VI. 1874.

L'impression du tome VI a été faite en 1874, avec les matériaux dont on disposait dès cette époque.

Ce Volume ne renferme que des documents historiques inédits sur le Dauphiné, sans aucun Mémoire relatif aux Mathématiques.

Tome VII; 1878.

Breton (*Ph.*). — Visibilité probable des cinq passages prochains de Vénus derrière le Soleil. (297-303).

L'auteur indique un résultat inattendu des observations qui viennent d'être faites sur le passage de Vénus *devant* le Soleil. Plusieurs observateurs ayant vu le disque de Vénus détaché en noir sur la chromosphère rougeâtre qui entoure le Soleil, avant que ce disque noir ait commencé d'entamer le disque de la photosphère solaire, il est permis d'en conclure, presque avec certitude, que l'on pourra observer les passages de Vénus *derrière* le Soleil.

Le passage de 1874 et celui qu'on attend en 1882 indiquent un passage par derrière en 1878, occupant le milieu d'une série de passages par derrière. Les cinq premiers de cette série, arrivés en 1846, 1854, 1862, 1870 et 1878, sont restés inaperçus. Les quatre suivants arriveront en 1886, 1894, 1902 et 1910; on les observera de mieux en mieux si l'on se tient prêt.

Tome VIII; 1879.

Penet (*L.*). — Sur les surfaces et les lignes topographiques. (22-106, 1 pl.).

Cet important travail est le résumé d'un Mémoire, beaucoup plus étendu, adressé à l'Académie des Sciences et traitant des propriétés géométriques des lignes et surfaces topographiques. Quelques mois auparavant, l'auteur avait publié une Note de 23 pages renfermant déjà les définitions utiles dans l'étude de ces questions.

La *Géométrie descriptive* de M. de la Gournerie contient le passage suivant :

« J'ai traité avec beaucoup de réserve la question des lignes de plus grande pente, parce qu'elle est intimement liée à celle des faîtes et des thalwegs, sur laquelle règne une certaine obscurité. »

L'auteur a essayé de combler cette lacune. Son Mémoire est divisé en deux Livres dont voici les différents paragraphes :

Livre I. — I. Définitions et rappel de notions diverses. — II. Remarques sur les normales aux courbes planes. Remarques sur les courbes semblables. — III. Paraboloïde. Indicatrice au sommet d'un paraboloïde. Paraboloïde indicateur et indicatrice en un point d'une surface. Surindicatrice. — IV. Remarques sur l'ordre de grandeur et le rapport de quelques infiniment petits. Points d'enveloppe. Enveloppes. Ordre de grandeur de la distance entre deux tangentes infiniment voisines parallèles menées à deux enveloppées infiniment voisines dans tous les cas possibles. Tangente commune à deux courbes infiniment voisines d'une même série.

Livre II. — I. Normale commune à deux courbes infiniment voisines d'une même série. Croupes et dépressions, lignes de séparation des croupes et dépressions. — II. Points topographiques. Lignes topographiques. Examen des lignes topographiques. Définition des points et lignes topographiques à l'aide des

lignes de courbure. — III. Lignes de plus grande pente. Examen des lignes de plus grande pente. Lignes de partage ou de rassemblement des eaux. Application de la théorie des lignes topographiques à quelques exemples simples. — IV. De quelques singularités que peuvent présenter les surfaces naturelles. Points initiaux et courbes de points initiaux. Arêtes. Points pyramidaux et coniques.

Appendice. — Définition de quelques termes usités en topographie.

Enfin, il est utile de rappeler que ce même sujet de recherches a été étudié par d'autres géomètres, parmi lesquels on peut citer MM. Breton de Champ [*Mémoire sur les lignes de faîte et de thalweg*, etc. (*Journal de Mathématiques*, t. III, 1877, et *Traité du nivellement*)], Boussinesq et C. Jordan (*Comptes rendus*, 1871, 1872).

Tome IX; 1879.

Breton (Ph.). — Remarques sur les deux satellites de Mars. (468-477).

Circonstances remarquables des mouvements relatifs apparents de Mars et de ses satellites, pour un observateur supposé transporté sur ces différents corps. Apparences singulières que présenterait, pour la Terre par exemple, un satellite nouveau, supposé à une distance telle que sa révolution soit exactement d'un jour sidéral.

Tome X; 1880.

Breton (Ph.). — Étude sur les orbites hyperboliques et sur l'existence probable d'une réfraction stellaire. (21-112, 3 pl.).

Voici les principales subdivisions de ce Travail :

Chapitre Ier : *Relations entre les éléments d'une orbite hyperbolique.* — Nomenclature et notation. Propriété tirée de la loi des aires. Digression sur les orbites de répulsion. Calcul de la vitesse à l'asymptote de 14 comètes du Catalogue d'Encke. Relation entre l'axe focal et la vitesse à l'asymptote.

Chapitre II : *Système des orbites hyperboliques des particules d'une comète sans vitesse initiale absolue.* — Gerbe d'orbites hyperboliques. Application de la gerbe à l'expansion des queues des comètes.

Chapitre III : *De la réfraction stellaire.* — Dissémination illimitée des particules des comètes. Formation d'une grande atmosphère circumsolaire. Explication des parallaxes négatives de quelques étoiles.

Chapitre IV : *Système des orbites des particules d'une même comète, avec vitesse initiale quelconque.* — Explication de l'ellipticité de quelques orbites de comètes. Gerbes d'orbites hyperboliques avec vitesse absolue initiale. Vitesses finales des comètes qui traversent le système solaire. Effet général du passage du Soleil sur des comètes sans vitesse initiale.

Chapitre V : *Passage d'une comète à travers les empires de plusieurs astres.* — Enchaînement d'une suite d'orbites hétérobariques. Empires enclavés et leurs frontières. Enchaînement de trois orbites hétérobariques. Diversité des points radiants dans un essaim de bolides.

CHAPITRE VI : *Direction et vitesse du mouvement propre du Soleil. Sillage cométaire.* — Détermination de la translation du Soleil. Méthode mixte pour composer la résultante de plusieurs vitesses aux premières asymptotes.

Note I. — Courbe enveloppe d'une série de coniques dans un plan, ayant un point A commun, un foyer F commun et des axes focaux égaux à $2a$.

L'enveloppe est une conique ayant pour foyers A et F et pour grand axe $2a - \frac{AF}{2}$. Application de ce théorème aux effets d'une explosion.

Note II. — Application de la spectroscopie à la réfraction stellaire. Persistance du doute sur la réfraction stellaire. Découverte récente de la mesure spectroscopique de la vitesse d'une étoile suivant le rayon visuel. Mesure spectroscopique de la distance d'une étoile double. Expérience acoustique similaire. Détermination spectroscopique de la réfraction stellaire. Forme vraie de la grande atmosphère circumsolaire.

Note III. — Apparence double d'une comète très grande traversée à la fois par le Soleil et par la Terre. Formation de deux fausses comètes dans une grande nuée cosmique. Rappel de la grande pluie d'étoiles filantes du 27 novembre 1872. Quelles peuvent être les dimensions des noyaux des comètes. Gloires solaires, vues pendant la totalité des éclipses totales de Soleil.

Legoux (*A.*). — Note sur les surfaces orthogonales représentées par une équation aux dérivées partielles du premier ordre. (132-142).

Appelant surfaces intégrales toutes les surfaces représentées par l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles

$$Ap^2 + A'q^2 + A''r^2 + 2Bqr + 2B'rp + 2B''pq + 2Cp + 2C'q + 2C''r + F = 0,$$

on démontre que toutes ces surfaces qui passent par un point donné de l'espace enveloppent, en général, un cône de seconde classe et de second ordre qu'on appelle le cône complexe relatif à ce point (S. LIE, *Math. Annalen*, 1872). Il est facile de voir que, par une courbe donnée quelconque C, on peut faire passer deux surfaces intégrales.

On peut se proposer de chercher, parmi les courbes qui déterminent les surfaces intégrales, celles qui sont telles que les deux surfaces correspondantes satisfont à des conditions données, par exemple, se coupent à angle droit ou sous un angle constant en chacun de leurs points.

Le présent travail a pour objet l'étude de la condition d'orthogonalité.

Application aux développables circonscrites à un ellipsoïde, aux surfaces telles que la perpendiculaire menée de l'origine sur la normale soit constamment située dans le plan des xy; et aux surfaces enveloppées par une sphère de rayon constant dont le centre décrit une courbe située dans le plan des xy.

Tome XI: 1882.

Latars (*G.*). — Note sur une formule de cubature. (341-352, 1 pl.).

Le volume V d'un solide terminé par deux bases parallèles et tel qu'une sec

tion, faite parallèlement à la base inférieure B_0 à la distance x, ait une aire

$$u = ax^3 + bx^2 + cx + g,$$

a pour expression

$$V = \frac{h}{6}(B_0 + 4C + B_1),$$

h représentant la distance entre les deux bases B_0 et B_1, et C une section équidistante des deux bases.

La démonstration élémentaire qui en est exposée ici a été résumée et reproduite en partie dans le t. V de *Mathesis* (1885, p. 74-75) sous le titre de « Volume d'un prismatoïde », pour faire suite à une autre démonstration donnée d'après M. Halsted (*ibid.*, p. 9-10).

Ce théorème n'est d'ailleurs pas nouveau. Il paraît dû à Steiner et se trouve indiqué dans un Mémoire de M. Maleyx sur l'évaluation de certains volumes (*Nouv. Ann. de Math.*, p. 529-551; 1880).

Enfin, il paraît utile de rappeler, à ce propos, d'autres sources bibliographiques : *Géométrie de Finck, Journal de Crelle* (t. 18, C. Koppe; t. 23, Steiner; t. 45, August); les *Nouv. Ann. de Math.*, t. VII, 1848 (Finck); t. XVI, 1857 (Lombard); t. XIII, 1854, p. 266; t. VI (2), 1867 (Giard) et divers extraits de Prony, Poncelet, Chapman, Eytelwein, Brix, Sarrus, Mascheroni, etc. Le premier germe de cette formule se trouve, paraît-il, dans le *Lilavati*.

H. B.

BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da B. BONCOMPAGNI [1].

Tomo XVII, anno 1884.

Narducci (Henri). — Sur le *Traité de la sphère* de Bartholomée de Parme, astronome du XIIIe siècle et sur d'autres Ouvrages du même auteur.

Bartholomée de Parme était lecteur d'Astronomie en 1297 à l'Université de Bologne. Il était contemporain de Dante. M. Narducci donne une analyse succincte des deux premiers Livres du *Traité de la sphère* de cet auteur. Il s'étend davantage sur le troisième qui traite de la signification des douze signes du Zodiaque. Jean de Sacrobosco avait déja traité les mêmes questions avant Bartholomée. Le premier Chapitre du *Traité de la sphère* se rapporte aux cinq grands âges du monde, comprenant une période de 77000 ans, et le second traite spécialement des divers âges de la création. Le troisième porte sur une période qui s'étend depuis la création jusqu'en 1297; le quatrième s'occupe de l'origine du monde et des diverses ères adoptées par les peuples; le cinquième traite de la fin du monde, le sixième de la création des sept planètes et de

---

[1] Voir *Bulletin*, IX, p. 180.

leur situation dans le ciel. Le septième comprend une étude de leurs orbites et des propriétés de ces planètes. Le huitième traite des constellations du Zodiaque; le neuvième classe ces constellations en errantes, fixes et ordinaires : les autres Chapitres sont consacrés à la figure de ces constellations et à leurs propriétés calorifiques et lumineuses.

Voici d'ailleurs le Catalogue des divers Ouvrages qu'on lui attribue :

Liber de occultis, 1280.
Breviloquium, 1286.
Geomantia, 1288.
Tractatus de Sphæra, 1297.

Enfin, dans un *Traité de Philosophie* il indique pourquoi le Soleil semble plus grand au lever qu'au coucher.

Favaro (*Antonio*). — Sur certaines relations entre Galileo Galilei et Frédéric Cesi, avec documents inédits.

Frédéric Cesi fit partie de l'Académie des Lincei. Il soutint Galilée dans la discussion que celui-ci souleva en publiant son Ouvrage : *Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua, e che in quella si muovono.* Cesi s'occupa des taches solaires et publia un Ouvrage intitulé *Celispicio*, dans lequel il bat en brèche la solidité et la multiplicité des orbites des corps célestes, ainsi que la figure des mouvements admise jusqu'alors.

Genocchi (*Angelo*). — Sur quelques assertions de C.-F. Gauss sur les formes quadratiques $YY \pm nZZ$.

Dans sa lettre du 30 avril 1807 à Sophie Germain, Gauss signale quelques inexactitudes dans les propositions que celle-ci lui avait soumises.

Sophie Germain voulait démontrer que, si un nombre a la forme $h^2 + nf^2$, où h et f représentent des nombres entiers et n un nombre premier $4k + 3$, si l'on partage ce nombre en deux parties x et y, le binôme $x^n + y^n$ sera aussi de la forme $h^2 + nf^2$; elle ajoute que si $x^n + y^n$ est de la forme $h^2 + nf^2$, le binôme $x + y$ l'est aussi.

Gauss trouve que la proposition est trop générale et, en prenant un exemple particulier où $x = 15$, $y = 8$, $n = 11$, il démontre que la proposition est fausse. En effet on a, dans ce cas,

$$x^n + y^n = 86583457939 67 = A,$$

avec $A = h^2 + nf^2$; si l'on prend $h = 1595826$, $f = 745391$, on trouve

$$x + y = 23,$$

qui ne peut se réduire à la forme $h^2 + nf^2$.

D'après Sophie Germain, la proposition précédente était une conséquence de celle-ci : Si un facteur de l'expression $Y^2 \pm nZ^2$, n étant un nombre premier, a la forme $Y^2 \pm nZ^2$, l'autre facteur a aussi la même forme. Si ce théorème était exact, le premier le serait aussi; car, pour n de la forme $8k + 3$, on aurait

$$\frac{x^n + y^n}{x + y} = Y^2 \pm nZ^2.$$

et, ce quotient étant un facteur de $x^n + y^n$, le binôme $x + y$ serait de la forme $Y^2 + nZ^2$ si $x^n + y^n$ l'était.

Cette dernière proposition de Sophie Germain n'est exacte que dans le cas des facteurs indéfinis et ne s'étend pas aux nombres définis. Gauss indique comment il peut se faire que le produit de trois nombres f, g, h exprimés par des formes quadratiques de déterminant $-n$ soit de la forme $Y^2 + nZ^2$, ainsi que le produit de deux d'entre eux, sans que le troisième se réduise à cette forme.

Genocchi (*Angelo*). — Théorèmes de Sophie Germain sur les résidus biquadratiques.

Dans une lettre de Sophie Germain à Gauss, du 22 mai 1809, on trouve les théorèmes suivants : « -4 est résidu bicarré pour tous les nombres premiers de la forme $4k+1$ » et aussi : « Tout carré impair pris avec le signe — est non résidu bicarré de quelque nombre premier de la forme $8k+5$. » Ces propositions sont démontrées. Elle en tire la conséquence suivante :

« -4 est résidu biquadratique de tout nombre premier $p = 4k+1$. »

Sophie Germain désigne par n^2 le plus grand diviseur carré de k et par q le quotient de la division de k par n^2, par suite $k = n^2 q$. L'égalité $p = 4k+1$ devient $p = 4n^2 q + 1$ et donne

$$-4n^2 q \equiv 1 \pmod{p};$$

il en résulte que le nombre $-4n^2 q$ peut être considéré comme un résidu d'une puissance u de degré quelconque suivant le module p, et, puisque -4 est résidu biquadratique des p, le nombre $n^2 q$ le sera aussi. On peut aussi de l'égalité

$$p = 4n^2 q + 1$$

déduire la congruence

$$p \equiv 1 \pmod{r},$$

où r désigne un diviseur premier impair de n : par suite, p est résidu quadratique de r et, à cause du théorème fondamental (loi de réciprocité), il s'ensuit que r sera résidu quadratique de p. De même, n sera résidu quadratique de p, puisque tous les diviseurs impairs de n le sont. Lorsque n sera pair, le diviseur 2 sera aussi résidu quadratique, puisque p sera alors de la forme $8h+1$: donc n^2 sera résidu biquadratique de p; il en sera de même du facteur q. Si l'on suppose $q = 2$, on aura $p = 8n^2+1$ et 2 sera résidu biquadratique de tous les nombres premiers de la forme $8n^2+1$.

Sophie Germain ajoute : « Un nombre de la forme $8n^2+1$ ne peut être premier, à moins que n^2 ne satisfasse à l'équation

$$n^2 = \frac{Y^2+Y}{4} + 8x^2. \text{ »}$$

Elle semble avoir démontré cette proposition en s'appuyant sur le théorème suivant, dû à Gauss : « Soit p un nombre premier de la forme $8n+1$, $+2$ et -2 seront résidus ou non résidus bicarrés de p, suivant que p est ou n'est pas de la forme $xx + 64yy$. »

Ce théorème a été démontré par Lejeune-Dirichlet, par Stern et par Lebesgue.

Favaro (*Antonio*). — Sur la mort de Marc Velser et sur certaines particularités de la vie de Galilée.

C'est à Marc Velser que Galilée dédia son travail sur les taches solaires. Une Note du Gronove qui se trouve dans les manuscrits de la Bibliothèque de Leyde laissait croire que Velser, ne pouvant remplir certains engagements, avait mis fin à ses jours par le poison. Melchior Adam croyait que Velser était mort le 13 juin 1614. Arnold, Charles Stengel et Veith donnent pour date de sa mort le 23 juin 1614. Cette date semble la plus probable. On conserve un portrait à l'huile de Velser au Musée d'Augusta.

Galilée eut à se plaindre des plagiats d'un Allemand, Simon Mayr. Celui-ci se dit d'abord l'auteur du *Mundus Jovialis* de Marc Velser, puis du *Sidereus nuncius* de Galilée, qui fait justice de toutes ces tentatives dans le *Saggiatore*, en réponse à la *Libra astronomica e filosofica* du P. Grassi. Il était temps de réagir : l'Allemand s'était attribué successivement toutes les découvertes de Galilée et, en dernier lieu, son Ouvrage *Sur le compas sphérique et militaire*.

S. Realis. — Sur une proposition inexacte de Sophie Germain.

L'ingénieur S. Realis communique certains exemples portant sur des nombres peu considérables et que l'on peut joindre à celui dont Gauss s'était servi pour démontrer que si un produit ayant la forme $x^2 + ny^2$, où n est un nombre premier $4k + 3$, a un facteur de la même forme, il ne s'ensuit pas nécessairement que l'autre facteur doive prendre la même forme. Tous les exemples portent sur le cas $n = 11$.

Henry (*Charles*). — Pierre de Carcavy, intermédiaire de Fermat, de Pascal et de Huygens, Bibliothécaire de Colbert et du roi, directeur de l'Académie des Sciences.

Pierre de Carcavy, fils d'un banquier de Cahors, est né à Lyon dans les premières années du XVIIe siècle. Le 20 juillet 1632, il fut nommé conseiller au Parlement de Toulouse. Il se lia avec Pierre de Fermat, conseiller aux requêtes depuis le 14 mai 1631 et conseiller au Parlement le 16 janvier 1638. Carcavy se livra à l'étude des Mathématiques; en 1645, il envoya à Pell la réfutation de la quadrature du cercle de Longomontanus. Il fut ensuite en relations avec Roberval, qu'il soutint contre Descartes dans la discussion soulevée par celui-ci sur certains passages de la Géométrie de Descartes. Il connut aussi le P. Mersenne et fut longtemps en correspondance avec Pascal.

C'est surtout avec Huygens qu'il eut des relations suivies. Dans la deuxième et la septième de ses lettres à Huygens, Carcavy manifeste le dessin de publier les Œuvres de Fermat. Dans la troisième il donne des renseignements précieux pour l'histoire du Calcul des probabilités et des Travaux de Pascal. Dans la huitième il nous apprend que le théorème tout récemment démontré par le P. Pépin et par M. Genocchi : « Il n'y a que sept qui, étant le double d'un carré moins un, soit la racine d'un carré de même nature », a été envoyé à Frenicle en 1658.

Carcavy fut présenté à Colbert vers 1648 et chargé de la Bibliothèque du roi. Il rangea les papiers du cardinal Mazarin, acheta les collections de M. de Sainte-Croyo, les papiers de Mathieu Molé, la Bibliothèque de milord Hapton, les ma-

nuscrits de Saint-Martial, de Limoges; il enregistra le legs des mille deux cent quatre-vingt-treize manuscrits historiques du comte de Béthune et opéra en 1666 la translation de la Bibliothèque rue Vivienne. Il fonda le cabinet des estampes en achetant les 123400 estampes de l'abbé de Marolles. Gaston d'Orléans avait légué à Louis XIV ses collections du Palais du Luxembourg et de Blois. Carcavy fit alors transférer le cabinet des médailles rue Vivienne.

Colbert fonda à cette époque l'Académie des Sciences. Carcavy en fit partie avec Huygens, Roberval, Frenicle, etc. Il réunit les matériaux qui servirent à publier plus tard la belle édition des *Mathematici veteres*. Après la mort de Colbert, arrivée en 1683, Carcavy dut quitter la Bibliothèque à la suite d'une disgrâce. Il mourut en 1684.

Le Paige (*C.*). — Correspondance de René-François de Sluse.

René-François de Sluse naquit à Visé, le 2 juillet 1622. Il fut destiné à l'état ecclésiastique et reçu chanoine de Saint-Lambert, le 1er avril 1657. Sluse fut un mathématicien remarquable, un linguiste consommé, un historien de mérite. Il cultiva la Physique, la Chimie, la Botanique et rendit à sa patrie des services éminents dans plusieurs charges importantes. Il fut en correspondance avec Pascal, Huygens, Oldenburg, Michel-Ange Ricci, Wallis et Pierre Lambeck.

Il se rendit à Rome en 1643, fut reçu docteur en droit et découvrit dans la Bibliothèque Médicis le manuscrit arabe des Coniques d'Apollonius.

Sluse se distingua comme analyste et comme généralisateur. Ses premières recherches sont relatives à la cycloïde. Il indique sa génération et l'évaluation de son aire. Il s'occupa aussi des lignes en perle dont l'équation est

$$y^n = k(a - x)^p x^m.$$

Il se servit surtout de l'équation

$$y^n = \frac{x^n(a - x)}{a^n},$$

qui représente la perle du $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre. Il publia le *Mesolabum* et s'occupa des équations du troisième degré.

Dans ses *Miscellanea*, Sluse étudia la quadrature d'une infinité de spirales et détermina leurs centres de gravité; il donna quelques propositions sur les maxima et les minima; il rechercha les points d'inflexion de certaines courbes; il généralisa le problème de Vincent Viviani sur le lieu du pied des normales menées d'un point donné à une infinité de paraboles ayant même sommet et même axe. Il déduisit l'aire de certaines courbes de la connaissance de leurs centres de gravité et inversement leurs centres de gravité quand on connaît l'aire de ces courbes. Il rechercha les centres de gravité de certains conoïdes hyperboliques. Enfin il traita certaines questions de l'Arithmétique de Diophante.

La méthode qu'il donna pour mener des tangentes aux courbes le place dans un des premiers rangs parmi les précurseurs du Calcul différentiel.

Enfin Sluse donna une solution du problème d'Alhazen sur les miroirs courbes.

Il mourut le 19 mars 1685.

Il légua sa bibliothèque, ses manuscrits et ses médailles au cardinal de Bouillon.

Ses Ouvrages passèrent en grande partie de la Bibliothèque de la ville de Sedan à la Bibliothèque nationale à Paris.

Boncompagni (*B.*). — Sur la vie et les travaux de François Barozzi.

François Barozzi est né, le 9 août 1537, dans l'île de Candie. Il fit ses études à l'Université de Padoue. Accusé de se livrer à la magie, il fut condamné, par l'Inquisition à Venise, à une forte amende. Il mourut dans cette ville le 23 novembre 1604.

Barozzi a publié un Ouvrage sur les *Éléments d'Euclide,* sur la Mécanique de Héron, sur les nombres de Pythagore. Il a donné aussi une méthode pour tracer les asymptotes d'une courbe. Il a fait imprimer un travail sur les Collections mathématiques de Pappus, sur le Livre des aires du juif Savasorde et enfin sur le Livre des dimensions d'Archimède. Mais son Ouvrage le plus important est sa *Cosmographie* publiée en 1585, d'après les idées de Jean de Sacrobosco.

Steinschneider. — Études sur Zarkali. (*Suite.*)

Favaro (*Antoine*). — Remarques sur les manuscrits de Galilée appartenant à la collection Libri-Ashburnham transférée à la Bibliothèque Mediceo-Laurentienne de Florence.

Henry (*Charles*). — Addition à son Mémoire sur Pierre de Carcavy.

ACTA MATHEMATICA (1).

Tome III; 1883-1884.

Kœnigsberger (*S.*). — Sur les transcendantes indépendantes qui appartiennent à une équation différentielle du premier ordre arbitraire. (1-48).

L'auteur dit de deux transcendantes qu'elles sont indépendantes lorsqu'il n'existe pas de relation algébrique entre elles et la variable dont elles dépendent. Il se propose et résout le problème suivant :

« Trouver toutes les équations différentielles du premier ordre

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

(1) Voir *Bulletin*, t. VIII_2, p. 136.

dont toutes les intégrales peuvent être exprimées à l'aide de n d'entre elles supposées indépendantes; ou, en d'autres termes, trouver les équations différentielles du premier ordre qui n'ont qu'un nombre limité d'intégrales indépendantes. »

L'intégrale générale est alors exprimable algébriquement à l'aide de la variable et de n intégrales particulières indépendantes.

L'auteur étudie d'abord le cas où l'expression de l'intégrale générale est un *polynôme entier* par rapport à n intégrales particulières. Il trouve que les équations linéaires jouissent seules de cette propriété.

Lorsque l'expression de l'intégrale générale doit contenir *rationnellement* n intégrales particulières, il faut que l'équation rentre dans le type de Riccati généralisé

$$(1) \qquad \frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)z^2 + \varphi_2(x)z + \varphi_3(x).$$

Enfin reste en dernier lieu le cas général où l'on sait seulement que l'intégrale générale s'exprime algébriquement par n intégrales particulières.

L'auteur commence par remarquer que, si l'on applique à l'équation (1) une transformation algébrique quelconque, l'équation transformée jouit précisément de cette propriété.

Il démontre ensuite que les équations différentielles ainsi obtenues jouissent seules de cette propriété.

En conséquence, les intégrales d'une équation différentielle du premier ordre sont généralement *indépendantes* entre elles.

Le seul cas exceptionnel est fourni par le type d'équation (1), et les équations qui en dérivent par une transformation algébrique.

Poincaré (*H.*). — Mémoire sur les groupes kleinéens. (49-92).

Les *Acta* (t. I) ont déjà publié deux importants Mémoires de M. Poincaré sur la théorie des groupes fuchsiens et les fonctions fuchsiennes. Dans ces travaux l'auteur avait principalement en vue la théorie des substitutions linéaires à coefficients réels, et des fonctions qui se rattachent à ces substitutions.

Dans le Mémoire actuel, M. Poincaré étend ses recherches aux substitutions linéaires à coefficients imaginaires. Il présente d'abord une classification de ces substitutions en quatre types, parabolique, elliptique, hyperbolique, loxodromique et remarque que ces substitutions transforment les cercles en des cercles. Cette propriété les rapproche naturellement de la transformation géométrique appelée *inversion*, et l'auteur montre en effet que toute substitution linéaire imaginaire équivaut géométriquement à un nombre pair d'inversions successives.

Cette équivalence peut même être réalisée d'une infinité de manières.

Dans la théorie des groupes fuschsiens, l'axe des quantités réelles et les cercles orthogonaux à cet axe, tracés dans le plan, jouent un rôle prépondérant. De même ici, le plan et les sphères qui le coupent à angle droit offrent les éléments essentiels de la théorie des groupes kleinéens. Soient $C_1, C_2, \ldots, C_m$ des cercles du plan qui définissent $2n$ inversions équivalentes à une substitution linéaire imaginaire S, et $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_m$ les sphères qui ont même centre et même rayon que ces cercles, et qui, par conséquent, sont orthogonales au plan. La *transformation de l'espace* qui consiste dans $2n$ inversions successives par

rapport aux sphères Σ se confond avec le système des inversions par rapport aux cercles C et, par conséquent, avec la substitution S, *lorsque le point que l'on transforme est dans le plan.* Cette succession d'inversions par rapport aux sphères Σ dans l'espace n'est donc autre que la généralisation et l'extension aux points de l'espace de la transformation S. Par cette ingénieuse remarque la théorie des substitutions imaginaires se trouve transportée dans l'espace, et les figures polyédrales formées de sphères orthogonales au plan présentent un moyen d'étude des groupes kleinéens de même que les polygones tracés dans le plan et formés de cercles normaux à l'axe des quantités réelles dans le cas des groupes fuchsiens.

Il s'en faut cependant qu'il y ait une entière identité entre les deux théories. Une différence importante se rencontre tout d'abord lorsqu'il s'agit de définir la discontinuité des groupes.

Une substitution linéaire

$$\left| z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right|$$

est infinitésimale si les modules de $(\alpha - 1)$, β, γ, $(\delta - 1)$ sont infiniment petits. Un groupe de substitutions linéaires est continu s'il contient une substitution infinitésimale. Mais, en dehors de la continuité ainsi définie, il peut arriver que, dans un domaine aussi resserré que l'on voudra autour d'un point z, le groupe fournisse toujours une infinité de transformées de ce point. Dans le cas des substitutions réelles ce fait ne pourra se présenter que si z est sur l'axe réel; dans le cas de substitutions imaginaires, au contraire, ce fait peut se présenter pour un point quelconque du plan. La *discontinuité* du groupe est alors *impropre*. L'auteur se borne à la considération des groupes *proprement discontinus*, c'est-à-dire qui n'offrent pas de *discontinuité impropre* de la nature de celle que l'on vient de définir. Il indique la condition que doit remplir le *polyèdre générateur* pour que le groupe soit proprement discontinu. C'est à un tel groupe qu'on donne le nom de *kleinéen*.

Après avoir donné la classification des groupes kleinéens d'après les caractères de leurs polygones ou polyèdres générateurs, M. Poincaré passe à la définition des fonctions thêta-kleinéennes et kleinéennes.

En représentant par H une fonction rationnelle dont les pôles ne sont pas des points singuliers du groupe, par m un entier supérieur à 1 et enfin par

$$\left| z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right|$$

une substitution quelconque du groupe, l'auteur forme la série convergente suivante, où le signe Σ s'étend à toutes les substitutions du groupe

$$\Theta(z) = \Sigma H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}.$$

Cette fonction $\Theta(z)$ jouit de la propriété exprimée par l'équation

$$\Theta\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = \Theta(z)(\gamma_i z + \delta_i)^{2m},$$

et l'on forme, à l'aide de ce type de fonctions, une fonction $F(z)$ qui se reproduit pour toutes les substitutions du groupe. Toutes les fonctions kleinéennes

$F(z)$ qui se rapportent à un même groupe sont des fonctions rationnelles de deux d'entre elles x et y; et entre x, y a lieu une relation algébrique

$$f(x, y) = 0,$$

dont le genre égale celui du groupe.

L'auteur termine par l'indication de plusieurs applications.

Krause (*Martin*). — Sur la transformation des fonctions elliptiques. (93-96).

Lindelöf (*S.*) — Une question de rentes viagères. (97-100).

Trouver la valeur annuelle d'une rente viagère payable, à la fin de chaque année, à un groupe donné de m personnes à telles conditions, que la somme à payer chaque fois, au lieu d'être constante, dépende du nombre des survivants et qu'elle soit fixée respectivement à $r_n, r_{n-1}, \ldots, r_1$ francs pour les périodes de temps successives où le groupe donné sera réduit à $n, n-1, \ldots, 1$ personnes en vie.

Hjalmar Mellin. — Une généralisation de l'équation

$$\Gamma(1+x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}.$$

(101-104).

On peut traduire cette équation en disant que l'on a

$$\frac{1}{\Gamma(1-\rho_1 x)\,\Gamma(1-\rho_2 x)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

si ρ_1 et ρ_2 sont racines de l'équation $\rho^2 = 1$. Plus généralement, on a

$$\frac{1}{\Gamma(1-\rho_1 x)\,\Gamma(1-\rho_2 x)\ldots\Gamma(1-\rho_\nu x)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^\nu}{n^\nu}\right),$$

si $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ sont racines de l'équation $\rho^\nu = 1$; et, plus généralement encore, si $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ conservent la même signification, on a

$$\frac{\Gamma^\nu(z)}{\Gamma(z-\rho_1 x)\,\Gamma(z-\rho_2 x)\ldots\Gamma(z-\rho_\nu x)} = \prod_{n=0}^{\infty}\left[1-\frac{x^\nu}{(z+n)^\nu}\right].$$

De Sparre. — Sur l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(2\nu\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x}{\mathrm{dn}\,x} + 2\nu_1\frac{\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{dn}\,x}{\mathrm{cn}\,x} - 2\nu_2\frac{\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x}{\mathrm{sn}\,x}\right)\frac{dy}{dx}$$
$$= \left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2 x}(n_3-\nu_2)(n_3+\nu_2+1) + \frac{\mathrm{dn}^2 x}{\mathrm{cn}^2 x}(n_2-\nu_1)(n_2+\nu_1+1)\right.$$
$$+ \frac{k^2\,\mathrm{cn}^2 x}{\mathrm{dn}^2 x}(n_1-\nu)(n_1+\nu+1)$$
$$\left. + k^2\,\mathrm{sn}^2 x(n+\nu+\nu_1+\nu_2)(n-\nu-\nu_1-\nu_2+1) + h\right] y.$$

(105-140; 289-321).

L'auteur commence en rappelant les travaux de M. Hermite sur l'équation de Lamé, et les trois équations

$$y'' + 2(\nu+1)\frac{k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} y' = [(n-\nu)(n+\nu+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y,$$

$$y'' + 2(\nu+1)\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} y' = [(n-\nu)(n+\nu+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y,$$

$$y'' - 2(\nu+1)\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} y' = [(n-\nu)(n+\nu+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y,$$

sur lesquelles M. Hermite a attiré l'attention des géomètres et dont la première comprend l'équation de Lamé. M. Darboux, dans les *Comptes rendus* (19 juin 1882), a aussi considéré l'équation

$$y'' = \left[\frac{\mu(\mu+1)}{\operatorname{sn}^2 x} + \frac{\mu^2(\mu^2+1)}{\operatorname{cn}^2 x}\operatorname{dn}^2 x + \frac{\mu''(\mu''+1)}{\operatorname{dn}^2 x} k^2 \operatorname{cn}^2 x + n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h\right]y,$$

qui comprend également l'équation de Lamé et les précédentes et qui a une intégrale uniforme lorsque μ, μ', μ'' et n sont entiers. On sait que dans ce cas, en vertu d'un théorème de M. Picard, son intégrale s'exprime par les fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

L'équation de l'auteur est identique à celle de M. Darboux. En s'appuyant sur une transformation très simple, l'auteur remarque que l'équation

$$(5) \qquad z'' - \frac{V'}{V} z' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{P'^2}{P^2} - D_x \frac{P'}{P} - \frac{1}{2}\frac{V'^2}{V^2} + D_x \frac{V'}{V} + 2\alpha P^2\right] z$$

admet l'intégrale

$$z = \sqrt{\frac{V}{P}}\left(A e^{\sqrt{\alpha}\int P\,dx} + B e^{-\sqrt{\alpha}\int P\,dx}\right),$$

où A et B sont deux constantes arbitraires, puis il identifie son équation avec l'équation (5).

Il trouve tout d'abord et sans difficulté

$$V = \operatorname{dn}^{2\nu} x \operatorname{cn}^{2\nu_1} x \operatorname{sn}^{2\nu_2} x.$$

La considération de la partie principale du développement du second membre de (5) lui fournit ensuite cette expression pour P

$$P = R\,\frac{H^{2n_3}(x)\,H_1^{2n_2}(x)\,\Theta_1^{2n_1}(x)\,\Theta^{2n}(x)}{H(x-a_1)\,H(x+a_1)\,H(x-a_2)\,H(x+a_2)\ldots H(x-a_\beta)\,H(x+a_\beta)},$$

où l'on a $\beta = n + n_1 + n_2 + n_3$. Les quantités R, $a_1, a_2, \ldots, a_\beta$ sont les constantes, dont la détermination est le dernier point auquel se ramène l'intégration.

La valeur de P peut s'écrire encore sous la forme suivante, plus apte à l'intégration

$$P = \frac{H'(x-a_1)}{H(x-a_1)} - \frac{H'(x+a_1)}{H(x+a_1)} + \ldots + \frac{H'(x-a_\beta)}{H(x-a_\beta)} - \frac{H'(x+a_\beta)}{H(x+a_\beta)} + C,$$

où C est une constante.

Et l'intégrale a alors la forme

$$\mathrm{dn}^{\nu} x\, \mathrm{cn}^{\nu_1} x\, \mathrm{sn}^{\nu_2} x \left[\mathrm{A} \frac{\mathrm{H}(x-a_1)\,\mathrm{H}(x-a_2)\ldots\mathrm{H}(x-a_\rho)}{\mathrm{H}^{n_3}(x)\,\mathrm{H}_1^{n_2}(x)\,\Theta_1^{n_1}(x)\,\Theta^{n}(x)} e^{\frac{\mathrm{C}}{2}x} \right.$$
$$\left. + \mathrm{B} \frac{\mathrm{H}(x+a_1)\,\mathrm{H}(x-a_2)\ldots\mathrm{H}(x+a_\rho)}{\mathrm{H}^{n_3}(x)\,\mathrm{H}_1^{n_2}(x)\,\Theta_1^{n_1}(x)\,\Theta^{n}(x)} e^{-\frac{\mathrm{C}}{2}x} \right].$$

L'auteur examine avec détails divers cas intéressants ou se rattachant à des travaux connus et compris comme cas particuliers dans l'équation générale.

Beltrami (*E.*). — Les couches de niveau électromagnétique. (141-152).

Les actions électromagnétiques donnent lieu à des surfaces et à des couches de niveau comme les forces newtoniennes. Après avoir rappelé les formules, déjà données par lui, qui fournissent les systèmes de courants constants et fermés dont l'action est la même que celle d'un corps magnétique donné, l'auteur se place dans le cas particulier où les composantes α, β, γ du moment magnétique en un point (x, y, z) dérivent d'un potentiel φ, d'après les formules

$$\alpha = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \beta = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad \gamma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

en supposant en outre que, dans tout l'espace S occupé par le corps magnétique, on ait l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0,$$

et, d'autre part,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0,$$

sur la surface σ qui limite l'espace S. Il résulte alors soit d'un théorème de Poisson, soit même des formules de l'auteur, que les courants du système sont tous sur la surface S, qu'ils s'y meuvent suivant les courbes $\varphi = \text{const.}$ avec l'intensité

$$\mathrm{I} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{N}},$$

où N est relatif à la normale à la surface $\varphi = \text{const.}$ L'action électromagnétique est nulle hors de l'espace S, et dans l'intérieur de cet espace, les composantes de la force électromagnétique sont respectivement

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

L'auteur parvient ainsi au théorème suivant :

« Soit φ la fonction potentielle électromagnétique d'un système Γ de courants et soit σ une surface, lieu géométrique de lignes de force extérieures relatives à ces courants, et partageant l'espace infini en deux régions S et S', dont la première ne renferme aucune partie de Γ. Si l'on fait parcourir cette surface

par un système de courants (solénoïde neutre), dont l'intensité spécifique (de superficie) soit

$$I = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial N},$$

N étant la normale aux surfaces $\varphi = \text{const.}$, l'action électromagnétique de ce système est nulle dans tout l'espace S′ et est identique, dans tout l'espace S à celle du système primitif Γ. »

Les surfaces homofocales du second degré présentent une remarquable application de ce théorème, et les résultats présentent la plus grande élégance lorsque l'on suppose successivement que les lignes de courbure ou les génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe sont parcourues par des courants.

Krause. — Sur la transformation des fonctions hyperelliptiques de premier ordre. (153-180).

Des travaux de M. Hermite et d'autres savants sur la transformation des fonctions hyperelliptiques de premier ordre, il résulte qu'on peut représenter les fonctions θ transformées pour une transformation quelconque du $n^{\text{ième}}$ degré, abstraction faite d'un facteur commun, comme des fonctions entières des fonctions primitives θ, du $n^{\text{ième}}$ degré, et contenant un certain nombre de constantes linéairement. Brioschi a donné une détermination de ces constantes. L'auteur se propose d'exposer une autre méthode de détermination au moyen de laquelle ces constantes deviennent des fonctions rationnelles des fonctions θ, soit primitives, soit transformées, quand les arguments prennent la valeur zéro. L'avantage de cette méthode, c'est qu'elle donne en même temps le moyen de déduire autant de rapports modulaires que l'on veut pour un degré quelconque de transformation.

Le Paige (*C.*). — Sur les surfaces du troisième ordre. (181-200).

L'objet du Mémoire est la construction d'une surface du troisième ordre définie par dix-neuf points.

La méthode consiste dans l'emploi des homographies et des involutions d'ordres supérieurs. Dans la première Partie, M. Le Paige rappelle la construction ponctuelle de la cubique gauche passant par six points, et traite divers problèmes relatifs à l'involution ou à l'homographie sur une cubique. Dans la seconde Partie, l'auteur s'occupe de la construction qu'il s'est proposée. Il s'appuie sur le théorème fondamental que voici :

« Si un tétraèdre se déforme de telle façon que trois de ses faces passent par trois droites fixes, tandis que la quatrième reste tangente à une surface de la seconde classe Σ_2, et que trois de ses sommets parcourent trois droites concourantes formant un trièdre dont les faces soient tangentes à Σ_2, le quatrième sommet décrit une surface du troisième ordre passant par les trois droites fixes et par le sommet du trièdre. »

M. Le Paige indique ensuite la solution des problèmes suivants :

« Section d'une surface du troisième ordre par un plan quelconque, quand on

connaît de la surface trois droites et sept points; ou bien une droite, trois groupes de trois points en ligne droite et six autres points; ou bien une droite, trois points en ligne droite, et douze autres points.

« Construction d'une surface du troisième ordre dont on connaît trois points en ligne droite, et seize autres points; ou bien dix-neuf points; ou bien quatre groupes de trois points en ligne droite, et sept autres points. »

Il résulte, en somme, des constructions de l'auteur que l'on peut, dix-neuf points étant donnés dans l'espace, construire linéairement autant de points que l'on veut de la section faite, dans la surface cubique déterminée par ces points, par un plan qui passe par un des dix-neuf points donnés.

L'auteur reconnaît que les constructions qu'il emploie sont un peu longues; mais il faut bien convenir avec lui que dans un sujet aussi compliqué il paraît difficile d'obtenir des résultats très simples.

Prym (*F.*). — Une nouvelle démonstration pour la formule θ de Riemann. (210-215).

Il s'agit des fonctions θ à plusieurs variables.

L'auteur a déjà donné deux démonstrations de cette formule; celle qu'il présente ici est conçue dans le même esprit que celle de Jacobi pour le cas des fonctions elliptiques, et dont le principe consiste dans une transformation linéaire simultanée des variables et des lettres de sommation.

Prym (*F.*). — Déduction d'une formule générale concernant les fonctions θ. (216-239).

La démonstration précédente de la formule de Riemann conduit M. Prym à une généralisation de cette formule. A côté de la fonction

$$\mathfrak{S}(w_1 | w_2 | \ldots | w_p) = \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu w_\mu},$$

$$a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}.$$

M. Prym a introduit la fonction

$$\mathfrak{S}\begin{bmatrix} g_1 & \ldots & g_p \\ h_1 & \ldots & h_p \end{bmatrix}(w_1 | \ldots | w_p)$$

$$\sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}(m_\mu + g_\mu)(m_{\mu'} + g_{\mu'}) + 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=p} (m_\mu + g_\mu)(w_\mu + h_\mu \pi i)},$$

qui se réduit à la précédente lorsque tous les g et tous les h sont nuls.

La formule générale établie par l'auteur se rapporte à cette fonction, qu'il représente abréviativement par

$$\mathfrak{S}\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((w)) = \mathfrak{S}\begin{bmatrix} g_1 & \ldots & g_p \\ h_1 & \ldots & h_p \end{bmatrix}(w_1 | w_2 | \ldots | w_p).$$

Voici cette formule :

$$(r^n s)^p \mathfrak{F}((ru^{(1)}))\mathfrak{F}((ru^{(2)}))\ldots\mathfrak{F}((ru^{(n)}))$$
$$= \sum_{\alpha,\beta}^{0,1,2,\ldots,n-1} \mathfrak{F}\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(1)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(1)}}{r} \end{bmatrix}((rv^{(1)}))\mathfrak{F}\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(2)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(2)}}{r} \end{bmatrix}((rv^{(2)}))\ldots\mathfrak{F}\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(n)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(n)}}{r} \end{bmatrix}((rv^{(n)})).$$

Le nombre r est un entier positif; les quantités ru et v (ou v et ru) se déduisent les unes des autres par une substitution orthogonale à laquelle l'auteur rattache les nombres entiers $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ par des considérations arithmétiques élémentaires, mais que nous ne pouvons rapporter avec détail.

Krazer (*A.*) et *Prym* (*F.*). — Sur la généralisation de la formule de Riemann relative aux fonctions θ. (240-276).

Une transformation linéaire orthogonale effectuée à la fois sur les variables et les lettres de sommation est l'origine de la formule établie ci-dessus par M. Prym. Jacobi et Rosenhaim ont eu à considérer une pareille substitution orthogonale, mais qui offrait ce caractère remarquable d'avoir un déterminant symétrique

Voici, en effet, cette substitution :

$$\begin{aligned} x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} &= 2y^{(1)}, \\ x^{(1)} + x^{(2)} - x^{(3)} - x^{(4)} &= 2y^{(2)}, \\ x^{(1)} - x^{(2)} + x^{(3)} - x^{(4)} &= 2y^{(3)}, \\ x^{(1)} - x^{(2)} - x^{(3)} + x^{(4)} &= 2y^{(4)}. \end{aligned}$$

Néanmoins, ce n'est pas cette symétrie du déterminant de la substitution qui constitue le caractère essentiel de cette substitution; ce qui la caractérise aux yeux des auteurs, c'est que les premiers membres sont congrus entre eux suivant le module 2.

De là le problème suivant :

« Trouver toutes les substitutions orthogonales à coefficients entiers, relatives à n variables, et dont les premiers membres soient congrus suivant un même nombre r. »

A chaque valeur de n correspond une solution entièrement déterminée. Ainsi, lorsque $n = 2\nu + 1$, on trouve que $r = n = 2\nu + 1$; lorsque $n = 2\nu$, on trouve

$$r = \frac{n}{2} = \nu.$$

MM. Krazer et Prym étudient alors la formule qui correspond à une telle transformation orthogonale, et ils retrouvent en effet les propriétés et les caractères essentiels de la formule de Riemann, qui correspond au cas particulier de $n = 4$.

Steen (*A.*). — Note sur certaines équations différentielles linéaires. (277-282).

L'auteur considère une équation différentielle de l'ordre n jouissant de la propriété que, si on la représente par

$$f(x, y, n, p) = 0,$$

elle se réduira pour $p = n$ à

$$f(x, y, n, n) = y^{(n)} - \frac{a x^n}{[n-1]} y^{(n-1)} = 0,$$

tandis que, si $p > n$ et est entier, on a

$$f(x, y, n, p)$$
$$= \sum_{r=\nu}^{r=n} (-1)^r \frac{(p-n)(p-n+1)\ldots(p-n+r-2)}{1.2\ldots(r-1)} \frac{a x^{n-r}}{[n-r]} y^{(n-r)} = 0.$$

En différentiant cette équation, on trouve

$$f(x, y', n, p-1) = 0.$$

Cette propriété permet d'intégrer l'équation proposée pour toutes les valeurs entières du nombre p.

Krause (*Martin*). — Sur le multiplicateur des fonctions hyperelliptiques de premier ordre. (283-288).

Hjalmar Mellin. — Sur certains produits infinis exprimables par la fonction Γ. (322-324).

On a vu plus haut que l'auteur a démontré dans ce même tome des *Acta* la formule

$$\frac{\Gamma^\nu(z)}{\Gamma(z-\rho_1 x)\ldots\Gamma(z-\rho_\nu x)} = \prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1 - \frac{x^\nu}{(z+n)^\nu}\right],$$

où $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ sont racines de l'équation $\rho^\nu = 1$. Il généralise ici cette formule comme il suit.

Soit $R(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_\nu x^\nu$ un polynôme entier qui s'annule avec x, on a

$$\frac{\Gamma^\nu(z)}{\Gamma(z-\rho_1 x)\Gamma(z-\rho_2 x)\ldots\Gamma(z-\rho_\nu x)}$$
$$= e^{c\alpha_1 x}\left[1 + R\left(\frac{x}{z}\right)\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1 + R\left(\frac{x}{z+n}\right)\right]e^{-\alpha_1 \frac{x}{n}}\right.;$$

la quantité $c = 0{,}577\ldots$ est une constante numérique déterminée, et $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_\nu$ sont les racines de l'équation

$$\rho^\nu + \alpha_1 \rho^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu = 0.$$

Halphen (*C.-H.*). — Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre. (325-380).

Soit une équation différentielle linéaire d'un ordre m quelconque; P_1, $P_2, \ldots, P_m$ les coefficients; X et Y la variable et la fonction; on effectue la transformation

$$\frac{dx}{dX} = \mu, \qquad Y = uy,$$

où μ et a sont deux fonctions arbitrairement choisies de X, et x, y la nouvelle variable et la nouvelle fonction. L'équation différentielle, par cette transformation, se change en une autre dont $p_1, p_2, \ldots, p_m$ seront les coefficients. Cela posé, on appelle invariant absolu de l'équation différentielle une fonction f des P et de leurs dérivées par rapport à X telle que l'on ait

$$f\left(P, \frac{dP}{dX}, \ldots\right) = f\left(p, \frac{dp}{dx}, \ldots\right);$$

l'invariant est seulement relatif, si, au lieu de l'identité précédente, on a

$$f\left(P, \frac{dP}{dX}, \ldots\right) = \frac{1}{\mu^n} f\left(p, \frac{dp}{dx}, \ldots\right).$$

Ces invariants, dont la théorie se développe chaque jour, ont trouvé une belle application dans le beau Mémoire de l'auteur *Sur la réduction des équations linéaires aux formes intégrables*, que l'Académie a honoré du grand Prix des Sciences mathématiques. Au point de vue géométrique, ils se rattachent aux propriétés projectives des figures et ne diffèrent pas de ces invariants différentiels dont la théorie des courbes planes et celle des courbes gauches ont donné les premiers exemples.

Voir, par exemple, HALPHEN, *Thèse sur les invariants différentiels* et, dans le *Journal de l'École Polytechnique, Sur les invariants différentiels des courbes gauches.*

Dans le présent Mémoire, l'auteur se propose de traiter avec détail la théorie des invariants, pour le cas d'une équation différentielle linéaire du quatrième ordre.

Ce cas du quatrième ordre est étroitement lié avec la théorie des invariants différentiels des courbes gauches.

En effet, tout invariant de l'équation du quatrième ordre peut être exprimé à l'aide d'un système fondamental d'intégrales Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, et ne change pas si l'on effectue un changement de système fondamental, c'est-à-dire, si l'on effectue une transformation linéaire des quantités Y_1, Y_2, Y_3, Y_4; il suit de là qu'un tel invariant est un invariant différentiel de la courbe gauche dont les coordonnées homogènes sont proportionnelles à Y_1, Y_2, Y_3, Y_4.

Si l'on effectue la transformation

$$Y = uy,$$

toutes les fonctions Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 sont multipliées par un même facteur, le point ne change pas; si l'on change de variable par la formule

$$\frac{dx}{dX} = \mu,$$

la courbe ne change pas. On voit donc que la théorie des invariants d'une équation du quatrième ordre coïncide avec celle des propriétés projectives infinité-

simales d'une certaine courbe gauche, dont l'auteur dit qu'elle est *attachée* à l'équation différentielle.

Cette remarque fournit une méthode pour trouver des invariants différentiels; par exemple, l'un d'eux, que M. Halphen représente par V, égalé à zéro, exprime que toutes les tangentes de la courbe appartiennent à un même complexe linéaire.

Cet invariant V est le plus simple que l'on puisse former; il peut servir à former tous les autres. D'abord, si l'on effectue la transformation

$$\frac{d\xi}{dX} = (30V)^{\frac{1}{3}}, \qquad Y = V^{-\frac{1}{2}} e^{-\int P_1 dx} \eta,$$

l'équation différentielle devient

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} + 2H\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + 2\left(\frac{dH}{d\xi} - 1\right)\frac{d\eta}{d\xi} + K\eta = 0.$$

Les quantités H, K sont des invariants absolus, et leurs dérivées par rapport à ξ engendrent une double série d'invariants absolus. En posant

$$H = \frac{\Phi}{V^4(30V)^{\frac{4}{3}}}, \qquad K = -\frac{\Delta}{V^2(30V)^{\frac{2}{3}}},$$

les quantités Φ et Δ sont des invariants entiers, dont M. Halphen donne l'expression. Ces trois invariants V, Φ, Δ peuvent servir à la formation d'une suite d'invariants par le moyen desquels tout invariant s'exprime rationnellement. La considération des deux équations qui conviennent à une cubique gauche conduit à un nouvel invariant s, du septième ordre par rapport aux intégrales.

Lorsque l'on passe de la définition d'une courbe gauche par ses points à sa définition par ses plans osculateurs, on reconnaît qu'elle se trouve attachée en réalité à deux équations du quatrième ordre; ces deux équations sont dites *adjointes* l'une à l'autre. C'est à Lagrange qu'est due la considération de l'équation adjointe. Avec le système des variables ξ, η définies plus haut, l'équation adjointe a la forme

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} + 2H\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + 2\left(\frac{dH}{d\xi} + 1\right)\frac{d\eta}{d\xi} + K\eta = 0.$$

Le cas de $V = 0$ échappe à cette transformation. Mais alors on peut transformer l'équation dans son adjointe, ce qui correspond à cette propriété :

Les droites d'un complexe linéaire qui ont une enveloppe forment une figure qui est réciproque à elle-même.

Le cas important où il existe entre les intégrales une relation quadratique est traité avec détail par l'auteur. Il retrouve plusieurs résultats dus à M. Goursat, et est conduit à divers types intéressants d'équations différentielles, qui ont des liens étroits avec la célèbre équation de Lamé. Citons à titre d'exemples les cas suivants :

Lorsqu'il existe une relation quadratique entre les intégrales, et qu'en outre l'invariant V est nul, l'équation différentielle est réductible au cas des coefficients constants.

Lorsqu'il existe deux relations quadratiques entre les intégrales, la courbe attachée est une biquadratique, et l'équation différentielle est alors de la forme suivante, avec les notations de M. Weierstrass,

$$y^{\text{IV}} - \frac{15}{8}\wp(u)y'' - \frac{15}{16}\wp'(u)y' + \left[\frac{3^3}{2^{10}}g_2 - \frac{3.5.7}{2^9}\wp''(u)\right]y = 0.$$

Les fonctions elliptiques, comme on s'y attendre, fournissent l'intégrale de cette équation. Citons encore l'équation

$$y^{\text{IV}} - 4(n^2 + n + 3)\wp(u)y'' - 10n(n+1)\wp'(u)y' + 3g_2 y = 0.$$

Pour $n = \frac{1}{2}$ la courbe attachée est une biquadratique unicursale; et d'une façon générale, quand n est entier, cette équation a son intégrale uniforme et, par conséquent, est intégrable.

G. K.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome C; 1885 (1).

N° 1; 5 janvier.

Callandreau. — Sur la constitution intérieure de la Terre. (37-40).

Les principales hypothèses sur la loi des densités à l'intérieur de la Terre sont difficilement conciliables avec les données de la précession et de la nutation; il est probable même, comme l'a montré M. Tisserand (*Bulletin astronomique,* 1884) qu'on ne pourra pas établir l'accord cherché, même en adoptant l'aplatissement $\frac{1}{293,5}$. M. Callandreau montre que les prévisions de M. Tisserand sont confirmées dans le cas très étendu où les courbes représentatives de la densité tournent leur concavité vers l'axe des abscisses.

Poincaré. — Sur une généralisation du théorème d'Abel. (40-42).

Soient $f = 0$ une surface algébrique d'ordre m; (x_ν, y_ν, z_ν) un de ses points d'intersection avec une courbe gauche, intersection complète de deux surfaces $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$ de degrés n et p; $(x_\nu + dx_\nu, y_\nu + dy_\nu, z_\nu + dz_\nu)$ un de ses points d'intersection avec une courbe gauche voisine de la première. On

(1) Voir *Bulletin*, IX_2, p. 127.

aura

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=q} \frac{P_\nu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}dx_\nu + \frac{\partial\varphi}{\partial y_\nu}dy_\nu + \frac{\partial\varphi}{\partial z_\nu}dz_\nu\right)}{\Delta_\nu}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\nu=q} \frac{Q_\nu\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_\nu}dx_\nu + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_\nu}dy_\nu + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_\nu}dz_\nu\right)}{\Delta_\nu} = 0.$$

P et Q désignant des polynômes de degrés $m+p-4$ et $m+n-4$ en x, y, z, et Δ le déterminant fonctionnel de f, φ, φ_1.

Quand la courbe gauche n'est pas une intersection complète, la relation entre les différentielles dx_ν, dy_ν, dz_ν est beaucoup plus compliquée. M. Poincaré étudie le cas particulier d'une cubique gauche, pour donner une idée de la manière dont le problème devrait être traité dans le cas général.

Kantor (*S.*). — Sur une méthode pour traiter les transformations périodiques univoques. (42-44).

Si une surface représentable point par point sur le plan est telle qu'il existe entre ses points une correspondance univoque et périodique, son image fournira dans le plan une transformation univoque de Cremona. Il suffit donc de connaître une telle surface et le mode de correspondance de ses points pour découvrir dans le plan des transformations univoques périodiques (c'est-à-dire formant un groupe fini).

L'auteur remarque que ce principe se généralise de lui-même et donne des transformations portant sur plus de deux variables. Soit, par exemple, une variété à trois dimensions représentable point par point sur l'espace ordinaire, mais planant dans un espace à plusieurs dimensions, et telle qu'il existe entre ses points une correspondance univoque et périodique. En diversifiant les modes de représentation, on obtiendra dans l'espace ordinaire une série de transformations périodiques équivalentes entre elles.

M. Kantor énonce en terminant les résultats auxquels conduisent les surfaces reproduites par des homographies de l'espace à quatre dimensions.

Duhem. — Sur la théorie de l'induction électrodynamique. (44-46).

La théorie du *potentiel thermodynamique* permet de donner une démonstration rigoureuse de la loi intégrale de l'induction, exprimée par la formule de Neumann

$$E = -\frac{dP}{dt},$$

où E désigne la force électromotrice d'induction et P le potentiel électrodynamique de l'inducteur sur l'induit, ce dernier étant traversé par un courant d'intensité 1.

La loi élémentaire de l'induction n'est pas encore connue. Helmholtz admet qu'elle est la même que la loi intégrale. La théorie du potentiel thermodynamique montre que, pour deux éléments de courant, il existe en effet un poten-

tiel. La partie de ce potentiel qui dépend des intensités ne diffère de la forme proposée par Helmholtz que par un terme égal à $ii' \frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'}$, R étant une fonction de la distance; c'est la seule fonction qui reste indéterminée dans la formule fondamentale de l'induction.

Fournier. — Théorème nouveau sur la dynamique des fluides. (47-50).

Relation générale entre la vitesse et la pression, qui caractérise la *circulation horizontale* dans les liquides et dans les gaz. Application aux cyclones.

N° 2; 12 janvier.

Kantor (*S.*). — Théorie des transformations périodiques. (95-97).

Cette Note, déposée sous pli cacheté en 1883, résume les travaux de l'auteur sur les transformations périodiques. Toutes celles de ces transformations qui sont quadratiques et portent sur plusieurs variables y sont distribuées en huit classes et quarante-huit formes isolées.

Lévy (*L.*). — Sur certaines équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. (98-100).

Soit l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + c z = 0,$$

où a, b, c sont des fonctions données de x et y. Si l'on pose, avec M. Darboux,

$$z_1 = a z + \frac{\partial z}{\partial y},$$

l'équation (1) se transforme en une autre de même nature, et les deux quantités

$$h = ab - c + \frac{\partial a}{\partial x},$$

$$k = ab - c + \frac{\partial b}{\partial y}$$

sont des invariants.

M. L. Lévy effectue la substitution

$$z' = (a + \alpha) z + \frac{\partial z}{\partial y},$$

qui transforme l'équation (1) en celle-ci

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} + a' \frac{\partial z'}{\partial x} + b' \frac{\partial z'}{\partial y} + c' z' = 0.$$

si l'on assujettit α à la condition

$$\frac{\partial^2 \log \alpha}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{h}{\alpha^2}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial y} + k - h = 0.$$

Cette substitution donne naissance à deux invariants h' et k' dont l'étude conduit M. L. Lévy à ce résultat : l'équation (2) est toujours intégrable en même temps que l'équation (1).

N° 3; 19 janvier.

Callandreau. — Addition à deux Notes précédentes concernant la théorie de la figure des planètes et de la Terre. (163-164).

L'auteur examine le cas où la diminution de la compressibilité à l'intérieur de l'ellipsoïde fluide serait plus rapide que ne l'ont supposé Laplace et M. Roche, en sorte que la dérivée de la pression considérée comme fonction de la densité varierait plus rapidement que le carré de la densité. Cette hypothèse revient à supposer concave la courbe des densités.

Liouville (*R.*). — Sur quelques transformations nouvelles des équations linéaires aux dérivées partielles. (168-170).

D'une transformation très générale l'auteur déduit deux théorèmes qui permettent de former toutes les équations linéaires du second ordre dont l'intégrale contient au moins une fonction arbitraire dégagée du signe f. M. Moutard avait depuis longtemps signalé la possibilité d'arriver à un pareil résultat pour le cas particulier des équations de la forme $s = \lambda z$.

N° 4; 26 janvier.

Picard. — Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. (231-233).

Étant donnée l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

où f est un polynôme de degré m, peut-on l'intégrer en prenant pour u une fonction uniforme quadruplement périodique de x et y?

Si cette intégration est possible, les coordonnées d'un point de la surface

$$f(u, v, w) = 0$$

(supposée n'avoir que des singularités *ordinaires*) s'exprimeront par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres, et à un point quelconque (u, v, w) ne correspondra qu'un système de valeurs des paramètres, abstraction faite des multiples des périodes. On sait, d'après M. Picard, reconnaître si ces

circonstances peuvent se présenter. Soient alors

$$\int^{(u,v)} \frac{B\,du - A\,dv}{f'_w}, \quad \int^{(u,v)} \frac{B_1\,du - A_1\,dv}{f'_w}$$

les deux intégrales de première espèce que devra posséder la surface; celle-ci sera nécessairement du genre 1. Soit

$$Q(u, v, w) = 0$$

l'équation de la surface adjointe d'ordre $m - 4$. Si A et A_1 sont de la forme

$$A = (\alpha v + \beta w)\,Q(u, v, w),$$
$$A_1 = (\gamma v + \delta w)\,Q(u, v, w),$$

α, β, γ, δ étant des constantes, l'équation (1) admettra pour solutions des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres.

M. Picard donne du même problème une autre solution, qui dispense de passer par la recherche préalable des intégrales de différentielles totales de première espèce.

Goursat. — Sur un cas de réduction des équations linéaires du quatrième ordre. (233-235).

Ce cas est celui où la courbe gauche *attachée* à l'équation est située sur la surface développable du quatrième ordre ayant pour arête de rebroussement une cubique gauche. Les équations de la cubique gauche étant mises sous la forme

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{y_4},$$

l'équation de la développable sera

$$(y_1 y_4 - y_2 y_3)^2 - 4(y_1 y_3 - y_2^2)(y_2 y_4 - y_3^2) = 0.$$

On peut former des équations du quatrième ordre dont les intégrales vérifient cette relation. Si Y est l'intégrale générale d'une équation du second ordre, l'équation du quatrième ordre qui admet l'intégrale

$$y = pY^3 + 3qY^2\frac{dY}{dx},$$

où p et q sont des fonctions quelconques de x, répond à la question.

Ce résultat peut être généralisé :

Si les intégrales d'une équation linéaire d'ordre $n+1$, à coefficients uniformes, vérifient une relation dont le premier membre est identique au discriminant d'une forme binaire d'ordre n, elle admet l'intégrale

$$y = p_1 Y^n + p_2 Y^{n-1}\frac{dY}{dx} + \cdots + p_{n-1} Y^2\left(\frac{dY}{dx}\right)^{n-2},$$

Y désignant l'intégrale générale d'une équation du second ordre dont les coefficients sont uniformes, ainsi que $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$.

Plus généralement, si les intégrales d'une équation linéaire à coefficients uniformes vérifient une relation dont le premier membre est identique au discriminant d'une forme algébrique à p variables, ses intégrales sont des fonctions entières à coefficients uniformes des intégrales d'une équation linéaire d'ordre p à coefficients uniformes et de leurs dérivées.

Liouville (*R.*). — Sur les formes intégrables des équations linéaires du second ordre. (235-237).

L'auteur démontre deux nouveaux théorèmes sur la possibilité de former toutes les équations linéaires du second ordre à deux variables indépendantes qui s'intègrent par des formules contenant deux fonctions arbitraires dont l'une au moins est dégagée du signe $\int$. Ces théorèmes se rattachent aux propriétés de la forme

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x},$$

que l'on peut toujours attribuer aux équations du second ordre, et où φ et ψ sont des fonctions linéaires de l'inconnue principale et de ses dérivées partielles du premier ordre.

N° 5; 2 février.

Resal. — Sur le roulement des surfaces. (260-265).

Mannheim. — Représentation plane relative aux déplacements d'une figure de forme invariable assujettie à quatre conditions. (268-271).

Si des points centraux des surfaces élémentaires d'un pinceau de droites on élève des normales à ces surfaces, ces droites sont les génératrices d'un conoïde de Plücker. Le pinceau se représentera de la manière suivante :

Si dans un plan passant par un rayon du pinceau on porte, sur des perpendiculaires à ce rayon élevées des points centraux des surfaces élémentaires, et à partir de ces points, des longueurs égales aux paramètres de distribution des plans tangents à ces surfaces, les extrémités des longueurs ainsi portées sont sur une circonférence C qui passe par les foyers des rayons. D'un point de C, on voit l'arc compris entre deux de ces points sous un angle égal à celui que font entre eux les plans centraux des surfaces élémentaires dont les points centraux sont les projections de ces deux points sur le rayon.

M. Mannheim montre comment la circonférence C représente tout ce qui est relatif aux axes des déplacements d'une figure invariable (on sait que le lieu de ces axes est un conoïde de Plücker).

N° 6; 9 février.

Kantor (*S.*). — Sur une théorie des courbes et des surfaces admettant des correspondances univoques. (343-345).

Toute correspondance univoque entre les points d'une courbe algébrique de genre supérieur à 2 est contenue dans une transformation birationnelle de tout le plan. On peut même démontrer que les courbes de genre 1 et celles de genre 2 ne font pas exception à cette loi.

Toute courbe de genre supérieur à 1 et telle qu'il existe entre ses points une correspondance univoque correspond point par point à une courbe où la correspondance est contenue dans une transformation à six, sept ou huit points fondamentaux, ou dans une homographie, ou dans une transformation de M. de Jonquières dont les deux points fondamentaux d'ordre $n-1$ coïncident. Ces transformations forment d'ailleurs un groupe fini.

Poincaré. — Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. (346-348).

Outre les figures ellipsoïdales bien connues, il y a, pour une masse fluide homogène soumise à la loi de Newton et animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe, une autre forme d'équilibre qui consiste en une surface annulaire de révolution analogue à un tore.

Tel est le résultat, simplement énoncé dans le *Traité de Philosophie naturelle* de MM. Thomson et Tait, dont M. Poincaré retrouve la démonstration.

En supposant la vitesse angulaire ω très faible et les dimensions de la section très petites par rapport aux distances à l'axe, l'auteur établit que la méridienne peut être assimilée à une ellipse, dont l'aplatissement serait $\frac{5\omega^2}{4\pi}$.

Si ω est supérieur à $\sqrt{2\pi}$ (avec les unités adoptées), il n'y a plus pour la masse fluide aucune figure d'équilibre stable possible.

N° 7; 16 février.

Stieltjes. — Sur quelques théorèmes d'Algèbre. (439-440).

L'expression

$$(1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2)\ldots(1-\xi_n^2)\Pi(\xi_k-\xi_l)^2$$

est maxima lorsqu'on prend pour $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ les zéros du polynôme X_n de Legendre.

De même les racines du polynôme U_n, défini par la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} U_m U_n \, dx = 0 \qquad (m \gtrless n),$$

font acquérir un maximum à l'expression

$$e^{-\frac{1}{2}(\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2)} \Pi(\xi_k-\xi_l)^2.$$

Enfin, parmi toutes les équations de degré n dont les racines sont réelles et comprises entre -1 et $+1$, celle qui a son discriminant maximum est $V_n = 0$, en posant

$$\sqrt{1-2xz+z^2} = \sum_0^\infty V_n z^n.$$

N° 9; 2 mars.

Picard. — Sur un théorème de M. Darboux. (618-620).

L'auteur étend aux équations différentielles du premier ordre et de degré quelconque la méthode employée par M. Darboux pour intégrer les équations du premier ordre et du premier degré dont on connait un nombre suffisant de solutions algébriques particulières.

Soit l'équation du premier ordre

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy = 0,$$

où P et Q sont des polynômes de degré m, z étant la fonction algébrique de x et y définie par la relation algébrique de degré p

$$f(x, y, z) = 0.$$

Supposons que l'on connaisse

$$\frac{p^3 + 3p^2 m + (3m^2 - 1)p}{6} = r$$

solutions algébriques particulières, intersections *complètes* de la surface f et de r surfaces

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_2(x, y, z) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_r(x, y, z) = 0.$$

Si aucune courbe d'intersection n'est une ligne multiple de f, on aura l'identité

$$P\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = Af + B\varphi,$$

A et B étant des polynômes, le dernier de degré $m + p - 2$.

Cela posé, si l'on détermine les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ de manière que

$$\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \ldots + \alpha_r B_r$$

soit divisible par $f(x, y, z)$, l'intégrale générale s'obtiendra en adjoignant à l'équation $f = 0$ l'équation

$$\varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2}\ldots\varphi_r^{\alpha_r} = \text{const.}$$

Stieltjes. — Sur les polynômes de Jacobi. (620-622).

L'équation

$$F(-n, n + \alpha + \beta - 1, \alpha, x) = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$X = x^n - \frac{n.a}{1.c}x^{n-1} + \frac{n(n-1)a(a-1)}{1.2.c(c-1)}x^{n-2} - \ldots = 0,$$

où

$$a = \alpha + n - 1, \qquad c = \alpha + \beta + 2n - 2.$$

L'équation $X = 0$ ne peut avoir d'autres racines multiples que 0 et 1.

Lorsque α et β sont positifs, les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont toutes comprises entre 0 et 1, et l'expression

$$(\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n)^\alpha [(1-\xi_1)(1-\xi_2)\ldots(1-\xi_n)]^\beta \Pi(\xi_r - \xi_s)^2$$

est maxima pour $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$, ..., $\xi_n = x_n$.

M. Stieltjes donne des expressions remarquables des termes de la suite de Sturm relative au polynôme X.

Goursat. — Sur un cas de réduction des intégrales hyperelliptiques du second genre. (622-624).

Les deux intégrales

$$\int \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}, \quad \int \frac{t\,dt}{\sqrt{R(t)}},$$

où

$$R(t) = (t^2 + at + b)(t^3 + pt^2 + q),$$

se ramènent à des intégrales elliptiques par des substitutions rationnelles du troisième degré, pourvu que l'on ait

$$q = 4b + \tfrac{4}{3}pa.$$

Les formules de substitution sont respectivement

$$x = \frac{t^2 + at + b}{3t - p},$$

$$x = \frac{t^3 + pt^2 + q}{at^2 - 3bt^2}.$$

Laguerre. — Sur une intégrale définie. (624-627).

Si u désigne une des racines de l'équation

$$\frac{x^2}{a+u} + \frac{y^2}{b+u} - \frac{z^2}{c+u} = -1,$$

l'intégrale définie

$$\int_0^{2\pi} \frac{\xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi + \zeta}{(x\cos\varphi + y\sin\varphi + z)^2 + (a-c)\cos^2\varphi + (b-c)\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

où l'on suppose que l'élément différentiel ne passe pas par l'infini dans les limites de l'intégration, a pour valeur

$$\frac{\dfrac{x\xi}{a+u} + \dfrac{y\eta}{b+u} - \dfrac{z\zeta}{c+u}}{\dfrac{x^2}{(a+u)^2} + \dfrac{y^2}{(b+u)^2} - \dfrac{z^2}{(c+u)^2}} \; \frac{2\pi}{\sqrt{(a+u)(b+u)(c+u)}}.$$

La racine de l'équation du troisième degré et la valeur du radical se déterminent aisément par la considération des coupures, lorsqu'on regarde successivement dans l'intégrale x, y, z, a, b, c comme des variables.

Henry. — Les pôles du gyroscope et des solides de révolution. (627-630).

Quand un solide de révolution tourne sur son axe, les forces de Coriolis provenant de sa rotation et du mouvement diurne se réduisent à deux, égales, parallèles et de sens contraires, appliquées à deux points fixes de l'axe qui ne dépendent que de la figure du corps. Elles sont parallèles à l'axe terrestre, et leur intensité, proportionnelle à la vitesse du corps tournant, ne dépend que de sa figure.

N° 11; 16 mars.

Poincaré. — Sur les fonctions abéliennes. (785-787).

Les zéros communs à p fonctions Θ d'ordres $m_1, m_2, \ldots, m_p$ sont au nombre de

$$N = p!\, m_1 m_2 \ldots m_p.$$

M. Poincaré donne le moyen de calculer la somme X_i des N valeurs de x_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ qui satisfont aux p équations

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \ldots = \Theta_p = 0.$$

On sait qu'une fonction Θ d'ordre m est une fonction entière de p variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ qui ne change pas quand on augmente ces variables d'une des p premières périodes et qui se reproduit multipliée par les facteurs

$$e^{-mx_1+\delta_1}, \quad e^{-mx_2+\delta_2}, \quad \ldots, \quad e^{-mx_p+\delta_p},$$

quand les variables augmentent d'une des p dernières périodes. Si l'on appelle

$$e^{-m_i x_k+\delta_{ik}}$$

le $k^{\text{ième}}$ multiplicateur de Θ_i, on trouve que X_i est un polynôme du premier degré par rapport aux δ_{ik}, dont les coefficients sont linéaires par rapport aux quantités $m_1, m_2, \ldots, m_p$ considérées séparément et par rapport aux périodes.

Weyr (*Ed.*). — Sur la théorie des matrices. (787-789).

Soient M une matrice d'ordre n aux racines latentes $\mu_\alpha, \mu_\beta, \ldots, \mu_\lambda$; $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ les degrés de multiplicité de ces racines; $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ les degrés de nullité des matrices $M - \mu_\alpha$, $M - \mu_\beta$, $M - \mu_\lambda$. La matrice M satisfait à l'équation

$$(M - \mu_\alpha)^{\alpha-\alpha_1+1}(M - \mu_\beta)^{\beta-\beta_1+1}\ldots(M - \mu_\lambda)^{\lambda-\lambda_1+1} = 0.$$

Les nombres $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$, dont chacun est au moins égal à 1, ne peuvent surpasser respectivement les nombres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$. Dans le cas de

$$\alpha_1 = \beta_1 = \ldots = \lambda_1 = 1,$$

on retrouve l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré de M. Cayley. Dans tout autre cas, la matrice M, satisfaisant à une équation de degré moindre que n, est *dérogatoire*, suivant l'expression de M. Sylvester.

En étudiant la nullité des matrices, M. Weyr a trouvé que le degré de nullité d'un produit de matrices est au plus égal à la somme des degrés de nullité des facteurs et au moins égal au plus petit de ces degrés.

De là on conclut l'impossibilité de certaines équations en matrices. Soit par exemple N une matrice admettant zéro pour racine d'ordre α, et soit $\alpha_1 < \alpha$ le degré de nullité de N : il est impossible de déterminer une matrice X, telle que l'on ait $X^k = N$, l'entier k étant plus grand que $\alpha_1 - \alpha$.

Kœnigs. — Sur les types canoniques des formes quadratiques ternaires des différentielles à discriminant nul. (789-791).

Soit F une forme quadratique des différentielles de trois variables indépendantes. Lorsque le discriminant de F est nul, cette forme est le produit de deux formes linéaires ω et ω'. Quand ω et ω' sont toutes deux intégrables, on peut ramener F à l'un des deux types canoniques

$$F = \lambda\, d\xi\, d\eta, \qquad F = \lambda\, d\xi^2.$$

Dans le cas contraire, il existe un type réduit

$$\text{(R)} \qquad F = \alpha(\lambda\, d\xi - \mu\, d\eta)(\Lambda\, d\xi - M\, d\eta),$$

où α et $\frac{\Lambda}{M}$ sont des fonctions des trois variables indépendantes ξ, η, $\frac{\lambda}{\mu}$.

Si la relation entre ξ, η, $\frac{\lambda}{\mu}$ et $\frac{\Lambda}{M}$ est algébrique et involutive par rapport à $\frac{\lambda}{\mu}$ et $\frac{\Lambda}{M}$, ces caractères se conserveront lorsqu'on passera du type réduit (R) à un autre type réduit (R').

Si la relation est une involution homographique entre λ et μ, la forme admettra le type canonique

$$A\, d\xi^2 + B\, d\eta^2.$$

Ces dernières formes, que l'on peut appeler *linéo-involutives*, trouvent en Géométrie des applications importantes.

N° 12; 23 mars.

Vicaire. — Sur un théorème de Lambert. (842-843).

Picard. — Sur les intégrales de différentielles totales (843-845).

Une intégrale de différentielle totale

$$\int (P\, dx + Q\, dy),$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles des variables x, y, z liées par une relation algébrique, sera dite de seconde espèce si elle satisfait aux conditions suivantes :

Soit $x = a$, $y = b$ un système quelconque de valeurs de x et y; on pose

$$x = a + t\lambda(t), \qquad y = b + t\mu(t),$$

$\lambda(t)$ et $\mu(t)$ désignant deux fonctions holomorphes quelconques de t dans le voisinage de $t = 0$, et l'on substitue ces valeurs dans l'intégrale; celle-ci devient une fonction de t qui, dans le voisinage de $t = 0$, devra avoir le caractère d'une fonction algébrique.

En un point analytique (x, y, z) une pareille intégrale n'a qu'une valeur, abstraction faite d'une somme de multiples de certaines périodes. Le nombre de ces périodes peut varier avec l'intégrale, mais il y a un nombre maximum de périodes possibles pour les intégrales de seconde espèce correspondant à une surface donnée. Ce nombre est le même pour deux surfaces qui se correspondent point par point.

L'auteur indique une application intéressante de ces généralités aux fonctions hyperabéliennes et hyperfuchsiennes.

Lipschitz. — Sur la somme des diviseurs d'un nombre. (845-847).

Soient

m un entier;

$k(m)$ la somme des diviseurs impairs augmentée de la moitié de la somme des diviseurs pairs;

$l(m)$ la somme de ses diviseurs impairs, prise négativement, ajoutée à la somme de ses diviseurs pairs.

Ces deux fonctions de m sont déterminées complètement par les relations récurrentes suivantes :

1° La somme

$$k(m) - 2k(m-1) + 2k(m-9) - \ldots$$

continuée tant que les arguments sont positifs, est égale à $(-1)^{m-1}m$ ou à 0, suivant que m est carré parfait ou non.

2° La somme

$$l(m) + l(m-1) + l(m-3) + l(m-6) + \ldots$$

continuée tant que les arguments sont positifs, est égale à $-m$ ou à 0, suivant que m est un nombre triangulaire ou non.

On a encore

$$k(1) + k(2) + \ldots + k(m) = \left[\frac{m}{1}\right] + \left[\frac{m}{2}\right] + 3\left[\frac{m}{3}\right] + 2\left[\frac{m}{4}\right] + 5\left[\frac{m}{5}\right] + \ldots,$$

$$l(1) + l(2) + \ldots + l(m) = -\left[\frac{m}{1}\right] + 2\left[\frac{m}{2}\right] - 3\left[\frac{m}{3}\right] + 4\left[\frac{m}{4}\right] - \ldots.$$

Kœnigs. — Sur la théorie des surfaces définies par une propriété des droites ou des sphères qui leur sont tangentes. (847-849).

Le moment de deux droites d'un complexe infiniment voisines (*moment élémentaire*) se représente par une forme quadratique F des différentielles de trois paramètres dont dépendent les droites du système.

Pour qu'un complexe soit *singulier*, c'est-à-dire pour que ses droites aient

une enveloppe, il faut et il suffit que le discriminant de F soit identiquement nul (Klein).

Le moment élémentaire du complexe singulier appartient à l'un ou à l'autre des deux types de formes suivantes :

1° Si l'enveloppe est une surface développable (cas général), le moment appartient au type des formes *linéo-involutives*.

2° Si l'enveloppe est une courbe ou une développable, l'un des facteurs dans lesquels le moment se décompose est intégrable.

Le moment élémentaire ne peut donc être rapporté qu'à l'un des deux types canoniques

$$A\,d\xi^2 + B\,d\eta^2, \quad (A\,d\xi + B\,d\eta)\,d\eta,$$

où le rapport $\frac{A}{B}$ est indépendant de ξ et η.

Sa réduction au premier type canonique correspond géométriquement à la détermination des lignes asymptotiques de la surface enveloppe. La réduction au second type donne la solution complète de ce problème, posé par MM. Cayley et Klein : sous quelles conditions un complexe est-il formé des sécantes d'une courbe? Il faut et il suffit que l'un des facteurs dans lesquels le moment est décomposable soit intégrable.

Les mêmes considérations s'étendent aux complexes singuliers de sphères, et plus généralement aux éléments dont la rencontre ou le contact s'exprime, pour deux positions infiniment voisines, par l'évanouissement d'une forme quadratique des différentielles de paramètres indépendants.

N° 13; 30 mars.

Gruey. — Sur les constantes du grand miroir du sextant. (898-901).

N° 14; 6 avril.

Boussinesq. — Sur la résistance qu'oppose un liquide indéfini en repos, sans pesanteur, au mouvement varié d'une sphère solide qu'il mouille sur toute sa surface, quand les vitesses sont bien continues et assez faibles pour que leurs carrés et produits soient négligeables. (935-937).

De l'intégration complète des équations du mouvement du fluide, l'auteur conclut pour la résistance cherchée l'expression

$$6\pi\varepsilon RV + \frac{m}{2}\frac{dV}{dt} + 6\sqrt{\pi\rho\varepsilon}\,R^2\int_\infty^t \frac{F''(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

où ε désigne le coefficient de frottement du liquide, ρ sa densité, m la masse du liquide déplacé, R le rayon de la sphère, V sa vitesse actuelle correspondant au temps t, $F(\tau)$ l'espace rectiligne parcouru par son centre au bout d'un

temps τ. En faisant $F'(t) = \cos kt$, on retrouve la formule particulière obtenue par Stokes dans son Mémoire sur le pendule.

Dans le cas de translations quelconques de la sphère, on superposera les trois solutions correspondant aux vitesses suivant les trois axes coordonnés.

Mannheim. — Sur la polhodie. (938-940).

L'auteur considère le déplacement d'un ellipsoïde quelconque et étudie géométriquement les courbes qui sont à cet ellipsoïde ce que la polhodie et l'herpolhoïde sont à l'ellipsoïde central.

Il se propose de montrer que l'herpolhodie relative à un ellipsoïde quelconque peut avoir des points d'inflexion, mais qu'il n'en est pas de même de l'herpolhodie de Poinsot (théorème de M. de Sparre).

La Communication actuelle ne porte que sur la polhodie, pour laquelle M. Mannheim apprend à construire le plan osculateur en un point.

N° 15; 13 avril.

Haton de la Goupillière. — Théorèmes relatifs à l'actinométrie des plaques mobiles. (953-958).

La plaque, soumise à l'action de la pesanteur ou de centres fixes, est assujettie à rester normale à une courbe quelconque décrite par son centre de gravité.

La quantité de lumière ou de chaleur reçue par la plaque est indépendante de la nature de cette courbe; elle ne dépend que des surfaces de niveau passant par les extrémités de l'arc parcouru.

Mannheim. — Sur l'herpolhodie. (963-966).

Démonstration du théorème annoncé par l'auteur dans sa précédente Communication.

Weyr (Ed.). — Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces. (966-969).

Soient M une matrice quelconque d'ordre n et μ_α une racine α^{uple} de M. L'une des puissances successives ρ de $M - \mu_\alpha$ est nécessairement de nullité α; les puissances successives sont de la même nullité.

La racine μ_α a pour *caractéristiques* les nombres $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho$ définis par cette condition que

$$\alpha_1, \quad \alpha_1 + \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\rho = \alpha$$

sont les degrés de nullité des matrices

$$M - \mu_\alpha, \quad (M - \mu_\alpha)^2, \quad \ldots, \quad (M - \mu_\alpha)^\rho.$$

Deux matrices d'ordre n seront dites de même espèce si elles ont les mêmes racines aux mêmes caractéristiques.

M. Weyr apprend à former une matrice M d'une espèce donnée. Toutes les autres N se déduisent de celle-là par la formule

$$N = Q^{-1}MQ,$$

Q étant une matrice quelconque de nullité zéro.

Gruey. — Sur les constantes du grand miroir du sextant. (969-972).

Radau. — Sur la loi des densités à l'intérieur de la Terre. (972-974).

Boussinesq. — Résistance qu'éprouve un cylindre circulaire indéfini, plongé dans un fluide, à se mouvoir pendulairement suivant une direction perpendiculaire à son axe. (974-977).

N° 16; 20 avril.

Halphen. — Sur le mouvement d'un corps grave de révolution suspendu par un point de son axe. (1065-1068).

Démonstration d'un théorème dont l'énoncé est contenu dans un Mémoire inachevé de Jacobi :

« La rotation d'un corps pesant de révolution autour d'un point de son axe peut être remplacée par le mouvement relatif de deux corps sur lesquels n'agit aucune force accélératrice. »

On est ramené à étudier les mouvements, convenablement choisis, de deux ellipsoïdes quelconques (E), (E_1). Ces deux mouvements E, E_1 dépendent ensemble de huit constantes, tandis que le mouvement M d'un corps pesant dépend seulement de cinq constantes. Il y a donc entre les éléments de E et de E_1 trois relations. On doit répondre, et c'est ce que fait M. Halphen, aux questions suivantes : 1° quelles sont ces trois relations? 2° étant donnés E, E_1, déterminer les constantes de M; 3° étant donné M, trouver E, E_1.

Poincaré. — Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. (1068-1070).

L'auteur considère des séries linéaires de figures d'équilibre, c'est-à-dire des séries telles qu'à chaque valeur de la vitesse constante de rotation corresponde une figure et une seule ou un nombre fini de figures, et que ces figures d'équilibre varient d'une façon continue avec la vitesse. Ainsi les ellipsoïdes de révolution forment une série linéaire, les ellipsoïdes de Jacobi en forment une autre. Il peut arriver qu'une même figure appartienne à deux séries linéaires : il y a un ellipsoïde de révolution qui est en même temps un ellipsoïde de Jacobi.

Existe-t-il des séries linéaires de figures d'équilibre parmi lesquelles il y en

ait une qui se réduise à un ellipsoïde? Soient ρ, $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ les trois demi-axes de l'ellipsoïde et R une fonction de Lamé quelconque; on devra avoir

$$R^2 \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{R^2\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}} = (\rho^2 - c^2) \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{(\rho^2 - c^2)\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

L'auteur discute cette équation dans le cas des ellipsoïdes de révolution, et démontre ce résultat, annoncé par MM. Thomson et Tait : Les ellipsoïdes de révolution que l'on rencontre en partant de la sphère, et en allant jusqu'à celui qui est en même temps un ellipsoïde de Jacobi, sont tous stables; les autres sont séculairement instables.

Berthot. — Application de la formule empirique des forces mutuelles à la mécanique des solides et aux propriétés générales des corps. (1070-1073).

N° 17; 27 avril.

Bougaieff. — Sur une loi générale de la théorie de la partition des nombres. (1123-1125).

Soient $\varphi(u)$ une fonction arbitraire analytique ou numérique; $\psi(u)$ une fonction arbitraire analytique ou numérique croissante qui pour toutes les valeurs entières et positives de u prend aussi des valeurs entières et positives; n un nombre entier et positif; $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ les solutions positives de l'équation indéterminée

$$(1) \qquad \psi(x_1) + \psi(x_2) + \ldots + \psi(x_\mu) = n.$$

On a

$$(2) \qquad \mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=\rho} \left\{ [n - (\mu + 1)\psi(u)]\,\varphi(u) \sum_{n-\psi(u)} [\varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_\mu)] \right\} = 0,$$

le nombre ρ satisfaisant aux inégalités

$$\psi(\rho) \leqq n, \quad \psi(\rho + 1) > n.$$

Si l'on fait $\varphi(u) = 1$ et qu'on désigne par $N(n)$ le nombre des solutions de l'équation (1), la formule (2) devient

$$(3) \qquad \mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=\rho} [n - (\mu + 1)\psi(u)]\, N[n - \psi(u)] = 0.$$

Elle donne alors une loi numérique nouvelle chaque fois que l'on connaît la fonction $N(n)$.

De Saint-Germain. — Sur l'herpolhodie. (1126-1128).

Démonstration du théorème de M. de Sparre.

N° 18; 4 mai.

Bougaieff. — Application des lois générales de la théorie de la partition des nombres aux fonctions numériques. (1159-1162).

Les deux lois générales (2) et (3) que l'auteur a établies dans sa précédente Communication peuvent s'appliquer à toutes les fonctions $\psi(u)$ entières et positives qui satisfont à l'unique condition $\psi(\infty) = \infty$.

Par exemple, si l'on prend pour $\psi(u)$ la somme $s(u)$ des diviseurs de u, et que l'on désigne par $P(n)$ le nombre des solutions de l'équation

$$s(u) + s(v) = n,$$

la loi (3), pour $\mu = 2$, donne la formule

$$S[n - 3s(u)]\, P[n - s(u)] = 0.$$

La loi (2), appliquée à l'équation

$$E(\sqrt{x_1}) = n,$$

donne la loi particulière

$$S\left\{[n - 2E(\sqrt{u})]\,\varphi(u) \sum_{n-E(\sqrt{u})} \varphi(x_1)\right\} = 0,$$

qui, pour $\varphi(u) = 1$, prend la forme

$$\sum_{u=1}^{u=n^2-1} [n - 2E(\sqrt{u})][2n + 1 - 2E(\sqrt{u})] = 0.$$

Cette dernière formule permet de calculer immédiatement

$$\sum_{u=1}^{u=N} [E(\sqrt{u})]^4.$$

N° 19; 11 mai.

Callandreau. — Sur la théorie de la figure de la Terre. (1204-1206).

Une équation remarquable due à M. Radau conduit à un résultat très précis pour la valeur de l'aplatissement terrestre ε déduite des données de la préces-

sion et de la valeur de la quantité φ, rapport de la force centrifuge à la pesanteur le long de l'équateur.

Cette équation est la suivante :

$$1 + \alpha - 305,6\left(\varepsilon - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{5\varphi}{2\varepsilon} - 1} = 0,$$

où α désigne une quantité inférieure en valeur absolue à 0,0008, comme le montre M. Callandreau.

Dès lors toutes les lois proposées pour les densités à l'intérieur du globe conduisent à un aplatissement pour ainsi dire invariable et égal à $\frac{1}{298}$. Si l'aplatissement fourni par les observations est un peu différent de ce nombre, il devient impossible de représenter les densités par une courbe continue.

Lecornu. — Distance d'un point d'une courbe gauche à la sphère osculatrice au point infiniment voisin. (1207-1210).

L'expression de cette distance, que M. Lecornu obtient sous diverses formes, peut se conclure du théorème suivant :

« Si l'on appelle *écart* d'une courbe la distance d'un point à la tangente au point infiniment voisin, la puissance d'un point d'une courbe gauche par rapport à la sphère osculatrice au point infiniment voisin est égale au tiers du produit des écarts de la courbe donnée et de la courbe décrite par le centre de la sphère osculatrice. »

N° 20; 18 mai.

Callandreau. — Influence du roulis sur les observations faites à la mer avec le cercle à niveau de mercure de M. Renouf. (1284-1286).

L'étude de cette question conduit l'auteur à se poser le problème suivant :

« Un tube annulaire de dimensions très petites, à moitié rempli de mercure, se trouve dans un plan vertical, et il est soumis à un mouvement oscillatoire de faible amplitude autour d'un axe perpendiculaire à son plan. Étudier les petites oscillations du liquide dans le tube. »

Ce problème dépend de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(n^2 - 2\beta \sin\frac{\pi t}{T}\right)\theta = 2f\cos\frac{\pi t}{T} + 2h\sin\frac{\pi t}{T},$$

où les variables sont le temps t et l'angle θ que fait avec la verticale le rayon allant au milieu de la colonne liquide. M. Callandreau intègre cette équation par la méthode de M. Poincaré.

L'intégrale se simplifie et se réduit à la forme

$$\theta = A_1 \sin\frac{\pi t}{T} - A_2 \cos\frac{\pi t}{T},$$

si l'on néglige les oscillations à longue période produites par le mouvement d'entraînement, en ne tenant compte que des oscillations dues à la pesanteur.

N° 21; 25 mai.

Goursat. — Sur les intégrales des équations linéaires. (1329-1332).

On peut obtenir sans aucun calcul une infinité d'équations hypergéométriques d'ordre supérieur admettant un groupe donné de substitutions, pourvu que ce groupe renferme une substitution de la forme canonique

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n;\ \omega x_1, \omega x_2, \ldots, \omega x_{n-1}, \omega' x_n),$$

ω' différant de ω.

Pour fixer les idées, M. Goursat envisage l'équation du troisième ordre

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & x^2(x-1)y''' + [(3+a_1+a_2+a_3)x - (1+b_1+b_2)]xy'' \\ & \quad + [(1+a_1+a_2+a_3+a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)x - b_1b_2]y' + a_1a_2a_3y = 0. \end{aligned}\right.$$

Soit G un groupe fini contenu dans le groupe linéaire à trois variables. Supposons que ce groupe renferme une substitution S qui, ramenée à sa forme canonique, soit

$$(x, y, z;\ \omega x, \omega y, \omega' z) \qquad (\omega' \gtrless \omega).$$

Soit T une autre substitution du groupe G qui, ramenée à sa forme canonique, soit

$$(X, Y, Z;\ AX, BY, CZ),$$

A, B, C étant trois nombres différents. Soit

$$(X, Y. Z;\ \alpha X, \beta Y, \gamma Z)$$

la substitution $\frac{1}{\omega}S \cdot \frac{1}{A}T$ réduite à sa forme canonique, les six quantités $1, \alpha, \beta, \gamma, \frac{B}{A}, \frac{C}{A}$ étant supposées toutes différentes.

Cela posé, si dans l'équation (1) on prend

$$1 - b_1 = \frac{1}{2i\pi}\log\left(\frac{B}{A}\right), \qquad 1 - b_2 = \frac{1}{2i\pi}\log\left(\frac{C}{A}\right),$$

$$a_1 = -\frac{1}{2i\pi}\log\alpha, \qquad a_2 = -\frac{1}{2i\pi}\log\beta, \qquad a_3 = -\frac{1}{2i\pi}\log\gamma,$$

le groupe de l'équation (1) coïncidera avec le groupe dérivé des deux substitutions $\frac{1}{\omega}S$, $\frac{1}{A}T$, et par suite l'intégrale générale sera une fonction algébrique de la variable.

Comme exemples, M. Goursat cite le groupe fini dérivé des deux substitutions qui reproduisent la forme $x^m - y^m + z^m$ et le groupe fini d'ordre 168, découvert par M. Klein, dont les substitutions reproduisent la forme

$$x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1.$$

N° 23; 8 juin.

Halphen. — Sur la convergence d'une fraction continue algébrique. (1451-1454).

L'auteur donne un exemple d'une fraction continue qui converge alors que la série correspondante ne converge pas, et qui diverge pour des valeurs de la variable qui font converger la série. Cet exemple lui est fourni par le développement de la racine carrée d'un polynôme X du troisième degré, à coefficients et à racines réels,

$$X = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3,$$

sous l'une des deux formes

$$(1) \qquad \sqrt{X} = a_1 + b_1 x + \cfrac{x^2}{a_2 + b_2 x + \cfrac{x^2}{a_3 + b_3 x + \ldots}},$$

$$(2) \qquad \sqrt{X} = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + \cfrac{x^3}{\alpha_2 + \beta_2 x + \cfrac{x^3}{\alpha_3 + \beta_3 x + \ldots}}.$$

La variable x étant supposée imaginaire, les fractions convergent dans tout le plan, sauf sur les deux coupures rectilignes qui rendent $\sqrt{X}$ uniforme, tandis que la série correspondante ne converge pas dans les mêmes conditions.

L'inverse a lieu dans des cas particuliers (en nombre infini d'ailleurs), dont le plus simple correspond à la relation

$$32 q_0^2 q_3 (4 q_0 q_1 q_2 - q_1^3 - 8 q_0^2 q_3) = (4 q_2 q_0 - q_1^2)^3.$$

Pour la valeur

$$x = \frac{q_1^2 - 4 q_0 q_2}{q_0 q_3},$$

située dans la région où $\sqrt{X}$ est développable suivant les puissances croissantes de x, les réduites de rang $5n+1$ de la fraction (1) et celles de rang $5n+3$ de la fraction (2) sont rigoureusement égales à $\sqrt{X}$; mais les réduites de rang $5n+4$ de la fraction (1) et celles de rang $5n+1$ de la fraction (2) sont égales à $-\sqrt{X}$. Les deux fractions continues sont ici divergentes, alors que la série correspondante converge.

N° 26; 29 juin.

Darboux. — Sur la théorie de Poinsot et sur deux mouvements correspondant à la même polhodie. (1555-1561).

A tout mouvement de Poinsot en correspondent une infinité d'autres pour lesquels les rotations p', q', r' sont à chaque instant égales aux rotations p, q, r multipliées par des nombres constants. En particulier, d'un premier mouvement on peut en déduire un autre dans lequel la rotation est à chaque

instant égale et contraire à celle du premier. M. Darboux étudie la relation entre ces deux mouvements et donne, avec leurs conséquences, les formules qui expriment cette relation.

La considération simultanée des deux mouvements fournit les résultats suivants. Aux deux mouvements répond la même polhodie (P). Dans le premier, le cône (C) ayant pour base (P) roulera sur un cône fixe (A) ayant pour base une herpolhodie (H); dans le second mouvement, le même cône roule avec une vitesse égale, mais en sens contraire, sur un autre cône fixe (B) ayant pour base une autre herpolhodie (H′), et la génératrice de contact du cône (C) avec les cônes fixes sera la même à chaque instant dans les deux mouvements. Le mouvement de (B) par rapport à (A) s'obtiendra en faisant rouler directement le cône ayant pour base (H′) sur le cône ayant pour base (H).

L'auteur termine en prouvant que l'intersection de deux surfaces du second degré qui ont les mêmes axes principaux peut être considérée, en général et de deux manières différentes, comme une polhodie.

Franke. — Sur la courbure de l'herpolhodie. (1573-1576).

L'auteur trouve, pour le rayon de courbure de l'herpolhodie, l'expression

$$R = \frac{1}{ABCG}\sqrt{\frac{\delta_{22}}{H}}\,\frac{(\Delta_{22}^2 + \alpha^2\beta^2\gamma^2 G^2 p^2 q^2 r^2)^{\frac{3}{2}}}{\Delta_{22}\Delta_{44} + 2(h\Delta_{22} + \alpha^2\beta^2\gamma^2 H\delta_{22})p^2q^2r^2},$$

où A, B, C sont les moments d'inertie principaux; p, q, r les composantes correspondantes de la rotation; α, β, γ les différences $B - C$, $C - A$, $A - B$; G, H les constantes d'intégration fournies par les relations

$$G^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2,$$
$$H = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

et où δ_{22}, Δ_{22}, Δ_{44} ont les valeurs suivantes :

$$\delta_{22} = G^2(p^2 + q^2 + r^2) - H^2,$$
$$\Delta_{22} = \alpha^2 BCq^2r^2 + \beta^2 Ar^2p^2 + \gamma^2 ABp^2q^2,$$
$$\Delta_{44} = \alpha^4(B + C - A)q^4r^4 + \beta^4(C + A - B)r^4p^4 + \gamma^4(A + B - C)p^4q^4.$$

Dans le cas d'un ellipsoïde d'inertie, les quantités $B + C - A$, $C + A - B$, $A + B - C$ étant positives, le rayon de courbure ne peut devenir infini (théorème de M. de Sparre). Il n'en est pas de même dans le cas d'un ellipsoïde arbitraire; alors la trace du pôle instantané sur le plan fixe peut avoir des points d'inflexion.

Indoyer. — Sur la réduction du problème des brachistochrones aux équations canoniques. (1577-1578).

Cette réduction peut se faire de deux façons, en ramenant le problème à la recherche soit de la courbe d'équilibre d'un fil flexible et inextensible, soit de la trajectoire d'un point matériel.

JORNAL DE SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS, publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira, professor na Escola Polytechnica do Porto, antigo professor na Universidade de Coimbra, Socio da Academia real das Sciencias de Lisboa, etc. Vol. VI. Coimbra, imprensa da Universidade, 1885 (1).

D'Ocagne (*M.*). — Sur une transformation polaire des courbes planes. (3-12).

Ce mode de transformation, proposé par Michel Chasles dans la Note XXI de son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géometrie,* a fait l'objet d'études intéressantes de MM. Roberts et Faure. Plusieurs géomètres, tels que MM. Cayley, Genocchi, Darboux se sont occupés de la transformée d'un cercle, c'est-à-dire de l'*ovale de Descartes unicursal* ou *limaçon de Pascal.* Par la méthode de M. d'Ocagne, on peut transformer une propriété quelconque de lignes droites et de cercles en une propriété de paraboles de même foyer et de *limaçons de Pascal* ayant pour foyer simple le foyer commun à toutes les paraboles.

João d'Almeida Lima. — Sur une courbe du troisième degré. (13-16).

Après avoir donné la définition géométrique de la courbe, M. d'Almeida Lima en donne l'équation, d'abord en coordonnées polaires, puis en coordonnées rectangulaires, et il arrive à l'équation du problème de la trisection

$$x^3 - \frac{3}{2} \cdot \frac{b}{\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}} x^2 + b^3 \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}} = 0.$$

Cesàro (*E.*). — Remarques arithmétiques. (17-23, 91-95).

Sous ce titre modeste, le jeune mathématicien italien expose le résultat de savantes et difficiles recherches sur la *série de Fibonacci,* sur une identité proposée par Eug. Catalan, sur la généralisation de la série de Lambert, sur la formule de Clausen. Dans le second article, pages 91-95, suite de ses *Remarques arithmétiques,* M. Ernest Cesàro traite particulièrement de quelques conséquences asymptotiques de la série de Lambert.

Ferreira dos Santos. — Sur le changement de la variable indépendante. (24-28).

Dans cette Note, l'auteur donne l'expression de la dérivée de l'ordre n de y

(1) *Bulletin*, IX$_2$, 166.

par rapport à x en fonction des dérivées de ces variables, par rapport à une nouvelle variable indépendante quelconque.

Gomes Teixeira. — Bibliographie. (29-32).

1° *Verger*, Introduction à l'Algèbre, Turin.

2° *D'Ocagne*, Coordonnées parallèles et axiales. Paris, Gauthier-Villars, 1885.

3° *E. Cesàro*, Intorno a taluna funzioni isobariche. Dérivées des fonctions de fonctions. Notes sur le calcul isobarique.

4° *J.-M. Rodrigues*, Développement de fonctions algébriques. (*Revista scientifica do Porto*, t. I, 1885.)

5° *Schiappa Monteiro*, Solution d'un problème de Géométrie élémentaire. (*Revista scientifica do Porto*, t. I, 1885.)

1° Le Livre de M. Verger, professeur à l'Institut technique de Rome, se recommande par une grande clarté d'exposition; il fait honneur à l'esprit méthodique de l'auteur et doit être grandement apprécié par les jeunes gens auxquels il est destiné.

2° L'important Mémoire de M. d'Ocagne sur les coordonnées parallèles et axiales, mentionné honorablement par Gomes Teixeira dans son Journal, a été également l'objet d'un compte rendu élogieux de M. Le Paige, de Liège, dans le *Bullettino* du Prince Boncompagni.

3° Le premier de ces articles a été publié dans le *Giornale di Matematiche de Battaglini*, en 1884, et les deux autres, en 1884 et 1885, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de MM. Gérono et Brisse.

4° Dans cet article, M. Rodrigues fait l'application de sa formule (publiée à la page 137 du IV° Volume du Journal de Gomes Teixeira) au développement des fonctions algébriques comprises dans la série ordonnée suivant les puissances décroissantes de la variable indépendante. Ensuite il applique les résultats auxquels il parvient à la détermination des asymptotes de divers ordres des courbes algébriques.

5° Le problème que résout M. Schiappa Monteiro est le suivant : Tracer par un point donné en un plan d'un cercle une transversale telle que les distances de ce point aux points d'intersection avec le cercle soient en un rapport donné.

Gomes Teixeira (F.). — Introduction à la théorie des fonctions. (33-80, 129-168).

Cette savante étude traite successivement : Des caractères des opérations de l'Arithmétique et de l'Algèbre; De la théorie analytique des imaginaires; De la théorie géométrique des imaginaires; Des opérations sur les imaginaires; Des séries; Des produits infinis; Des fractions continues. Elle est continuée pages 129-168 par trois nouveaux Chapitres sur les principes généraux : Sur les fonctions algébriques; Sur les fonctions exponentielles, logarithmiques et circulaires. Elle sera terminée dans le Volume VII du *Journal des Sciences mathématiques et astronomiques*.

On sait que Gomes Teixeira est l'auteur d'un Traité spécial intitulé : *Sur la théorie des imaginaires*, lequel fut publié d'abord dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, en 1883, puis dans le Journal *Mathesis* de

Gand, et traduit en italien par Gastaldi dans le tome V de la *Rivistà di Matematica*.

Hermite (*Ch.*). — Sur les polynômes de Legendre. (Extrait d'une Lettre adressée à F. Gomes Teixeira). (81-84).

Dans cette Lettre, l'éminent analyste démontre, au moyen du développement en série, point de départ de Legendre, ce qu'il appelle la belle proposition de M. Tchebichef, à savoir que le polynôme X_n de Legendre est le dénominateur de la réduite d'ordre n du développement en fraction continue de la quantité

$$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \cdots$$

Guimarães (*R.*). — Emploi de la cycloïde pour la résolution graphique de quelques problèmes de Géométrie. (85-90).

M. Rodolphe Guimarães se sert de la cycloïde pour résoudre six problèmes graphiques; la méthode qu'il emploie s'applique à un grand nombre d'autres questions qu'il se propose d'examiner ultérieurement.

Da Fonseca Barros (*H.*). — Note sur l'emploi du parallélépipède élémentaire. (96-98).

Cette Note a été écrite par M. Fonseca Barros, en réponse à un article de M. Greenhill publié dans l'*Encyclopédie britannique* sous le titre : *Hydromechanics*, article dans lequel le professeur anglais déclarait que la méthode généralement suivie pour déduire l'équation de continuité constitue « une violation des principes du Calcul différentiel ».

Gomes Teixeira. — Bibliographie. (99-102).

1° *David Besso :* Sur le produit de deux solutions de deux équations différentielles linéaires homogènes de second ordre; Rome, 1884. — Sur l'équation du cinquième degré; Rome, 1884. — Sur une classe d'équations trinômes. Rome, 1884.

2° *Paxton Young*, Solution of solvable irreductible quintic equations without the aid of a resolvent sextic (*American Journal of Mathematics*, vol. VII).

3° *A. d'Arzilla Fonseca*, Application des quaternions à la Mécanique. Coïmbre.

4° *Brito Limpo*, Sur les réfractions terrestres (*Revistà scientifica*, t. I).

5° *Aristide Marre*, Lettre à M. le président de l'Académie des Sciences de Lisbonne (*Jornal de Sciencias mathematicas, physicas e naturaes*, n° 38, 1884).

6° *J.-M. Rodrigues*, Théorie de la Balistique. Madrid, 1884.

7° *J.-A. Sarrasqueiro*, Traité de Géométrie élémentaire, 3e édition, Coïmbre, 1884; Traité élémentaire d'Arithmétique, 6e édition, Coïmbre, 1885.

8° *F.-M. Costa Lobo*, Résolution des équations indéterminées. Coïmbre, 1885.

9° *A. Schiappa Monteiro*, Sur un théorème relatif à la théorie des nombres (*Revistà scientifica*, t. I, 1885).

1° Ces Mémoires importants, où il est fait un heureux emploi des séries hypergéométriques, ont été publiés d'abord dans le *Recueil de l'Académie royale des Lincei*. On sait que M. David Besso, professeur de Mathématiques à l'Institut technique de Rome, vient de fonder pour la jeunesse studieuse de l'Italie un nouveau journal, le *Periodico di Matematica*, qui paraît tous les deux mois.

2° Ce Mémoire fait suite aux deux Notes précédemment publiées dans le tome V, p. 121 du *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas*. M. Paxton Young y expose les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations du cinquième degré dont il s'occupe puissent être résolues algébriquement, et donne alors les formules par le moyen desquelles on obtient les racines de ces équations.

3° Dans le Volume V du Journal du Dr Gomes Teixeira, il a été donné connaissance d'un travail où M. Arzilla expose avec toute la rigueur et la clarté désirables l'importante théorie des quaternions. Le nouveau travail annoncé ici fait l'application à la Mécanique rationnelle des principes de cette théorie.

4° M. Brito Limpo s'occupe spécialement des coefficients de la réfraction terrestre; il montre que, au lieu de faire usage d'un coefficient moyen pour chaque pays, il serait préférable d'employer divers coefficients moyens correspondant aux différentes altitudes, et il indique les méthodes pratiques à suivre pour obtenir ces coefficients.

5° Dans cette Lettre, M. Aristide Marre donne une brève Notice de la vie et des travaux de René-François *de Sluse*, chanoine de Liège, mathématicien, physicien, astronome, orientaliste, historien, dont les grands dictionnaires de bibliographie universelle ne mentionnent pas même le nom. Il annonce à l'Académie la prochaine publication de la Correspondance inédite de Sluse avec Huygens, Pascal, Oldenburg, Wallis, etc., par M. Le Paige, de Liège, et se félicite d'avoir pu enrichir cette précieuse correspondance de dix-neuf Lettres de Sluse à Pascal, dont dix-sept complètement inédites, qu'il a eu la bonne chance de découvrir à la Bibliothèque nationale de Paris.

6° Ce travail de M. J.-M. Rodrigues est écrit en langue espagnole; il contient les points les plus importants du beau Mémoire *Sur la théorie de la Balistique*, qu'il a présenté à l'Académie des Sciences de Lisbonne, et dont il a été rendu compte par M. Gomes Teixeira dans le tome V de son *Journal des Sciences mathématiques et astronomiques*.

7° On peut voir au tome V du *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas* ce qui a été dit des éditions antérieures de ces deux excellents Traités élémentaires d'Arithmétique et de Géométrie.

8° M. Costa Lobo passe en revue les travaux d'Euler, Lagrange, Legendre, Gauss, Chasles, etc., sur les équations indéterminées; il expose les principes de la théorie des congruences et développe l'application de la méthode téléologique de Wronski à la résolution des congruences et des équations indéterminées.

9° Dans cet article, M. Schiappa Monteiro présente deux solutions de la question proposée à la page 173 du IIe Volume du *Journal des Sciences mathématiques et astronomiques* du Dr Gomes Teixeira.

Schiappa Monteiro (*A.*). — Recherches relatives au cercle va-

riable qui coupe deux cercles donnés sous des angles donnés. (103-124).

Ces recherches sur les coniques sont une suite de celles déjà publiées par le savant professeur de l'École Polytechnique de Lisbonne, dans le journal de son confrère de Porto; elles seront terminées prochainement.

D'Ocagne (*M.*). — Étude de géométrie segmentaire. (125-128).

Dans cet article, M. d'Ocagne revient sur certaines propriétés de Géométrie segmentaire déjà remarquées par lui dans une Note publiée dans le *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales,* t. IV, p. 536, 1880; de la première de ces propriétés, mieux précisée, il tire de curieuses conséquences.

Martins da Silva (*J.-A.*). — Sur trois relations différentielles données par M. Lipschitz dans la théorie des fonctions elliptiques. (169-176).

Ces trois relations intéressantes pour la théorie des fonctions elliptiques se trouvent indiquées dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de l'Institut de France,* cahier du 25 décembre 1833, p. 1411. M. Ch. Hermite a fait voir que ces équations remarquables résultent d'une formule fondamentale donnée par Jacobi, et M. Martins da Silva montre, dans sa Note, comment une relation différentielle très simple conduit rapidement aux formules de M. Lipschitz.

Woodhouse (*L.*). — Principe fondamental de la théorie des équations algébriques. Fragments de quelques leçons. (177-182).

M. Luiz-Ignacio Woodhouse est professeur à l'École Polytechnique de Porto, depuis 1884; titulaire de la 2e chaire, il enseigne le Calcul différentiel et intégral et la seconde Partie de la Géométrie descriptive. Né à Porto le 31 juillet 1858, il est l'un des plus jeunes professeurs de l'Académie Polytechnique de cette ville.

Le Pont (*M.-P.*). — Démonstration nouvelle des théorèmes de Pascal et de Brianchon. (183-187). — Note de Géométrie. (188-190).

M. Le Pont généralisant les identités caractéristiques données par M. Paul Serret arrive à ces deux théorèmes :

« 1° Les centres de six couples de droites conjuguées à une même conique sont les sommets d'un hexagone de Pascal.

» 2° Les axes de six couples de points conjugués à une même conique sont les côtés d'un hexagone de Brianchon. L'auteur de ces deux Notes annonce qu'il aura encore l'occasion de revenir prochainement sur les transformations des identités caractéristiques de M. Paul Serret. »

José Manuel Rodrigues. — Sur une équation périodique. (191-193).

L'équation présentée dans cette Note appartient à cette classe d'équations dont les racines sont des fonctions périodiques.

Gomes Teixeira (*F.*). — Notice nécrologique sur *J.-A. Martins da Silva*. (194-196).

M. Martins da Silva, officier d'artillerie, né le 22 août 1858, est mort le 12 novembre 1885, à l'âge de 27 ans. Passionné pour l'Analyse mathématique, il s'appliqua particulièrement à l'étude des fonctions elliptiques et abéliennes, et composa une dizaine de Mémoires mathématiques qui lui avaient déjà assigné une place distinguée parmi les jeunes mathématiciens de ce temps, lorsque la mort est venue l'enlever prématurément à la Science et à son pays. Dans une Lettre du 21 avril 1885 (probablement l'une des dernières qu'il écrivit), il annonçait à Gomes Teixeira qu'il terminait un nouveau travail sur la théorie des fonctions elliptiques où il employait la méthode de la décomposition en fractions simples de M. Hermite. Il se réjouissait à la pensée que son Mémoire avait été approuvé par notre éminent géomètre, et qu'il trouverait place dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* de M. Darboux. Lui aussi a pu dire : *Gustans gustavi... paululum mellis et ecce ego morior!*

Gomes Teixeira (*F.*). — Bibliographie. (197-199).

1° *P. Arnaut de Menezes,* Charges additionnelles sur les ponts métalliques pour chaussées. (*Revue des travaux publics*, t. XVI.)

2° *R.-B. Martins Pereira,* La rotation et le mouvement curviligne. Lisbonne, 1885.

3° *G. Loria,* Recherches relatives à la Géométrie de la sphère (*Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Turin,* Vol. XXXVI). — Nouvelles études sur la Géométrie de la sphère (*Actes de l'Académie royale de Turin,* Vol. XX). — Note géométrique sur un tétraèdre (*Idem*, Vol. XIX).

4° *Dr. Bieler,* Du système $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}-1\right)=0$. Marburg, 1885.

5° *E. Cesàro,* Des déterminants en Arithmétique (*Journal de Mathématiques de Battaglini*, t. XXIII). — De quelques déterminants arithmétiques (*Comptes rendus de l'Académie royale des Lincei*, 1885). — Les logarithmes des fonctions arithmétiques (*Journal de Mathématiques de Battaglini*, t. XXXIII). — Sur l'inversion des identités arithmétiques (*Idem*).

6° *H. Le Pont,* Notes de Géométrie (*Journal de mathématiques spéciales*, 1883). — Théorèmes sur quelques courbes et surfaces remarquables. Cherbourg.

7° *M. d'Ocagne,* Sur les raccordements paraboliques (*Mathesis*, t. V). — Sur les isomériques d'une droite par rapport à certains systèmes de courbes planes (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. IX).

8° *P. Mansion*, Note sur la méthode des moindres carrés (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1885). — Théorie de l'élimination entre deux équations algébriques. Paris, 1884.

ARISTIDE MARRE.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI. In-4°, 4e Série (1).

Rendiconti, t. I; 1884-1885 (suite).

Battaglini (*G.*). — Sur une application de la théorie des formes binaires quadratiques à l'intégration de l'équation différentielle elliptique (653-657).

Battaglini (*G.*). — Sur les formes binaires bilinéaires. (691-699).

L'auteur commence par des considérations sur la correspondance projective que l'on établit entre les éléments d'une forme de première espèce en égalant à zéro une forme binaire bilinéaire, puis en supposant les coordonnées v_1, v_2, v_3 d'un élément d'une forme de deuxième espèce proportionnelles à trois formes binaires bilinéaires

$$\begin{aligned} vv_1 &= (a'u')(a''u'') = a_{11}u'_1u''_1 + a_{12}u'_1u''_2 + a_{21}u'_2u''_1 + a_{22}u''_1u''_2, \\ vv_2 &= (b'u')(b''u''), \\ vv_3 &= (c'u')(c''u''), \end{aligned}$$

il établit une correspondance entre les points d'un plan et les couples de points d'une droite.

La différence entre cette correspondance et l'*Ueberträgungsprincip* de Hesse (*Journal de Crelle*) consiste principalement en ce que, dans ce dernier, aux points situés sur une droite correspondent les couples d'une involution, tandis que dans la correspondance de M. Battaglini, au lieu d'une involution, on a en général une projectivité non involutive. En effet, à la droite

$$V_1v_1 + V_2v_2 + V_3v_3 = 0$$

correspond la projectivité

$$\sigma(v) = V_1(a'u')(a''u'') + V_2(b'u')(b''u'') + V_3(c'u')(c''u'') = 0.$$

On verrait aisément qu'aux ∞^3 droites du plan correspondent les ∞^3 projectivités

$$(X'u')(X''u'') = 0,$$

satisfaisant à la condition

$$\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{21} & X_{22} \\ a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{21} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

(1) Voir *Bulletin*, IX, p. 30.

Si la projectivité $\sigma(\varphi) = 0$ est une involution, la droite correspondante passe par un point fixe. Si elle est singulière [c'est-à-dire si $\sigma(\varphi)$ se décompose en deux facteurs linéaires], si ses éléments unis coïncident ou si elle est périodique de l'ordre n, la droite correspondante touche respectivement une de trois certaines coniques Σ, Θ, Θ_n. L'auteur donne les équations de ces coniques et quelques propriétés importantes des coniques Θ et Σ.

Par analogie, en supposant les coordonnées d'un point de l'espace proportionnelles à quatre formes bilinéaires, on a une correspondance entre les points d'une quadrique Ω et les couples de points d'une droite. A une conique située sur Ω correspond une projectivité sur la droite, et, si la projectivité est une involution, le plan de la conique passe par un point fixe. Si la projectivité est singulière, ou si ses éléments unis coïncident, ou si elle est périodique de l'ordre n, le plan de la conique est tangent respectivement à l'une des trois quadriques Σ, Θ, Θ_n, dont l'auteur donne les équations et quelques propriétés.

Cesàro (*E.*). — Sur certains déterminants arithmétiques. (709-711).

Cesàro (*E.*). — Nouvelle étude de déterminants arithmétiques. (711-715).

L'auteur étudie le déterminant

$$\Delta_n = \Sigma \pm F(u_1, u_1)\, F(u_2, u_2) \ldots F(u_n, u_n).$$

$F(u_i, u_k)$ étant une fonction quelconque du plus grand diviseur commun de u_i, u_k, et

$$u_1 < u_2 < u_3 < \ldots < u_n$$

étant une suite de nombres entiers tels que tous les diviseurs de chacun d'eux appartiennent à la suite.

La fonction $F(x)$ est toujours égale à la somme des valeurs que prend une certaine autre fonction pour tous les diviseurs de x. Si $f(x)$ est cette autre fonction, la valeur de Δ_n est la suivante :

$$\Delta_n = f(u_1)\, f(u_2) \ldots f(u_n).$$

L'auteur en déduit aussi quelques relations remarquables. Par exemple, prenons deux autres fonctions G, H, et soient g, h les fonctions qui en dépendent comme f dépend de F. Les $2n$ quantités x, y, définies par les systèmes

$$\sum_{r=1}^{r=n} x_r F(u_r, u_s) = G(u_s),$$

$$\sum_{r=1}^{r=n} y_r F(u_r, u_s) = H(u_s),$$

satisfont à la relation

$$\sum_{r=1}^{r=n} x_r H(u_r) = \sum_{r=1}^{r=n} y_r G(u_r).$$

Dans la seconde Note l'auteur donne une généralisation du théorème de *Mansion* et *Smith*.

De Paolis (*R.*). — Quelques transformations involutives particulières de l'espace. (Note I, 735-742; Note II, 754-758).

Les involutions de l'espace considérées par l'auteur sont celles où les droites qui renferment un couple de points correspondants en renferment un nombre infini. Ces droites, au lieu de constituer un complexe comme dans le cas général, constituent un système Σ doublement infini. Ces involutions se distinguent en trois classes :

I. Les rayons de Σ sont tous ceux d'une gerbe.

II. Les rayons de Σ sont toutes les cordes d'une cubique.

III. Les rayons de Σ sont tous ceux qui s'appuient sur une droite et sur une courbe de l'ordre μ rencontrant la droite en $\mu - 1$ points.

Chacune de ces classes se divise en espèces. L'auteur fait connaître toutes ces espèces et donne la construction et les propriétés principales de chacune d'elles.

Jung (*G.*). — Sur les surfaces engendrées par deux systèmes crémoniens réciproques du degré m. (Note I, 762-767; Note II, 773-774; Note III, 810-812).

On appelle *Systèmes crémoniens réciproques* deux systèmes de deuxième espèce, tels que le réciproque (par dualité) de l'un d'eux soit lié à l'autre par une transformation crémonienne.

Deux de tels systèmes engendrent une surface (monoïde) de l'ordre $m+1$ avec un point m^{uple} si les deux systèmes sont deux gerbes, et une surface de la classe $m+1$ avec un plan tangent m^{upl} s'ils sont deux systèmes plans.

Pour chaque valeur de m, on a autant d'espèces de monoïdes qu'il y a de solutions des équations crémoniennes.

Dans la Note II l'auteur étudie le cas des systèmes superposés et leurs éléments unis.

Dans la Note III il fait voir qu'il y aurait de l'intérêt à considérer trois ou plusieurs systèmes crémoniens à la fois, à établir, par exemple, une relation unidéterminative entre les éléments d'une congruence crémonienne et ceux d'une forme fondamentale de deuxième espèce.

Brioschi (*F.*). — Les équations modulaires dans la transformation du troisième ordre des fonctions hyperelliptiques à deux variables. (769-771).

Tonelli (*A.*). — Le théorème de Cauchy pour les fonctions à plusieurs valeurs. (785-790).

L'auteur établit pour les fonctions polydromes une formule qui tient la place de celle donnée par Cauchy pour les fonctions monodromes. Soit w une fonction des points d'une surface T de Riemann, avec un nombre quelconque

de feuillets, C une portion quelconque de cette surface, dont c soit le contour. Considérons la fonction

$$\varphi(z) = \frac{w(z)}{z - z'},$$

elle sera infinie aux points de rencontre de T avec la perpendiculaire en z'. Indiquons par $a_{l_1}, a_{l_2}, \ldots, a_{l_m}$ ceux de ces points qui se trouvent en C, et par $w_{l_1}, w_{l_2}, \ldots, w_{l_m}$ les valeurs correspondantes de w; ces points sont de diramation et des ordres $\mu_{l_1} - 1, \mu_{l_2} - 1, \ldots, \mu_{l_m} - 1$ respectivement. Alors on a

$$(1) \qquad \mu_{l_1} w_{l_1} + \mu_{l_2} w_{l_2} + \ldots + \mu_{l_m} w_{l_m} = \frac{1}{2\pi} \int_c \frac{w}{z - z'} dz,$$

où $\mu_{l_i} = 1$ lorsque a_{l_i} n'est pas un point de diramation. Si

$$\mu_{l_1} + \mu_{l_2} + \ldots + \mu_{l_m} = n,$$

on peut écrire la formule (1) de la manière suivante

$$(1') \qquad w_1 + w_2 + \ldots + w_n = \frac{1}{2\pi} \int_c \frac{w}{z - z'} dz,$$

où quelques-unes des w_i peuvent être égales (lorsqu'elles correspondent à des points de diramation).

Par cette formule (1), (1') et par l'analogue

$$(2) \qquad \mu_{l_1} w_{l_1}^k + \mu_{l_2} w_{l_2}^k + \ldots + \mu_{l_m} w_{l_m}^k = \frac{1}{2\pi} \int_c \frac{w^k}{z - z'} dz,$$

$$(2') \qquad w_1^k + w_2^k + \ldots + w_n^k = \frac{1}{2\pi} \int_c \frac{w^k}{z - z'} dz,$$

établie en considérant la fonction w^k, l'auteur montre que l'étude d'une fonction polydrome se réduit à la résolution d'une équation algébrique, dont les coefficients sont en général des fonctions transcendantes de la variable complexe. Par ces mêmes formules il démontre un théorème analogue à celui qui a lieu pour les fonctions monodromes, c'est-à-dire qu'une fonction des points d'une surface de Riemann ne peut être toujours finie et continue, à moins qu'elle ne soit constante.

Tacchini (*P.*). — Sur les observations solaires faites à l'Observatoire royal du Collège Romain dans le deuxième et le troisième trimestre de 1885. (806-808).

Tacchini (*P.*). — Les étoiles filantes du 27 novembre 1885. (808-809).

Tacchini (*P.*). — Observations de la comète découverte à Paris le 1er décembre 1885, faites par MM. le professeur Millosevich et le Dr Cerulli. (809-810).

Millosevich (*E.*). — Sur le nombre des oppositions observées des petites planètes entre Mars et Jupiter. Note II (812-813).

Garibaldi (*P.-M.*). — Le nombre mensuel des groupes de taches solaires comparé aux variations mensuelles de l'aiguille de déclinaison diurne. (813-817). S. R.

MEMORIE DELL' ACCADEMIA DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA. In-4°, 3e série (1). t. X; 1879 (1).

Ruffini (*F.-P.*). — Sur l'équilibre des polygones de forme variable. (3-22).

Conditions d'équilibre pour un polygone fermé dont les côtés sont rigides, attachés entre eux par des charnières polies et soumis chacun à une force appliquée à un de ses points. Lorsque les forces ne produisent que des pressions ou poussées qui se transmettent d'un côté à l'autre, on peut supposer que les côtés soient simplement appuyés l'un sur l'autre à leurs extrémités sans que pour cela l'équilibre soit troublé. Si les forces sont appliquées aux sommets et ne produisent que des tensions, on aura encore l'équilibre en supposant que les côtés soient flexibles et inextensibles. L'auteur examine en particulier le cas d'un polygone à côtés rigides et mobiles, au milieu des côtés duquel on applique des forces normales et proportionnelles aux côtés mêmes. Si les forces sont toutes appliquées aux sommets $A_1, A_2, \ldots, A_m$, on a le théorème suivant :

« La somme des moments relatifs à un sommet A_{s-1} de toutes les forces appliquées aux sommets $A_s, A_{s+1}, \ldots, A_{m-1}$ a un rapport constant à l'aire du triangle $A_1 A_{m-1} A_m$, »

qui donne comme cas particulier un théorème sur les polygones réguliers, dont l'auteur donne aussi une démonstration géométrique.

Saporetti (*A.*). — Recherche des phases principales de l'éclipse solaire annulaire du 19 juillet 1879 partiellement visible à Bologne. (23-50).

Beltrami (*E.*). — Recherches de Géométrie analytique. (233-312).

Ce long et beau travail est très connu de tous les mathématiciens.

Riccardi (*P.*). — Notices sur l'histoire de la Géodésie en Italie

(1) Voir *Bulletin*, IX, p. 172.

dès les premières époques jusque après la moitié du XIXe siècle. Introduction et première Partie. (431-528).

Cette première Partie arrive jusqu'au commencement du XVIIe siècle.

Razzaboni (*A.*). — Quelques propriétés des surfaces à lignes de courbure planes. (529-536).

L'auteur établit deux relations entre les rayons de courbure principaux r_1, r_2 d'une surface et les rayons de courbure géodésique ρ_u, ρ_v des lignes de courbure, et il en déduit quelques conséquences importantes. Voici les deux relations

$$\frac{d\log\rho_u}{dv} = -\frac{1}{r_1 - r_2}\frac{dr_2}{du} - \frac{d}{dv}\left[\log\left(\frac{d\log r_1}{du}\right)\right],$$

$$\frac{d\log\rho_v}{du} = -\frac{1}{r_1 - r_2}\frac{dr_2}{du} - \frac{d}{du}\left[\log\left(\frac{d\log r_2}{dv}\right)\right],$$

qui, en introduisant les rayons ρ'_u, ρ'_v de courbure géodésique des lignes u, v de la sphère, deviennent

$$\frac{d\log\rho_u}{dv} = \frac{d\log\rho'_u}{dv} + \frac{d\log r_1}{dv},$$

$$\frac{d\log\rho_v}{du} = \frac{d\log\rho'_v}{du} + \frac{d\log r_2}{du}$$

et, en intégrant,

$$\rho_u = \varphi(u)\, r_1 \rho'_u,$$

$$\rho_v = \psi(v)\, r_2 \rho'_v,$$

φ, ψ étant des fonctions arbitraires.

Razzaboni (*C.*). — Sur le mouvement des eaux dans les vases en communication par de longs tuyaux. (537-548).

Aschieri (*F.*). — Sur un complexe particulier de droites du second degré. (549-574).

Prenons le complexe linéaire Θ représenté par

$$p_{12} + p_{34} = 0$$

et la conique

$$x_3^2 + 2x_1x_2 = 0,$$

située dans le plan $x_4 = 0$ et qui détermine sur ce plan un système polaire Σ. Un plan quelconque ξ a un foyer X par rapport à Θ; l'intersection de ξ et de $x_4 = 0$ a un pôle X_1 en Σ. Or la droite XX_1 est ce que l'auteur appelle *axe* du plan ξ par rapport à Θ et à Σ, et ces axes forment un complexe Θ^2 dont il donne plusieurs générations géométriques et dont il démontre plusieurs propriétés.

4e série, t. I, 1880.

Fais (*A.*). — Sur les propriétés principales des trajectoires orthogonales des génératrices dans les surfaces réglées. (67-97).

Courbure et torsion géodésiques de ces trajectoires. Formules relatives à deux trajectoires et leurs applications au calcul de la courbure des surfaces gauches. Génératrices consécutives. Point central. Courbure et torsion géodésiques de la trajectoire orthogonale passant par un point central. Distribution du plan tangent et de la courbure de la surface sur une génératrice. Cas où une trajectoire orthogonale des génératrices est en même temps ligne géodésique. Application des résultats précédents à la surface des binormales d'une courbe gauche à torsion constante. Applications aux surfaces développables.

Aschieri (*F.*). — Sur les formes collinéaires et réciproques dans la Géométrie ordinaire. (145-150).

L'auteur démontre géométriquement les deux théorèmes suivants :

« On peut, d'un nombre infini de manières, par un nombre fini d'opérations projectives, passer de quatre points donnés sur un plan (sommets d'un quadrangle) à quatre autres; et semblablement pour les côtés d'un quadrilatère.

» On peut, d'un nombre infini de manières, par un nombre fini d'opérations projectives, passer de cinq points donnés (dont quatre quelconques soient les sommets d'un tétraèdre) à cinq autres. De même pour les plans. »

Gautero (*G.*). — Sur une classe de mécanismes à trois membres. (203-208).

Saporetti (*A.*). — Méthode théorico-pratique pour connaître les instants du lever et du coucher de la Lune. (235-274, 15 Pl.).

Masi (*F.*). — Sur les joints cinématiques dérivés du quadrilatère sphérique. (349-358, 2 Pl.).

Ruffini (*F.-P.*). — Sur quelques singularités dans les faisceaux et les réseaux de courbes planes algébriques. (367-415).

Boschi (*P.*). — Recherches sur une question de partition des nombres. (555-571).

En combien de manières peut on avoir un nombre entier p comme somme de s nombres entiers de la série $1, 2, \ldots, n$?

L'auteur traite la question en général, et puis en particulier les cas de $s = 2$, $s = 3, 4$. Pour $s = 2$ et $s = 3$ il établit aussi des formules qui donnent le nombre de groupes dont la somme est p d'un nombre donné. Pour le cas de $s = 3$

l'auteur cite un travail précédent de M. Piuma (*Journal* de M. Battaglini, 1879).

Beltrami (*E.*). — Sur la théorie de l'attraction des ellipsoïdes. (573-616).

La méthode de l'auteur se distingue des autres par l'emploi des coordonnées elliptiques.

I. Formules préliminaires. II. Fonction potentielle d'un ellipsoïde à couches homothétiques. III. Fonction potentielle d'une couche ellipsoïdale en équilibre. IV. Fonction potentielle d'une couche comprise entre deux ellipsoïdes homothétiques. V. Quelques autres distributions ellipsoïdales. VI. Distribution sur l'ellipse focale ayant la même fonction potentielle d'une distribution ellipsoïdale homothétique. VII. Fonction potentielle d'un anneau elliptique. VIII. Systèmes symétriques autour du petit axe. IX. Systèmes symétriques autour du grand axe.

Canevazzi (*S.*). — Sur quelques formules de la résistance des matériaux. (643-656, 1 Pl.).

Razzaboni (*C.*). — Sur le mouvement de l'eau en lits à fond horizontal. (677-687). S. R.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO. In-8° ([1]).

Tome XX; 1884-85.

Cavalli (*E.*). — Généralisation d'un théorème de Pappus et conséquences qui en descendent. (33-42).

Si l'on a des points matériels libres et indépendants ayant des vitesses initiales auxquelles correspondent des moments équipollents aux côtés d'un polygone fermé quelconque, et qu'on leur applique des forces qui, en chaque instant, ramenées à un même point, seraient en équilibre, le centre de gravité du système reste fixe.

Morera (*G.*). — Sur les équations générales pour l'équilibre des systèmes continus à trois dimensions. (43-53).

L'auteur donne l'interprétation mécanique des équations indéfinies de l'équilibre. Il établit ces équations en coordonnées curvilignes quelconques au moyen du principe des vitesses virtuelles.

([1]) Voir *Bulletin*, X, p. 76.

Dorna (*A.*). — Observations de l'éclipse totale de lune du 4-5 octobre 1884, faites à Turin dans le palais Madama, à l'Observatoire de l'Université. (69-79).

Dorna (*A.*). — Travaux de l'Observatoire astronomique de Turin. (80-85).

Genocchi (*A.*). — Deux lettres de C.-F. Gauss, publiées par le prince B. Boncompagni. (237-242).

Jadanza (*N.*). — Sur la mesure d'un arc de parallèle terrestre. (326-329).

Dorna (*A.*). — Travaux de l'Observatoire astronomique de Turin. (430-432).

Siacci (*F.*). — Les deux premiers Livres du *Tractatus sphæræ* de Barthelemy de Parme, astronome du XIIIe siècle, publiés suivant l'unique manuscrit du temps de la Bibliothèque Victor Emmanuel, par H. Narducci. (433-434).

Segre (*C.*). — Considérations sur la Géométrie des coniques d'un plan et sur sa représentation dans la Géométrie des complexes linéaires de droites. (487-504).

L'auteur s'occupe principalement des formes fondamentales dans l'espace S_5 qui a pour éléments les coniques d'un plan, du système cubique à quatre dimensions M_4^3 formé par les coniques qui se réduisent à un couple de points, et du système du quatrième ordre et à deux dimensions (surface F_2^4) formé par celles qui se réduisent à un point double. La géométrie projective du plan coïncide avec celle de l'espace S_5 lorsqu'on prend pour *groupe fondamental* celui des ∞^6 transformations projectives qui transforment F_4^2 en elle-même et correspondent ainsi aux ∞^6 homographies du plan. La Géométrie métrique du plan coïncide aussi avec la Géométrie projective de S^5 en fixant F_2^4 et un élément; on a la Géométrie euclidienne si cet élément appartient à M_4^3. L'auteur s'occupe aussi de la correspondance entre le plan de coniques et l'espace de complexes linéaires, mais il conclut qu'on ne doit pas attacher trop d'importance à cette représentation comme instrument de recherche, soit pour les coniques, soit pour les complexes linéaires.

Loria (*G.*). — Nouvelles études sur la Géométrie de la sphère. (505-526).

L'auteur obtient de nouveaux résultats et donne de nouvelles démonstrations en appliquant la même méthode qu'il a suivie dans un travail précédent [*Ri-*

cerche sulla Geometria della sfera (*Mémoires de l'Académie royale de Turin*, 2e série, Vol. XXXVI)]. — Coordonnées de la sphère orthogonale à quatre sphères données. Sphère orthogonale d'un complexe, et conditions pour qu'elle se réduise à un plan ou à un point. Sphères coupant diamétralement une sphère donnée. Sphères qui sont coupées diamétralement par une, deux, trois ou quatre sphères données. Angle de deux sphères, et sphères qui coupent à angle constant deux, trois ou quatre sphères données. Sphères qui coupent deux sphères données à angles égaux ou supplémentaires. Relations générales entre deux systèmes de n sphères, étant $n \geqq 5$. Cas de $n = 5$. Coordonnées de la sphère correspondant à une sphère donnée en une transformation par rayons vecteurs réciproques, et autres considérations sur ce même sujet.

Charrier (*A.*). — Sur la fréquence des vents inférieurs d'après les observations faites de 1866 jusqu'à 1884. (529-535).

Basso (*G.*). — Phénomènes de réflexion cristalline interprétés suivant la théorie électromagnétique de la lumière. (537-562).

Dorna (*A.*). — Travaux de l'observatoire astronomique de Turin. (635-636).

Guidi (*C.*). — Sur les ponts suspendus rigides. (706-723).

Jadanza (*N.*). — Sur la forme du triangle géodésique et sur l'exactitude d'un réseau trigonométrique. (765-783).

Brambilla (*A.*). — Les courbes asymptotiques d'une classe de surfaces algébriques. (784-790).

Les surfaces dont il s'agit ont la propriété que les coordonnées de leur point variable par rapport à un certain tétraèdre fondamental sont proportionnelles aux $n^{\text{ièmes}}$ puissances de quatre fonctions entières linéaires et homogènes de trois paramètres. Les courbes asymptotiques de ces surfaces sont, comme l'auteur le démontre, algébriques et rationnelles.

Naccari et *Battelli* (*A.*). — Aberration de sphéricité dans les télescopes de Grégori et Cassegrain. (862-868).

Cappa (*S.*) — Sur les forces intérieures qui se développent dans les liquides en mouvement. (896-916).

Jadanza (*N.*). — Sur les points cardinaux d'un système dioptrique centré et sur la lunette anallatique.

D'Ovidio (*E.*). — Relation sur un travail de M. le Dr C. Segre, intitulé : *Recherches sur les homographies et sur les corréla-*

tions en général, et particulièrement sur celles de l'espace ordinaire considérées dans la géométrie de la droite. (934-935).

Dorna (*A.*). — Travaux de l'observatoire astronomique de Turin. (979-981).

Cavalli (*E.*). — Les ovales de Descartes considérés au point de vue cinématique. (1143-1165).

L'auteur regarde ces courbes comme engendrées par un point mobile ayant une vitesse initiale et soumis à une accélération dirigée constamment à l'un des trois foyers.

S. R.

ATTI DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI; in-4°; 3e série (1).

Memorie, t. X, 1881.

De Paolis (*R.*). — Recherches sur les surfaces du troisième ordre. Ier Mémoire (123-150); IIe Mémoire (150-160).

Les six systèmes de coordonnées qui se présentent dans une certaine figure F de quinze plans, quinze points et vingt droites. La quadrique centrale et les quadriques diagonales de la figure F. Un système d'hexaèdres et d'hexagones déterminés par la figure F. Quelques autres propriétés de la figure F. Les six surfaces σ du troisième ordre, et les six Σ de la troisième classe, qui déterminent une même figure F. Les hessiennes des surfaces σ et Σ. Expression des produits symboliques par la forme canonique. Quelques contravariants et covariants des surfaces du troisième ordre. Un connexe linéaire Θ. Le tétraèdre covariant Ω comme tétraèdre fondamental. Le complexe tétraédral de σ_h et Σ_h.

Les invariants fondamentaux. Leur signification géométrique. Les six rapports anharmoniques d'une surface du troisième ordre, et les propriétés invariantives déduites de l'équation qui donne les sommets et les faces du tétraèdre Ω. Les formes invariantives d'une certaine forme binaire du cinquième ordre. Les diverses surfaces cubiques ayant des points d'*inflexion*.

Besso (*D.*). — Quelques propositions sur les équations linéaires. (252-258).

---

(1) Voir *Bulletin*, IX, 181.

L'intégration de l'équation linéaire de l'ordre n

$$\sum_{0}^{n} p_k y^{(k)} = 0$$

peut être ramenée à celle d'une équation linéaire de l'ordre $n - r$ par rapport à $y^{(r+1)}$ lorsque, les coefficients p_0 et $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_{r+1}$ étant quelconques, les autres r sont donnés par

$$\frac{p_k}{p_0} = \sum_{k}^{0} \frac{(-1)^{k-i}}{\Pi(k-i)} a_i x^{k-i}.$$

Les a sont des constantes et $a_0 = 1$. L'auteur traite aussi entre autres les propositions suivantes :

« Étant données deux équations différentielles linéaires homogènes, trouver les relations qui doivent être satisfaites afin que :

» *a*. Elles aient une même intégrale particulière;
» *b*. L'une d'entre elles soit satisfaite par r intégrales particulières de l'autre;
» *c*. Les quotients de m intégrales particulières de l'une pour m de l'autre soient égaux à des fonctions données;
» Trouver deux intégrales particulières ayant donné :
» *a*. Le quotient de ces intégrales;
» *b*. La somme de deux puissances de même exposant constant de ces intégrales.

« Le produit de m intégrales particulières d'une équation linéaire homogène de l'ordre n satisfait à une équation linéaire homogène de l'ordre

$$\frac{n(n+1)[1\ldots(n+m-1)]}{1.2\ldots m}. \text{ »}$$

Schiaparelli (*G.-V.*). — Observations astronomiques et physiques sur l'axe de rotation et sur la topographie de la planète Mars, faites à l'Observatoire royal de Brera à Milan avec l'équatorial de Merz. Mémoire II (observations de l'opposition 1879-1880). (6 pl. 281-387).

Tome XI; 1881.

Ne contient aucun Mémoire de Mathématiques ni d'Astronomie.

Tome XII; 1882.

Battaglini (*G.*). — Sur les formes quaternaires bilinéaires. (233-255).

L'auteur donne la représentation géométrique d'une forme quaternaire bilinéaire.

La relation

$$(\varphi\psi) = (Ax)(By) = 0,$$

où

$$(Ax) = A_1x_1 + \ldots + A_4x_4, \qquad (By) = B_1y_1 + \ldots + B_4y_4,$$

établit une correspondance corrélative entre les points de deux espaces de trois dimensions. A un point correspondent tous les points d'un plan, c'est-à-dire ce plan lui-même. Cette correspondance entraine celle qu'on appelle *conjointe* par laquelle à un plan correspondent tous les plans passant par un point. Il en résulte aussi une correspondance entre les rayons des deux espaces; à chaque droite de l'un correspond dans l'autre un complexe linéaire spécial, et par conséquent l'axe de ce complexe. Si l'on fait correspondre entre eux les éléments fondamentaux des deux espaces, la relation de correspondance prend la forme canonique

$$(\varphi\psi) = \Sigma A_iB_ix_iy_i = 0.$$

Après avoir examiné le cas où le déterminant $(A, B) = 0$ et celui où tous ses mineurs sont égaux à 0, l'auteur passe à la considération des espaces superposés, et des surfaces quadriques qui se présentent comme lieu des points situés sur leurs plans correspondants et comme enveloppe des plans passant par leurs points correspondants. Il y a alors dans la corrélation quatre couples involutifs qui sont les sommets et les faces d'un tétraèdre; en le prenant comme tétraèdre fondamental, la relation $(\varphi\psi) = 0$ devient

$$C_{12}x_1y_2 + C_{21}x_2y_1 + C_{34}x_3y_4 + C_{43}x_4y_3 = 0,$$

ayant posé

$$C_{ij} = A_iB_j.$$

Si $C_{12} = C_{21}$ et $C_{34} = C_{43}$, la corrélation est *involutive* ou *polaire*.

Si $C_{12} = -C_{21}$ et $C_{34} = -C_{43}$, elle est *coïncidente*.

En revenant au cas général, les rayons correspondants qui se rencontrent constituent un complexe du deuxième degré.

Si, en partant d'un élément quelconque, nous prenons successivement les éléments correspondants en passant toujours du premier au second espace, nous aurons des figures qui seront alternativement corrélatives et homographiques entre elles. Tous les points déduits d'un même élément par ce procédé sont sur une même surface du second ordre. Propriété analogue pour les plans. Les rayons que l'on déduit ainsi d'un rayon quelconque appartiennent à un complexe tétraédral. Enfin l'auteur traite le cas de la corrélation *périodique*.

Respighi (*L.*). — Expériences faites à l'Observatoire royal du Capitole pour la détermination de la valeur de la gravité. (346-369).

De Paolis (*R.*). — Sur l'expression d'une forme binaire de degré n par une somme de $n^{\text{i-mes}}$ puissances. (405-413).

Une forme binaire de degré n peut être exprimée de ∞^{n+1-2r} manières par la somme de $n+1-r$ $n^{\text{i-mes}}$ puissances ($2r \leq n+1$), en résolvant une équation de degré r.

Soit $f = \alpha_x^n$ une binaire de degré n. Si

$$f = \sum_{k=1}^{k=n+1-r} B_k (x_1 b_k + x_2)^n.$$

on a $n+1-r$ points

$$x_1 b_k + x_2 = 0.$$

On dit que ce groupe exprime la binaire f par une somme de $n+1-r$ $n^{\text{ièmes}}$ puissances.

Les groupes exprimant une binaire de degré n par une somme de $n^{\text{ièmes}}$ puissances forment une involution $(n-1)^{\text{uple}}$.

Étant donnée une forme binaire de degré n, tous ses groupes polaires de $n+1-r$ points $(2r < n+1)$ appartiennent à une involution $(r-1)^{\text{uple}}$, et seulement les groupes de l'involution associée $(n+1-2r)^{\text{uple}}$ expriment la binaire donnée par la somme de $n+1-r$ $n^{\text{ièmes}}$ puissances.

Suivent des considérations en partie nouvelles sur le *canonisant* d'une forme de degré impair, le *catalectiquant* d'une forme de degré pair, et sur le *plexus catalectiquant*.

La méthode suivie par M. de Paolis est entièrement nouvelle et extrêmement élégante; elle se base sur l'identité

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{f(\lambda_k)}{F'(\lambda_k)} = 0,$$

$f(\lambda)$ étant une fonction rationnelle entière de degré $\leqq n-2$, $F(\lambda)$ de degré n, et les λ_k étant les racines de l'équation $F(\lambda) = 0$.

Siacci (*F.*). — Théorème fondamental dans la théorie des équations canoniques du mouvement. (423-436).

Si n équations entre les variables

$$x_1 y_1, \quad x_2 y_2, \quad \ldots, \quad x_n y_n,$$

résolues par rapport à n de ces variables, satisfont à la relation

$$(1) \qquad \Sigma_r (dy_r\, \delta x_r - \delta y_r\, dx_r) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

ces équations pourront toujours se réduire à la forme

$$(2) \qquad y_r = \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_r} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_r},$$

$\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_k$ étant des fonctions des x, et les λ déterminées de manière que les (2) satisfassent aux équations

$$\psi_1 = 0, \qquad \psi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \psi_k = 0.$$

Par ce théorème l'équation des moments virtuels se transforme de la manière la plus générale en une autre ayant la même forme et à variables indépendantes. De cette équation l'auteur déduit les équations canoniques les plus

générales. Il établit aussi des formules desquelles il déduit la transformation la plus générale d'un système d'équations canoniques en un autre, les équations du mouvement troublé, et le théorème de la fonction caractéristique. Enfin il trouve les relations entre les divers systèmes de variables canoniques, et des théorèmes généraux dont un comprend comme cas particulier un théorème de Jacobi.

Capelli (*A.*). — Fondements d'une théorie générale des formes algébriques (529-598).

Théorie des opérations invariantives. Éléments linéaires et leur interprétation symbolique. Les opérations H et Ω. Fonctions que l'on peut déduire d'autres fonctions renfermant un nombre moindre de séries de variables. Développement d'une fonction à plusieurs séries de variables par les dérivées de fonctions à nombre moindre de variables. Définition des covariants d'un système de formes à plusieurs séries de variables, leurs propriétés fondamentales et équations différentielles. Forme symbolique des covariants d'un système de fonctions fondamentales à plusieurs séries de variables. Réduction des équations différentielles au nombre minimum. Indépendance des conditions linéaires données par chacune de ces équations.

La méthode de l'auteur se base sur les opérations Δ (avec un nombre quelconque de séries de variables) qu'il montre être les seules essentiellement nécessaires dans la théorie des formes, et dont il commence par établir rigoureusement la théorie. L'auteur appelle *opérations élémentaires* celles comme la suivante

$$\zeta_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \ldots + \zeta_{\sigma+1} \frac{\partial}{\partial z_{\sigma+1}}.$$

Il est évident qu'entre k séries de variables on a k^2 opérations élémentaires. Or on appelle opération Δ un polynôme (symbolique) rationnel et entier à coefficients constants formé avec les k^2 opérations élémentaires. Nous citerons le théorème suivant qui est fondamental dans la théorie des opérations Δ et par conséquent dans tout le travail.

Si Δ est une opération quelconque entre k séries de variables $x, y, z, \ldots$ et qu'on indique par $D_1, D_2, \ldots, D_{k^2}$ les k^2 opérations élémentaires, on peut toujours déterminer des constantes $\alpha_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k^2}}$ (combinaisons linéaires à coefficients entiers des constantes de Δ), telles que l'on ait identiquement

$$\Delta = \sum_{\mu_1, \mu_2, \ldots} \alpha_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k^2}} D_{k^2}^{\mu_{k^2}}, D_{k^2-1}^{\mu_{k^2-1}}, \ldots, D_2^{\mu_2}, D_1^{\mu_1},$$

où l'on ne doit donner aux exposants que les systèmes de valeurs pour lesquels la somme $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{k^2}$ est $\leq$ du degré maximum des termes en Δ.

Tome XIII; 1882.

Respighi (*L.*). — Observations du diamètre horizontal du Soleil.

faites à l'Observatoire royal du Capitole en 1880 et 1881. (51-80).

Cerruti (*V.*). — Recherches sur l'équilibre des corps élastiques isotropes. (81-123).

L'auteur apporte avec ce Mémoire des simplifications très remarquables à la méthode de M. Betti pour l'intégration des équations d'équilibre. Au lieu des douze fonctions auxiliaires que l'on doit déterminer dans cette dernière méthode, M. Cerruti trouve que, lorsqu'on donne les déplacements à la surface, il suffit de connaître une seule fonction auxiliaire (à déterminer avec des artifices particuliers); lorsqu'on donne les forces extérieures appliquées à la surface, ou bien ces forces sur une portion de la surface et sur l'autre les déplacements, il suffit encore d'une seule fonction auxiliaire et de trois en quelques cas. Puis il applique sa méthode à l'étude de la déformation d'un corps élastique indéfini terminé par un plan, en supposant que des forces quelconques agissent à l'intérieur, et que les forces ou les déplacements soient donnés à la surface, en donnant de ce problème une solution complète et rigoureuse.

Suit une liste de corrections relative au Mémoire du même auteur : *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes* (*Mémoires des Lincei*, t. VIII, 361-389).

Gebbia (*M.*). — Sur les efforts intérieurs des systèmes articulés. (259-273).

Tome XIV; 1883.

Besso (*D.*). — Sur le produit de plusieurs solutions particulières d'une équation différentielle linéaire homogène et spécialement sur le produit de deux solutions particulières de l'équation différentielle linéaire homogène du troisième ordre. (3-13).

Dans la partie générale l'auteur ajoute quelques observations sur des théorèmes démontrés par lui-même dans le Mémoire : *Quelques propositions sur les équations différentielles linéaires* (*Mémoires des Lincei*, t. X). Pour les équations du troisième ordre, après avoir donné quelques propriétés relatives au produit de deux solutions particulières, il considère le cas où ce produit est constant pour une équation de la forme

$$y''' + ry = 0,$$

et il trouve que l'équation

$$y''' + \rho' y = 0,$$

où ρ est donné par l'équation

$$\rho'^2 = c + b\rho + a\rho^2 + \frac{4}{3}\rho^3,$$

a, b, c étant des constantes liées entre elles par la relation

$$a^3 - 6ab + 24c = 0,$$

est satisfaite par deux fonctions dont le produit est constant.

Besso (*D.*). — Sur quelques propriétés de l'équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre et sur quelques équations algébriques. (14-29).

Propriétés relatives au produit de plusieurs solutions particulières et à la somme des puissances de même exposant constant, de plusieurs solutions particulières. Un des résultats obtenus par l'application de ces propriétés est le suivant.

Soit l'équation

$$\tau^m + S_2\tau^{m-2} - S_3\tau^{m-3} + S_{m,4}\tau^{m-4} - \ldots \pm S_{m,m-1}\tau \mp S_{m,m} = 0,$$

où les coefficients S_2 et S_3 sont arbitraires et les autres donnés par

$$S_{m,n} = \binom{m}{n} \sum_{h=1}^{h \begin{cases} = \frac{n}{2} \\ = \frac{n-1}{2} \end{cases}} \left[\frac{2}{m(m-1)}\right]^h \left(\frac{3}{m-2}\right)^{n-2h} \binom{n-h-1}{h-1} S_3^{n-2h} S_2^{3h-n};$$

les racines de cette équation sont données par

$$\tau_r = \frac{1}{[m(m-1)]^{\frac{1}{m}}(2S_2)^{\frac{m-3}{m}}} \frac{\varepsilon_r\left(\sqrt{\sigma} + \frac{3}{m-2}S_3\right)^{\frac{m-1}{m}} + \left(\sqrt{\sigma} - \frac{3}{m-2}S_3\right)^{\frac{m-1}{m}}}{\varepsilon_r\left(\sqrt{\sigma} - \frac{3}{m-2}S_3\right)^{\frac{1}{m}} - \left(\sqrt{\sigma} + \frac{3}{m-2}S_3\right)^{\frac{1}{m}}},$$

où

$$\sigma = \frac{9}{(m-2)^2}S_3^2 + \frac{8}{m(m-1)^2}S_2^3,$$

et les ε sont les valeurs de $\sqrt[m]{-1}$.

Besso (*D.*). — Sur une classe d'équations du sixième degré résolubles par séries hypergéométriques. (30-39).

Besso (*D.*). — Sur quelques propriétés de l'équation différentielle linéaire non homogène du second ordre. (40-45).

Maisano (*G.*). — Sur la forme binaire du cinquième ordre. (97-135).

Après avoir exposé les résultats de Clebsch et de Gordan, l'auteur calcule quelques résultants et discriminants, puis il étudie le hessien H de la forme fondamentale f, et enfin il donne les significations géométriques des formes du système complet, et les caractères particuliers des deux équations $f = 0$, $H = 0$ lorsque quelque invariant est égal à 0, ou que quelque covariant s'annule identiquement.

Frattini (*G.*). — Les groupes transitifs de substitutions d'ordre et de degré égaux. (143-172).

Dans la première Partie du Mémoire l'auteur donne deux constructions du groupe transitif en question. La seconde et la troisième Partie sont consacrées à établir une base nouvelle pour l'isomorphisme mériédrique, et à des théorèmes remarquables sur les groupes transitifs d'ordre et de degré égaux.

Bombicci (*L.*). — Sur l'aérolithe tombé près d'Alfianello et Verolanuova (province de Brescia); sur la cause des détonations qui accompagnent la chute des bolides et sur la présence constante du fer dans les météorites. (675-683).

Tome XV; 1883.

Gremigni (*M.*). — La théorie des développoïdes et les surfaces ayant un système de lignes de courbure circulaires. (3-43).

M. Beltrami a donné le nom de *développoïdes* aux courbes dont la tangente fait avec une courbe donnée un angle qui est une fonction (quelconque) des coordonnées du point d'intersection.

Le travail de M. Gremigni se compose de trois Parties. La première comprend les propriétés générales des développoïdes et montre leur liaison avec les surfaces qui ont un système de lignes de courbure circulaires.

La seconde Partie contient des recherches particulières sur les développées d'une courbe gauche, et sur les surfaces canaux, l'étude des développoïdes d'une courbe plane, les équations en termes finis des surfaces ayant un système de lignes de courbure circulaires avec les centres sur une courbe plane; la recherche des surfaces pour lesquelles les lignes de courbure du système non circulaire sont aussi à courbure géodésique constante; la recherche des développoïdes d'une courbe gauche avec des conditions particulières pour l'angle des tangentes avec la courbe, et comme cas particulier les développoïdes d'une hélice. L'auteur démontre que la surface formée par les développoïdes ordinaires d'une hélice circulaire est toujours applicable sur une surface de révolution. Après il donne l'intégrale générale, en fonction d'une intégrale particulière, de l'équation dont dépend la recherche des développoïdes d'une courbure quelconque, et des surfaces ayant un système de lignes de courbure circulaires. Dans la dernière Partie l'auteur résout le problème inverse des développoïdes, c'est-à-dire il détermine les courbes qui coupent les tangentes d'une courbe donnée sous un angle variable avec une loi donnée, et donne quelques propriétés de ces courbes.

Maisano (*G.*). — Sur deux classes de formes binaires. (44-56).

La première de ces classes est celle des binaires d'ordre impair $2n+1$ et pour lesquelles on a

$$(a\Delta)^2 a_x^{2n-1} = 0,$$

étant

$$\Delta_x^2 = (ab)^{2n} a_x b_x.$$

Les formes de cette classe ont les mêmes propriétés analytiques et géométriques que la binaire cubique générale.

La seconde classe est celle des binaires d'ordre pair $2n$ pour lesquelles on a

$$(a\mathrm{H})^2 a_x^{2n-3}\,\mathrm{H}_x = 0,$$

$$(a\mathrm{H})^4 a_x^{2n-4} = 0,$$

étant

$$\mathrm{H} = (ab)^{2n-2} a_x^2 b_x^2.$$

A cette classe appartient la binaire quadratique harmonique.

Pisati (*G.*) et *Pucci* (*E.*). — Sur la longueur du pendule à seconde. (57-231, 4 pl.).

Capelli (*A.*). — Extension de la formule pour le nombre des covariants au cas des transformations linéaires indépendantes. (233-241).

Tome XVI; 1883.

Mesures micrométriques d'étoiles doubles et multiples faites dans les années 1852-1873 par le baron Hercule Dembowski. Tome I contenant les observations faites à Naples et les séries mineures observées à Gallarate. (Avec portrait de Dembowski.)

La préface des éditeurs MM. Otto Struve et G.-V. Schiaparelli contient des Notices biographiques sur H. Dembowski.

Tome XVII; 1884.

Mesures micrométriques d'étoiles doubles et multiples faites dans les années 1852-1878 par le baron Hercule Dembowski. Tome II contenant les observations faites à Gallarate sur les étoiles du Catalogue de Dorpat et des appendices de W. Struve.

Tome XVIII; 1883-1884.

Govi (*G.*). — Sur une déformation de perspective des images dans les lunettes. (403-419, 1 pl.).

Frattini (*G.*). — Sur quelques propositions de la théorie des substitutions. (487-513).

L'auteur s'occupe de l'imprimitivité des groupes. Dans un Appendice il donne une généralisation d'un théorème démontré dans son Mémoire : *Les groupes transitifs de substitutions d'ordre et de degre égaux* (*Mémoire des Lincei*, t. XIV, 1883).

Ascoli (*G.*). — Les courbes limites d'une variété donnée de courbes. (521-586).

Les recherches de l'auteur sont, comme il le dit, des préliminaires pour une théorie des fonctions de deux variables. Les deux Parties du travail sont principalement dédiées aux recherches suivantes :

I. Une définition précise du concept de courbe plane et une étude de ses propriétés ;
II. La recherche des courbes limites d'un groupe donné de courbes.

La dernière Partie est spécialement remarquable.

Tome XIX; 1884.

Maisano (*G.*). — La sextique binaire. (9-60).

I. Théorèmes sur les formes binaires d'ordre quelconque. — II. Théorèmes relatifs à la sextique binaire et à ses principaux covariants. — Formes particulières de la sextique binaire pour l'annulation identique de quelques covariants. — IV. Discriminants et résultants de la binaire sextique et de quelques-uns de ses covariants. — V. Les cas les plus remarquables de l'équation $f = 0$ (f étant la sextique binaire). — VI. Le même pour l'équation $j = 0$. — VII. Racines multiples du hessien.

Millosevich (*E.*). — Le diamètre d'Uranus. (67-82).

Segre (*C.*). — Sur la théorie et sur la classification des homographies dans un espace linéaire d'un nombre quelconque de dimensions. (127-148).

Dans la première Partie du travail, l'auteur étudie les homographies entre deux espaces distincts. Dans la seconde, il suppose les espaces superposés et, pour faire la classification des homographies, il se base sur un théorème de M. Weierstrass relatif aux couples des formes bilinéaires, et dont l'auteur donne l'interprétation géométrique. La troisième Partie contient l'application des résultats précédents aux homographies non dégénérées entre deux espaces ordinaires superposés et entre deux plans superposés.

Besso (*D.*). — Sur le produit de deux solutions de deux équations différentielles linéaires homogènes du second ordre. (219-231).

Les produits des couples de solutions de deux équations différentielles linéaires homogènes du second ordre satisfont à une équation différentielle linéaire homogène du quatrième ordre, dont l'auteur donne les propriétés.

Besso (*D.*). — Sur l'équation du cinquième degré. (232-244).

L'auteur commence par démontrer un théorème sur l'équation différentielle linéaire satisfaite par les racines d'une équation algébrique. Puis il résout par séries hypergéométriques la réduite de Jerrard

$$y^5 + y - x = 0$$

et par séries hypergéométriques du second ordre la résolvante

$$y^6 + 10y^3 - 12xy + 5 = 0.$$

Besso (*D.*). — Sur une classe d'équations différentielles linéaires du quatrième ordre intégrable par séries hypergéométriques. (245-250).

Besso (*D.*). — Sur une classe d'équations différentielles linéaires du troisième ordre intégrable par séries hypergéométriques. (251-252).

Capelli (*A.*). — Sur la composition des groupes de substitutions (262-272).

Chizzoni (*F.*). — Sur les involutions dans le plan. (301-343).

I. Involution engendrée par deux faisceaux de courbes. — II. Représentation des groupes de l'involution par les points d'un hyperboloïde. — III. Involution engendrée par un réseau de courbes. — IV. Lieux renfermant un nombre infini de sous-groupes d'une involution. — V. Relation entre deux ou plusieurs involutions. — VI. Transformations des involutions rationnelles.

Veronese (*G.*). — La surface homaloïdique normale à deux dimensions et du quatrième ordre de l'espace à cinq dimensions, et ses projections sur le plan et sur l'espace ordinaire. (344-371).

La projection dans l'espace ordinaire est la surface de Steiner.

Besso (*D.*). — Sur une classe d'équations à trois termes. (631-642).

L'auteur résout l'équation

$$y^n + y - a = 0$$

par séries hypergéométriques de l'ordre $n - 2$.

S. R.

PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON [1].

Vol. 174; 1883.

Forsyth (*A.*). — Sur le théorème d'Abel et sur les fonctions abéliennes.

La première Partie du Mémoire de M. Forsyth se rapporte à la généralisation suivante du théorème d'Abel.

Soient

$$F_m(x, y, z) = 0, \qquad F_n(x, y, z) = 0$$

deux équations entières à trois variables de degrés respectifs m et n, qui définissent y et z comme des fonctions de x et U une fonction entière des trois variables x, y, z; on peut obtenir une expression algébrico-logarithmique pour la somme

$$\sum \int \frac{U\,dx}{f(x)\,\Delta},$$

où Δ est le jacobien

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_m}{\partial y} & \dfrac{\partial F_m}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y} & \dfrac{\partial F_n}{\partial z} \end{vmatrix},$$

où les limites supérieures des intégrales sont les diverses racines de l'équation obtenue en éliminant y et z entre les deux équations proposées et l'équation entière, d'ailleurs arbitraire,

$$F_p(x, y, z) = 0.$$

Cette proposition s'étend au cas d'un nombre quelconque de variables. L'auteur débute par quelques indications sur la démonstration de ce fait que le premier membre X de l'équation obtenue en éliminant y et z entre les trois équations

$$F_m = 0, \qquad F_n = 0, \qquad F_p = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$X = AF_m + BF_n + CF_p,$$

où A, B, C sont des fonctions entières en x, y, z. Il établit ensuite la proposition énoncée et l'applique à l'exemple suivant :

$$F_m = y^2 - (1 - x^2),$$
$$F_n = z^2 - (1 - k^2x^2),$$
$$F_p = Ax + By + Cz - 1,$$
$$f(x) = 1, \qquad U = 1 \qquad \text{et} \qquad U = 1 - k^2x^2:$$

---

[1] Voir *Bulletin*, IX$_2$, p. 165.

il examine aussi le cas où, les deux fonctions F_m, F_n étant définies comme ci-dessus, la fonction F_p est

$$F_p = Axy + (Bx + C)y + (Hx + D)z + Gx^2 + Fx + 1.$$

Dans la seconde Partie, M. Forsyth étudie les fonctions abéliennes et, en particulier, le théorème d'addition, d'après le célèbre Mémoire de M. Weierstrass (*Journal de Crelle*, t. 52); sur divers points, toutefois, les méthodes du géomètre allemand sont modifiées; le travail se termine par l'examen du cas où $p = 2$.

Lamb (*H.*). — Sur les mouvements électriques dans un conducteur sphérique. (519-549).

Il s'agit du mouvement de l'électricité produit par une opération électrique ou magnétique quelconque. Les recherches sont faites d'après la théorie de Maxwell; au point de vue mathématique, le problème se ramène à un système d'équations déjà étudiées par l'auteur dans deux Communications à la Société mathématique de Londres (*On the oscillations of a viscous spheroid*, 1881; *On the vibrations of an elastic sphere*, 1882).

M. Lamb rappelle d'abord les équations fondamentales; il suppose, dans la première Partie de son travail, que la susceptibilité magnétique du conducteur soit zéro. Il fait ensuite cette hypothèse que les diverses fonctions, telles que les composantes du moment électromagnétique, varient comme $e^{\lambda t}$, λ étant une constante et t le temps; il examine jusqu'à quel point on peut supposer, comme l'ont fait tous les auteurs, que la vitesse v de propagation du phénomène électromagnétique dans le milieu qui entoure le conducteur soit pratiquement infinie. Cette hypothèse, au point de vue expérimental, donne en effet des résultats très suffisamment exacts; M. Lamb l'adopte donc: il reviendra d'ailleurs, à la fin de son Mémoire, sur les corrections qu'il y a lieu de faire subir à ses formules dans le cas où l'on supposerait cette vitesse finie. Les équations auxquelles parvient M. Lamb admettent deux types distincts de solutions; le premier type, qui est de beaucoup le plus intéressant au point de vue expérimental, a été aussi étudié par M. Niven (*Phil. Transactions*, 1882); toutefois, à un point de vue assez différent, M. Lamb étudie successivement le cas des courants électriques développés d'une façon quelconque sur la sphère puis abandonnés à eux-mêmes, et le cas de courants induits.

Il examine enfin, dans la seconde Partie de son travail, quelles modifications doivent être apportées aux méthodes et aux résultats de la première quand la substance de la sphère est susceptible de magnétisation.

J. T.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome C; 1885 (1).

N° 1; 6 juillet.

Darboux. — Sur le mouvement d'un corps pesant de révolution fixé par un point de son axe. (11-17).

Dans une Note précédente, l'auteur a défini un certain mouvement qui est produit par le roulement du cône (B) ayant pour base une herpolhodie (H') sur un cône (A) ayant pour base une autre herpolhodie (H). Le mouvement de (B) par rapport à (A) est un de ceux que prendrait naturellement un corps pesant qui admettrait une sphère pour ellipsoïde d'inertie d'un de ses points et serait fixé par ce point. De plus, cette représentation permet d'obtenir tous les mouvements que peut prendre le corps soumis à la seule action de son poids, quand les circonstances initiales varient. Un cas beaucoup plus étendu est celui où l'ellipsoïde d'inertie du point fixe est de révolution autour de la droite qui joint ce point au centre de gravité. M. Darboux le ramène au cas précédent. Étant donné un corps pesant de révolution fixé par un point de son axe, un corps auxiliaire animé par rapport au premier d'une vitesse de rotation constante, déterminée convenablement, prendra le même mouvement qu'un corps pesant pour lequel l'ellipsoïde du point fixe serait une sphère, le centre de gravité se trouvant sur l'axe. De là résulte cette proposition de Jacobi :

Si l'on considère le mouvement le plus général d'un corps pesant de révolution, fixé par un point de son axe, il existe un système auxiliaire qui est animé, et par rapport aux axes fixes et par rapport au corps mobile, d'un mouvement de Poinsot; les constantes relatives à ces deux mouvements sont différentes; les plans invariables sont le plan horizontal pour le premier mouvement et le plan perpendiculaire à l'axe pour le second.

L'auteur énonce ensuite deux propositions dont l'une, en même temps qu'elle définit la route du pôle, fait connaître une construction directe et purement géométrique de l'herpolhodie.

En terminant, il fait remarquer que la méthode de Lagrange conduit encore à la solution du problème dans le cas où le solide de révolution, suspendu par un point de son axe, est soumis à l'action de forces extérieures dont le potentiel dépend exclusivement de l'angle que fait l'axe du corps avec une droite fixe.

Haton de la Goupillière. — Propriétés nouvelles du paramètre différentiel du second ordre des fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes. (18-19).

Il s'agit de l'opération $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ appliquée aux fonctions de trois

(1) Voir *Bulletin*, t. X₂, p. 149.

variables indépendantes x, y, z. L'auteur généralise cette opération en la répétant n fois de suite, ou, comme il le dit, en prenant le $n^{\text{ième}}$ *augment* de la fonction.

Il simplifie beaucoup le calcul des augments en montrant que les fonctions quelconques considérées ne dépendent des variables que par l'intermédiaire de certaines fonctions *typiques*. Ces fonctions typiques sont celles qui, égalées à des constantes, représentent des systèmes de sphères quelconques ou de cylindres de révolution à axes parallèles. L'extension de ces résultats à un nombre quelconque de variables met en lumière certaines différences suivant la parité de ce nombre.

Les formules générales obtenues par M. Haton pour le calcul des augments lui permettent de résoudre, entre autres, ces deux problèmes :

1° Trouver un potentiel dont le $n^{\text{ième}}$ augment soit constant;

2° Trouver un potentiel qui soit reproduit par son $n^{\text{ième}}$ augment.

Sylvester. — Sur l'homographie de deux corps solides. (35-39).

Deux solides homographiques peuvent être disposés l'un par rapport à l'autre de telle façon que la droite qui joint deux points correspondants coupe deux axes fixes, et cela de quatre manières différentes.

Ce théorème est l'extension aux figures de l'espace de celui qui permet de rendre homologiques deux figures planes simplement homographiques. Il n'a lieu d'ailleurs que dans les deux cas du plan et du solide. Dans l'hyperespace, le problème qui consiste à passer de l'homographie à l'involution est ou impossible (cas général) ou indéterminé.

Gilbert. — Sur quelques formules de la théorie des courbes gauches. (52).

Rappel de formules dues à divers auteurs pour représenter la distance ε d'un point d'une courbe gauche à la sphère osculatrice au point infiniment voisin

$$\varepsilon = \frac{ds^4}{2\sqrt{\rho}}\left(\frac{R'T'}{RT^2} + \frac{R''}{R} + \frac{1}{T^2}\right) \qquad \text{(Lecornu)},$$

$$\varepsilon = \frac{ds^3\,ds_1}{2\sqrt{\rho}\,RT} \qquad \text{(Ruchonnet)},$$

$$\varepsilon = \frac{R'\,ds^4}{2\sqrt{\rho}\,RT} \qquad \text{(Gilbert)},$$

ds étant l'élément de l'arc, R, T, ρ les rayons de courbure, de torsion et de la sphère osculatrice, ds_1 l'élément de l'arête de rebroussement de la surface polaire. On en déduit pour la différence entre ds et sa projection sur le plan osculateur $\frac{1}{40}\frac{ds^5}{R^2T^2}$.

Autonne. — Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe cubique Cremona. (53-55).

M. Autonne a défini antérieurement le groupe cubique Cremona. Soit

$$S = |z_i, \varphi_i(z_1, z_2, z_3)| \qquad (i = 1, 2, 3).$$

une substitution cubique d'un pareil groupe. Les diverses cubiques du réseau

$$\sum_i u_i \varphi_i = 0, \qquad u_i = \text{const.},$$

auront un point double commun fixe ω et quatre points d'intersection fixes.

Dans le cas où ω est le même pour toutes les substitutions cubiques du groupe (groupe de *première catégorie*), tout groupe cubique G d'ordre fini est isomorphe à un groupe linéaire Γ d'ordre fini à deux variables. A la substitution unité de Γ correspond dans G un sous-groupe g, dit *normal,* susceptible de sept formes, que M. Autonne énumère.

N° 2; 13 juillet.

Hermite. — Note au sujet de la Communication de M. Stieltjes sur une fonction uniforme. (112-115).

Partant de la formule de Riemann

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x - 1}$$

M. Hermite décompose l'intégrale définie en deux parties, $F(s)$ et $G(s)$, dont l'une

$$G(s) = \int_1^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x - 1},$$

est holomorphe, et dont l'autre $F(s)$ est une fonction méromorphe représentée par le développement

$$F(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} - \sum \frac{(-1)^n B_n}{1.2\ldots 2n(2n+s-1)},$$

où B_n désigne un nombre de Bernoulli.

La fonction

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}[F(s) + G(s)]$$

se trouve ainsi étendue à tout le plan.

La fonction holomorphe $\frac{1}{\Gamma(s)}$ s'annulant pour $s = 0, -1, -2, \ldots$, le seul pôle $s = 1$ subsiste dans le quotient $\frac{F(s)}{\Gamma(s)}$; il en résulte que la différence

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

est holomorphe (Riemann).

De la forme donnée à $\zeta(s)$ par M. Hermite résulte encore la relation

$$\zeta(-2n+1) = \frac{(-1)^n B_n}{2n},$$

déjà obtenue par M. Stieltjes.

Darboux. — Sur le mouvement d'un corps pesant de révolution fixé par un point de son axe. (115-119).

Voir plus haut.

Sylvester. — Sur l'homographie de deux solides infiniment étendus. (139-142).

Schœnflies. — Sur une loi de réciprocité dans la théorie du déplacement d'un corps solide. (150-153).

Soit Σ un système invariable qui se déplace dans l'espace Σ'. Pour un observateur lié à Σ, Σ' se déplace par rapport à Σ (mouvement *indirect*). L'auteur met en lumière quelques lois de réciprocité pour les trajectoires des points P de Σ et Q de Σ'.

Si P′ est le centre de la sphère osculatrice de la trajectoire de P, dans le mouvement indirect, P est le centre de la sphère osculatrice de la trajectoire de P′. Il existe une homographie du troisième ordre entre les points P de Σ et les points P′ de Σ'.

Soit F_4 la surface de Σ formée par les points dont les sphères osculatrices passent par cinq points consécutifs des trajectoires, la surface F_4 formée par les centres de ces sphères est du quatrième ordre comme Σ. Pour le mouvement indirect, il faut échanger les deux surfaces. Théorème analogue pour la courbe du dixième ordre formée par les points de Σ dont la sphère osculatrice passe par six points consécutifs.

Toutes les droites g de Σ dont les axes de courbure forment un cône C sont les droites d'un complexe du second ordre K′, complexe des axes de courbure pour le mouvement indirect, et réciproquement. Le sommet du cône C est le point de Σ' qui, dans le mouvement indirect, décrit une droite telle que son axe de courbure est la droite g.

Stieltjes. — Sur une fonction uniforme. (153-154).

Étude des racines imaginaires de l'équation $\zeta(z) = 0$, dont le premier membre est défini pour les valeurs de z dont la partie réelle surpasse l'unité par la série

$$1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \cdots$$

M. Stieltjes démontre que la série d'Euler

$$\frac{1}{\zeta(z)} = 1 - \frac{1}{2^z} - \frac{1}{3^z} - \frac{1}{5^z} + \frac{1}{6^z} - \frac{1}{7^z} + \frac{1}{10^z} - \cdots$$

définit une fonction analytique tant que la partie réelle de z surpasse $\frac{1}{2}$. Il déduit immédiatement de là que toutes les racines imaginaires de $\zeta(z) = 0$ sont, conformément aux prévisions de Riemann, de la forme $\frac{1}{2} + ai$, a étant réel.

N° 3; 20 juillet.

Tisserand. — Sur le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité. (195-199).

Intégration par les fonctions elliptiques des dix équations simultanées d'où dépend le mouvement de rotation de la Terre, en supposant deux des moments d'inertie égaux et la fonction des forces U réduite aux gros termes de son développement

$$U = -\frac{3}{4} m^2 (C - A) H \sin^2 \theta,$$

avec

$$H = 1 + \frac{3}{2} e^2 + 2,1758 \left(1 + \frac{3}{2} e'^2 - \frac{3}{2} c^2\right),$$

m étant le moyen mouvement de la Terre dans son orbite, e l'excentricité de cette orbite, e' celle de l'orbite lunaire, c l'inclinaison de cette dernière orbite de l'écliptique.

Darboux. — Sur diverses propositions relatives au mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. (199-205).

La courbe d'intersection (C) de deux surfaces du second degré ayant les mêmes axes principaux est normale à une infinité de surfaces homofocales du second degré formant une des trois familles d'un système orthogonal. Toutes les fois qu'elle n'est pas sphérique, la courbe C est une polhodie tracée sur deux surfaces différentes. Cette polhodie est, dans une correspondance d'Ivory, le lieu des points correspondants d'un point donné d'un hyperboloïde à une nappe sur tous les hyperboloïdes homofocaux.

De ces propriétés résultent le théorème de M. de la Gournerie et celui de M. Greenhill, avec d'autres conséquences. Soit M un point quelconque de la courbe (C), (H) l'hyperboloïde normal à (C) en M, et (K) l'hyperboloïde homothétique de (H) par rapport au point M, le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{2}$. Si l'on déforme (K) de telle manière qu'une génératrice (g) reste fixe, tout point de la génératrice (g_1) parallèle à (g) décrira un plan perpendiculaire à (g). Tous les autres points de l'hyperboloïde décriront des sphères ayant leur centre sur (g); si l'on assujettit un point de (g_1) à décrire une courbe normale à l'hyperboloïde (K) en ce point, cette courbe sera une herpolhodie. L'auteur donne en terminant un moyen de réaliser mécaniquement, grâce à la déformation des hyperboloïdes, le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Gyldén. — Sur l'orbite intermédiaire de la Lune. (223-226).

L'auteur signale, relativement à cette orbite, quelques résultats obtenus en appliquant la solution de l'équation de Lamé donnée par M. Hermite.

Hénard. — Sur les seize réseaux des plans de l'icosaèdre régulier convexe. (232-235).

N° 4; 27 juillet.

Barbier. — Observation à propos de la Note récente de M. Hénard sur les seize réseaux des plans de l'icosaèdre régulier convexe. (304).

Bourguet. — Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. (304-307).

Calcul des coefficients c_n du développement de la fonction holomorphe

$$G(s) = \int_1^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x - 1} = c_0 + c_1 s + \ldots + c_n s^n + \ldots$$

pour les grandes valeurs de n. Cette fonction $G(s)$ apparaît dans la formule de décomposition de la fonction $\zeta(s)$ donnée par M. Hermite

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}[F(s) + G(s)],$$

où

$$F(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} - \sum \frac{(-1)^n B_n}{1.2\ldots 2n(s+2n-1)}.$$

En appliquant à $G(s)$ la méthode qu'il a employée pour la fonction $Q(x)$ de M. Prym, l'auteur trouve

$$\lim c_n = \lim \sqrt{\frac{2e}{n}}\,\frac{1}{\left[\frac{e}{2}(n+1)\right]^{\frac{n}{2}}}.$$

Poincaré. — Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. (307-309).

Parmi les formes d'équilibre que peut affecter une masse fluide, homogène, soumise à l'attraction newtonienne et animée d'un mouvement de rotation, il existe des ellipsoïdes de Jacobi qui appartiennent en même temps à une série linéaire Σ_n de figures non ellipsoïdales.

Soit R_n la fonction de Lamé d'ordre n qui ne contient en facteur aucun des axes $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ et qui ne s'annule que pour les valeurs de l'axe ρ comprises entre o et b; soit S_n la conjuguée de R_n (notation de Liouville). Tout ellipsoïde de Jacobi satisfait à la condition $\frac{R_2 S_1}{3} = \frac{R_2 S_2}{5}$; s'il satisfait en outre à la condition

$$\frac{R_n S_1}{3} = \frac{R_n S_n}{2n+1},$$

il appartiendra à une série Σ_n de figures non ellipsoïdales.

Ces figures Σ_n existent toujours, car il y a, quel que soit n, un ellipsoïde de Jacobi satisfaisant à la condition précédente. Elles sont instables, sauf pour $n = 3$.

Une masse fluide homogène, presque sphérique, se contractera lentement par refroidissement, affectera la forme d'un ellipsoïde de révolution dont l'excentricité ira sans cesse en croissant jusqu'à la valeur 0,81. La masse deviendra ensuite un ellipsoïde de Jacobi, puis une figure Σ_3; à partir de ce moment, une de ses moitiés s'aplatira, tandis que l'autre s'allongera de plus en plus.

Goursat. — Sur les différentielles des fonctions de plusieurs variables indépendantes. (309-312).

Trouver toutes les fonctions d'un nombre quelconque μ de variables x_1, x_2, ..., x_μ, telles que les différentielles $n^{\text{ième}}$ et $(n+1)^{\text{ième}}$ admettent un diviseur commun, fonction entière et homogène des dx_i.

Trois catégories de fonctions répondent à la question :

1° Les fonctions de la forme

$$f = \int_1^u [x_1\varphi_1(u) + x_2\varphi_2(u) + \ldots + x_\mu\varphi_\mu(u) + \psi(u)]^{p-1} F(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)\, du,$$

la limite u étant définie par l'équation

$$x_1\varphi_1(u) + x_2\varphi_2(u) + \ldots + x_\mu\varphi_\mu(u) + \psi(u) = 0,$$

et F désignant une fonction entière des x_i de degré $(n-p)$, dont les coefficients dépendent de u, le facteur commun à $d^n f$ et à $d^{n+1} f$ est la puissance $p^{\text{ième}}$ d'un facteur linéaire;

2° Les fonctions de la forme

$$f = Q(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)\sqrt{R(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)},$$

Q étant un polynôme arbitraire de degré $n-2$ et R un polynôme quelconque du second degré; le facteur commun à $d^n f$ et à $d^{n+1} f$ est une puissance d'un facteur quadratique;

3° Les fonctions rationnelles de la forme

$$f = \varphi_0\left(\frac{R}{u}\right)^p + \varphi_1\left(\frac{R}{u}\right)^{p-1} + \cdots + \varphi_{p-1}\left(\frac{R}{u}\right),$$

où φ_i est une fonction entière de degré $n+p-1-q(p-i)-i$, où R est une fonction entière de degré q et u une fonction linéaire.

Ces trois catégories de solutions sont tout à fait analogues à celles que M. Darboux a trouvées pour les fonctions de plusieurs variables indépendantes, telles que la différentielle $(n+1)^{\text{ième}}$ est divisible par la différentielle $n^{\text{ième}}$.

N° 5; 3 août.

Kretz. — Réflexion sans frottement, sur un plan, des déplacements élastiques dans un corps de forme et de contexture quelconques. (366).

Un corps isotrope ou hétérotrope est sollicité par des forces extérieures en équilibre; les points situés primitivement dans une face plane sont assujettis à demeurer dans ce plan sous l'action de forces normales.

Si l'on envisage le corps double du corps considéré, c'est-à-dire le corps obtenu en ajoutant au premier son symétrique, par rapport à la face plane, le déplacement en un point du corps donné est la résultante du déplacement subi, sous l'action des mêmes forces, par le point correspondant du corps double et du déplacement symétrique de celui qu'éprouve le point symétrique du corps double.

Stieltjes. — Sur une loi asymptotique dans la théorie des nombres. (368-370).

Dans une Communication précédente, l'auteur a montré que la série

$$1 - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} - \cdots$$

est convergente pour $s > \frac{1}{2}$. Ce théorème conduit à une conséquence importante relative à la fonction $\Theta(x)$ de M. Tchebycheff (somme des nombres premiers qui ne surpassent pas x). En posant

$$\Theta(n) + \Theta\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + \Theta\left(n^{\frac{1}{3}}\right) + \ldots = n + A_n S,$$

on trouve $\lim A_n = 0$, pour n infini, dès que $s > \frac{3}{4}$. On a aussi, pour les mêmes valeurs de s,

$$\Theta(n) = n + B_n n^s, \qquad \lim B_n = 0.$$

On conclut de là que le nombre des nombres premiers compris entre n et $(1+h)n$, h étant un nombre positif aussi petit qu'on veut, finit toujours par dépasser toute limite, lorsque n croît indéfiniment.

De Sparre. — Sur l'herpolhodie dans le cas d'une surface du second degré quelconque. (370-373).

En se servant des équations dont est parti M. Hermite dans son Mémoire sur la rotation des corps, l'auteur retrouve les résultats déjà obtenus par M. Darboux.

Pour que l'herpolhodie présente des points d'inflexion :

1° Dans le cas de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a > b > c),$$

il faut que l'on ait

$$\frac{1}{c^2} > \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}.$$

et de plus que l'axe instantané soit compris dans l'angle dièdre des plans

$$u^2 \frac{a^2 - b^2}{a^4} - z^2 \frac{b^2 - c^2}{c^4} = 0$$

qui comprend le grand axe de l'ellipsoïde;

2° Dans le cas de l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (b < c),$$

il faut seulement que l'on ait

$$\frac{1}{b^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}.$$

N° 6; 10 août.

Tisserand. — Sur les moments d'inertie principaux de la Terre. (409-415).

Soient A, B, C les moments d'inertie principaux de la Terre rangés par ordre de grandeur croissante. Les observations du pendule montrent que $\frac{B - A}{C - A}$ est petit.

Suivant M. É. Mathieu, en admettant que la latitude d'un lieu de la Terre ne peut varier de 2″ en 153 jours, le rapport $\frac{B - A}{C}$ serait inférieur à $\frac{1}{3\,000\,000}$.

M. Tisserand est conduit à des conclusions différentes; il trouve que le rapport $\frac{B - A}{C}$ peut avoir une valeur sensible, comparable à celle de $\frac{C - A}{C}$, sans que pour cela la latitude d'un lieu varie d'une façon appréciable.

De Jonquières. — Sur une relation de récurrence qui se présente dans la théorie des fonctions elliptiques. (415-417).

Étude des propriétés des nombres P_n définis par la loi de récurrence

$$(1) \qquad n^2 P_n - 2^\alpha (3n^2 - 3n + 1) P_{n-1} + 2^{2\alpha+1} (n-1)^2 P_n = 0,$$

où α est un nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif, M. Catalan a rencontré un cas particulier de la relation (1) (correspondant à $\alpha = 3$) dans le développement de l'intégrale elliptique de première espèce. P_0 étant supposé égal à 1, les autres nombres P_n sont donnés par la formule

$$P_n = 2^{\beta_n} R_n,$$

où R_n est un nombre impair et

$$\beta_n = \alpha n - 2\left(\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{2^k}\right]\right).$$

Si α est entier et ≥ 2, P_n est entier. Si α est entier et < 2 ou fractionnaire ou bien s'il est négatif, P_n n'est plus entier.

Les nombres R_n sont fournis par la relation

$$R_n = \frac{(3n^2 - 3n + 1)R_{n-1} - 2\gamma_n p^2 R_{n-2}}{q^2},$$

dans laquelle p et q désignent les produits de tous les facteurs premiers impairs contenus dans $n-1$ et n respectivement, et γ_n est de la forme

$$\gamma_n = 1 + 4k,$$

si l'on écrit $n = 2^k i + 1$, i étant un entier impair.

N° 10; 7 septembre.

Barbier. — Tableau des principaux éléments des dix figures polyédriques régulières. (562-564).

N° 15; 12 octobre.

Halphen. — Sur les formes quadratiques dans la théorie des équations différentielles linéaires. (664-666).

L'auteur a montré précédemment que si, entre diverses solutions inconnues d'une équation différentielle linéaire, il existe une relation connue, on peut en général intégrer complètement cette équation. La théorie tombe en défaut dans le cas où l'on connaît en fonction de la variable indépendante l'expression d'une forme quadratique à coefficients constants, où les indéterminées sont remplacées par les solutions inconnues.

C'est ce cas remarquable que M. Halphen traite actuellement pour les équations qui ne dépassent pas le sixième ordre; une équation linéaire du troisième ordre se ramène alors à une du second, une du quatrième à deux du second, une du cinquième à une du quatrième, et une du sixième à deux, l'une du second, l'autre du quatrième.

N° 16; 19 octobre.

De Jonquières. — Sur les transformations géométriques birationnelles d'ordre n. (720-724).

M. de Jonquières fait connaître une nouvelle solution générale des équations de la transformation Cremona d'ordre n

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} i\alpha_i = \sum_{i=1}^{i=n-1} i\alpha'_i = 3(n-1),$$

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} i^2\alpha_i = \sum_{i=1}^{i=n-1} i^2\alpha'_i = n^2 - 1,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \alpha_i = \sum_{i=1}^{i=n-1} \alpha'_i,$$

où les α et les α' expriment les nombres de points communs à toutes les courbes des deux réseaux primitifs, et où les i désignent les ordres respectifs de multiplicité ordinaire de ces points fondamentaux.

Cette solution est la suivante, si l'on écrit m sous la forme $n = kl$,

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = 2(l-1), && \alpha'_1 = 2(k-1), \\ &\alpha_{l-1} = 1, && \alpha'_{k-1} = 1, \\ &\alpha_l = 2(k-1), && \alpha'_k = 2(l-1), \\ &\alpha_{l(k-1)} = 1, && \alpha'_{k(l-1)} = 1; \end{aligned}$$

elle satisfait aux conditions géométriques tirées de la considération de la jacobienne.

Picard. — Sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce. (734-736).

L'auteur poursuit l'étude des intégrales de différentielles totales susceptibles de devenir infinies, ou intégrales de seconde espèce.

De même que la surface la plus générale d'un degré donné ne possède pas d'intégrales de première espèce, pour une telle surface toutes les intégrales de seconde espèce se réduisent à des fonctions rationnelles.

Le cas de deux variables indépendantes conduit à une conclusion bien différente de celle à laquelle est arrivé M. Poincaré dans ses recherches sur les fonctions algébriques d'une seule variable et sur les groupes fuchsiens. On ne peut pas exprimer les coordonnées d'un point quelconque de la surface la plus générale d'un degré donné par des fonctions hyperfuchsiennes ou hyperabéliennes correspondant à un groupe G pour lequel le polyèdre fondamental n'a aucun point commun avec la limite du domaine où doivent rester les deux variables indépendantes.

Schoute. — Questions qui se rapportent à un faisceau de cubiques planes. (736-739).

Brillouin. — Sur la torsion des prismes. (739-742).

Le coefficient de torsion d'un prisme isotrope est toujours plus petit que le moment d'inertie de la base par rapport à son centre de gravité.

N° 17; 26 octobre.

Hugoniot. — Sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits. (794-796).

Le mouvement continu, par tranches parallèles, d'un fluide parfait primitivement homogène, est représenté par l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

u étant le déplacement subi par la tranche x à l'instant t.

La vitesse de propagation est égale à $\pm\sqrt{F\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}$.

Si l'extrémité de la colonne fluide est soumise à une condition arbitraire, le mouvement est représenté géométriquement, tant qu'il ne s'est pas produit de réflexions, par une surface développable dont l'équation du premier ordre est

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(0) - \varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

en posant

$$F(x) = \left[\varphi'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]^2.$$

Schoute. — Questions qui se rapportent à un faisceau de cubiques planes. (805-808).

Une courbe C_k de l'ordre k qui a, en un point A d'une cubique donnée, un contact d'ordre $3k-2$ avec cette courbe la coupe encore en un point A_1^k, premier point tangentiel de puissance k du point A par rapport à la cubique. M. Schoute étudie le lieu T_n^k du point A_n^k, $n^{\text{ième}}$ point tangentiel de puissance k du point A.

Ce lieu est une courbe unicursale d'ordre $\frac{4}{3}[(1-3k)^{2n}-1]$ qui passe

$$\frac{1}{9}[2(1-3k)^n-5][2(1-3k)^n+1]$$

fois par A et

$$\frac{1}{9}[4(1-3k)^n+3][(1-3k)^n-1]$$

fois par chacun des huit autres points de base B. Elle n'a pas d'autres points multiples que les neuf points (A, 8B) qui la déterminent complètement.

Le lieu T_{-n}^k est une courbe d'ordre $\frac{5}{3}[(1-3k)^{2n}-1]$ qui passe autant de fois par les points (A, 8B) que T_n^k, et qui a au point A les mêmes tangentes que T_n^k.

Guccia. — Sur les transformations géométriques planes. (808-809).

L'auteur démontre une loi de composition des transformations composantes T_k, T_l d'une transformation Cremona T_{kl} dont il a trouvé le principe dans la solution récemment communiquée par M. de Jonquières.

Si (T_l, T'_l) et (T_k, T'_k) sont respectivement deux solutions conjuguées quelconques pour les transformations d'ordre l et k, l'une des transformations de l'ordre kl s'exprimera par le symbole $T_{kl} = [T_l + T_k^{(1-li)}]$, ayant pour conjugué $T'_{kl} = [T'_k + T_l^{(1-ki)}]$.

Le symbole $T_k^{(1-li)}$ signifie qu'après avoir écrit les éléments de la transformation T_k avec leurs valeurs numériques, on y change tous les indices respectifs en les multipliant par l, et qu'après les avoir *hiérarchisés*, on les adjoint à ceux de T_l auxquels on conserve leurs valeurs numériques et leurs indices respectifs.

Maximovitch. — Équations différentielles générales qui se ramènent aux quadratures. (810-812).

L'équation *générale* du premier ordre, pour être intégrable par un nombre fini de quadratures, doit être une transformée de l'équation linéaire. En termes plus précis, l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f\left(y, x, p, \frac{dp}{dx}, \ldots, \frac{d^m p}{dx^m}, q, \frac{dq}{dx}, \ldots, \frac{d^n q}{dx^n}, \ldots\right),$$

où $p, q, \ldots$ sont des fonctions arbitraires de x, doit provenir d'une équation linéaire

$$\frac{du}{dx} = Mu + N, \qquad \begin{cases} M = F\left(x, p, \ldots, \frac{d^m p}{dx^m}, q, \ldots, \frac{d^n q}{dx^n}, \ldots\right), \\ N = \Phi\left(x, p, \ldots, \frac{d^m p}{dx^m}, q, \ldots, \frac{d^n q}{dx^n}, \ldots\right), \end{cases}$$

au moyen d'une substitution de la forme

$$u = \varphi\left(y, x, p, \frac{dp}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1} p}{dx^{m-1}}, q, \frac{dq}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1} q}{dx^{n-1}}, \ldots\right),$$

où les ordres des dérivées de $p, q, \ldots$ sont inférieurs d'une unité à ceux qui figurent dans l'équation proposée.

De l'étude complète qu'il fait du cas le plus important, celui où la proposée ne contient pas les dérivées de $p, q, \ldots$, l'auteur conclut que l'équation linéaire du second ordre ne peut en général s'intégrer au moyen d'un nombre fini de quadratures.

N° 18; 2 novembre.

De Jonquières. — Solution d'une question d'analyse indéterminée qui est fondamentale dans la théorie des transformations Cremona (857-861).

Il s'agit de la solution en nombres entiers des équations

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} i\alpha_i = 3(n-1), \qquad \sum_{i=1}^{i=n-1} i^2\alpha_i = n^2 - 1.$$

Soit $T_n \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_{n-1})$ une solution supposée donnée. Comme on connaît la solution unique relative à $n = 2$, $T_2 \equiv (\alpha_1 = 3)$, le problème sera résolu si l'on sait de T_n déduire toutes les solutions T_{n+1} auxquelles T_n peut donner lieu.

Pour ce but, on écrira les $n-1$ premiers nombres et on les réunira par groupe de un, deux, trois, etc., en affectant chacun du signe $+$ ou du signe $-$, de façon que, dans chaque groupe ou *type de transformation,* la somme des nombres positifs surpasse de deux unités celle des nombres négatifs. On fera la somme σ des nombres qui sont affectés du signe $+$ dans le type choisi et la somme σ' des nombres affectés du signe $-$, et l'on posera $x = n - \frac{\sigma - \sigma'}{2}$.

Le nombre x étant ainsi défini, de la solution T_n on déduira T_{n+1}, par la règle suivante :

« On écrira, en y conservant leurs rangs respectifs et leurs valeurs numériques, tous ceux des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \ldots$ dont les indices ne figurent pas parmi ceux du type dont on fait usage, sauf celui dont l'indice est égal à x, s'il s'y rencontre. On y adjoindra, avec leurs indices respectifs $i, l, \ldots, r$, tous les nombres $\alpha_i, \alpha_l, \alpha_r, \ldots$, après avoir accru chacun d'eux d'une unité; on diminuera au contraire d'une unité chacun des nombres $\alpha_k, \alpha_t, \ldots$ dont les indices $k, t, \ldots$ figurent dans le type avec le signe —. Quant au terme α_x de rang x, on l'écrira dans T_{n+1} après l'avoir diminué d'une unité, sans préjudice de l'accroissement ou de la diminution que son signe (si le nombre x figure dans le type) commande; on accroîtra au contraire d'une unité le nombre α_{n+1} du rang $n+1$ immédiatement supérieur, sans préjudice aussi de la variation qu'il doit subir, d'après le signe dont le nombre $x+1$ est affecté dans le type, s'il y figure. La solution T_{n+1}, dérivée de T_n pour le type choisi, étant ainsi obtenue, on changera de type pour en trouver une autre, et ainsi de suite. »

Guccia. — Sur les transformations Cremona dans le plan. (866-869).

Étude, dans une correspondance birationnelle, des courbes isologiques d'un point p (centre d'isologie), c'est-à-dire des lieux des points de l'une des figures qui, joints à leurs correspondants de l'autre, donnent des droites passant par p.

Benoît. — Sur la décomposition des formes quadratiques. (869-872).

Pour qu'une forme quadratique à m variables puisse se décomposer en une somme de $m-n$ carrés, il faut et il suffit, comme on sait, que tous les mineurs d'ordre $n-1$ de son discriminant soient nuls, l'un au moins des mineurs de l'ordre n étant différent de zéro. Lorsqu'on égale à zéro tous les mineurs de l'ordre $n-1$ du discriminant, on obtient des équations qui ne sont pas toutes distinctes. M. Benoît recherche celles de ces équations dont les autres sont des conséquences.

Gilbert. — Sur la théorie de M. Helmholtz relative à la conservation de la chaleur solaire. (872-874).

La concentration de la masse M du Soleil par la gravité est une source de chaleur; de plus elle accroît la vitesse de rotation ω. De là résulte un accroissement de force vive, dont M. Helmholtz n'a pas tenu compte dans ses calculs, et par suite une partie du travail intérieur n'est pas converti en chaleur. La quantité de chaleur qu'il convient de retrancher de celle qui a été calculée par M. Helmholtz pour une diminution δR du rayon est

$$\frac{M\,\delta R}{5 \times 75}\left(\frac{3fM}{R^2} - \omega^2 R\right).$$

f étant le coefficient d'attraction. La correction est d'ailleurs insignifiante au point de vue numérique.

N° 19; 9 novembre.

De Jonquières. — Sur la dérivation des solutions dans la théorie des transformations Cremona. (921-922).

Règle pour déduire d'une solution connue d'ordre n une solution T_{n+k} d'ordre $n+k$. Cette règle, qui complète celle que M. de Jonquières a fait connaître dans sa précédente Communication pour le cas de $n=1$, conduit à l'énoncé suivant:

Deux solutions (géométriques ou non), d'ordres quelconques, peuvent toujours être dérivées *directement* l'une de l'autre.

Poincaré. — Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. (939-941).

Pour étudier les intégrales d'une équation linéaire dans le voisinage d'un point singulier, on peut toujours le supposer rejeté à l'infini; on est alors ramené à l'étude des intégrales de la forme

$$(1) \qquad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0$$

(où l'on suppose que les P sont des polynômes en x), pour les valeurs très grandes de x.

Il peut se faire que l'équation (1) admette une intégrale *normale d'ordre p*

$$e^{Q_p} x^\lambda \varphi(x),$$

Q_p étant un polynôme en x, λ une constante, $\varphi(x)$ une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x.

Si aucun des polynômes P n'est de degré plus élevé que P_n, l'équation est satisfaite *formellement* par n séries normales du premier ordre généralement divergentes. On peut alors par la transformation de Laplace mettre l'intégrale de (1) sous la forme

$$y = \int e^{zx} v \, dz,$$

v étant une fonction de z qui satisfait à une équation linéaire (2) de même forme que (1).

Pour que l'une des séries soit convergente, il faut et il suffit que l'équation (2) admette une intégrale égale à une puissance de $z-a$ multipliée par une fonction holomorphe.

Si S est une des séries normales divergentes, λ_n étant le $n^{\text{ième}}$ terme et S_n la somme des n premiers termes, l'équation (1) admettra une intégrale J, telle que

$$\lim \frac{1}{\lambda_n^n} (J - S_n) = 0,$$

quand x tend vers l'infini avec un argument donné.

Les séries normales divergentes présentent donc les mêmes particularités que la série de Stirling.

M. Poincaré montre par quelle transformation on peut ramener le cas où les n séries normales sont toutes d'ordre p au cas où elles sont toutes du premier ordre.

N° 20; 16 novembre.

Poincaré. — Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. (990-991).

Voir l'analyse précédente.

N° 21; 23 novembre.

Sylvester. — Sur une nouvelle théorie des formes algébriques. (1042-1046).

L'auteur développe une théorie analogue à celle des invariants différentiels de M. Halphen (*réciproquants purs* de M. Sylvester). Sous le nom de *réciproquants mixtes orthogonaux*, il introduit des formes, non comprises dans la définition des invariants différentiels, et qui sont essentielles pour expliquer les singularités quasi-métriques des courbes.

Bendixson. — Sur la formule d'interpolation de Lagrange. (1050-1053).

Soient $A_1, A_2, \ldots$ les valeurs d'une fonction $f(x)$ aux points $a_1, a_2, \ldots$. Si $f(x)$ est régulière au point $a = \lim_{\nu=\infty} a_\nu$, on peut poser dans le voisinage du point a

$$f(x) = A_1 + A_2^{(1)}(x-a) + A_3^{(2)}(x-a_1)(x-a_2) + \ldots,$$

où les constantes $A_{n+1}^{(n)}$ se calculent au moyen des quantités A_n par les formules

$$A_n^0 = A_n, \qquad A_\nu^{n+1} = \frac{A_\nu^{(n)} - A_{n+1}^{(n)}}{a_\nu - a_{n+1}}, \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Gilbert. — Sur le théorème de Kœnig, relatif à la force vive d'un système. (1054-1055).

Le centre de gravité n'est pas le seul point qui jouisse de la propriété énoncée par le théorème de Kœnig relatif à la décomposition de la force vive en deux parties. Dans le cas d'un corps solide, cette propriété appartient encore à tous les points de la surface d'un cylindre circulaire droit dont la génératrice est parallèle à l'axe de Mozzi (axe de rotation et de glissement) et dont la section droite a pour diamètre la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur l'axe de Mozzi.

Cette proposition était déjà connue de Cauchy et de M. O. Bonnet.

N° 23; 7 décembre.

De Saint-Venant. — Mouvement des molécules de l'onde dite solitaire propagée à la surface d'un canal. (1101-1105).

Démonstration directe des résultats obtenus par M. Boussinesq relativement à l'onde solitaire de Russel dans son Mémoire sur la théorie des eaux courantes. Coupes représentatives des surfaces liquides et des trajectoires moléculaires.

Sylvester. — Sur une nouvelle théorie des formes algébriques. (1110-1111).

Hugoniot. — Sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini. (1118-1120).

La vitesse de propagation peut s'obtenir de la manière la plus générale par la simple considération des équations différentielles de l'Hydrodynamique, sans connaître la forme des intégrales.

Soit S une surface arbitrairement tracée dans le fluide à l'instant t; d'un côté de cette surface existe un mouvement représenté par un certain système d'intégrales u_1, v_1, w_1, p_1, ρ_1 (composantes de la vitesse, pression, densité); de l'autre côté existe un autre mouvement représenté par un autre système d'intégrales u_2, v_2, w_2, p_2, ρ_2. Il y a propagation quand, à l'instant $t + dt$, le mouvement du fluide est encore représenté par le même système d'intégrales, la surface S s'étant déplacée et déformée infiniment peu de manière à occuper une position S_1. Menant au point (x, y, z) de S la normale à cette surface (cosinus directeurs λ, μ, ν) et désignant par dn la longueur de cette normale comprise entre S et S_1, la vitesse de propagation $\frac{dn}{dt}$ sera donnée par la formule

$$\frac{dn}{dt} = \lambda u + \mu v + \nu w \pm \sqrt{\frac{d\rho}{dp}}.$$

Picard. — Sur certaines fonctions hyperfuchsiennes. (1127-1128).

Les intégrales hypergéométriques à deux variables x et y

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}(u-y)^{\lambda-1}\,du$$

(où g et h désignent deux des quantités $0, 1, x, y, \infty$) satisfont à un système S de trois équations linéaires aux dérivées partielles. Le système S admet trois solutions linéairement indépendantes ω_1, ω_2, ω_3, et M. Picard indique des cas où l'inversion du rapport des deux intégrales

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u, \qquad \frac{\omega_3}{\omega_1} = v$$

conduit pour x et y à des fonctions uniformes (hyperfuchsiennes) de u et v.

D'abord, si l'on considère deux quelconques des quatre quantités λ, μ, b_1, b_2, b_3, les expressions telles que $\lambda + b_1 - 1$ devront être égales à l'inverse d'un entier positif. Si l'on envisage ensuite trois quelconques de ces mêmes quantités, les expressions telles que $2 - \lambda - \mu - b$ devront encore être égales à l'inverse d'un nombre entier positif.

Dans ces conditions x et y sont des fonctions hyperfuchsiennes de u et v définies seulement dans l'hypersphère de rayon un.

Bendixson. — Sur la formule d'interpolation de Lagrange. (1129-1131).

Dans sa précédente Communication, M. Bendixson, en étudiant la série

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_{\nu+1}^{(\nu)}(x-a_1)\ldots(x-a_\nu),$$

a supposé la fonction régulière au point $a = \lim_{\nu=\infty} a_\nu$.

Si le point a est singulier, la fonction n'est pas déterminée lorsqu'on donne ses valeurs aux points $a_1, \ldots, a_\nu, \ldots$. La série est alors divergente en général; néanmoins, dans des cas spéciaux, la convergence subsiste et donne des résultats assez intéressants.

Poincaré. — Sur les séries trigonométriques. (1131-1134).

Une fonction $F(t)$ définie par une série de la forme $\Sigma A \sin at$, convergente mais non uniformément, peut devenir, pour les valeurs suffisamment grandes de t, plus grande que toute quantité donnée.

Mais on peut se demander si elle tend vers l'infini, c'est-à-dire si, après être devenue plus grande qu'une quantité donnée, elle reste plus grande que cette quantité, ou bien si elle subit des oscillations de grandeur infiniment croissante. Dans ce dernier cas, on peut toujours assigner une valeur $t > t_0$ (si grande que soit t_0) telle que $F(t)$ ait une valeur donnée. Telle est la fonction

$$F(t) = \sin t - A \sin\frac{t}{2} + A^2 \sin\frac{t}{2^2} + \ldots + (-A)^n \sin\frac{t}{2^n} + \ldots,$$

qui, pour $1 < A < 2$, prend une infinité de fois toutes les valeurs possibles.

Liouville. — Sur les solutions communes à plusieurs équations linéaires aux dérivées partielles. (1134-1137).

Recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux équations linéaires du second ordre aient en commun trois intégrales indépendantes. Dans ce cas, on peut aisément des deux équations données en déduire une troisième admettant les mêmes solutions. Soit

$$(1)\quad \begin{cases} t + Pp + Qq + Zz = 0 = \Lambda(z), \\ s + P'p + Q'q + Z'z = 0 = \Lambda'(z), \\ r + P''p + Q''q + Z''z = 0 = \Lambda''(z). \end{cases}$$

le groupe ainsi formé. Si l'on écrit les équations

$$(2)\quad \begin{cases} t + Pp + \left(Q - \dfrac{\partial \log P}{\partial y}\right) q \\ \quad + \left[\dfrac{\partial P}{\partial x} + Z + (P' - Q)\dfrac{\partial \log P}{\partial y} + \dfrac{\partial (Q - 2P')}{\partial y}\right] z = 0 = A_1(z), \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} s + \left(P' - \dfrac{\partial \log P}{\partial y}\right) p \\ \quad + Q'q + \left(2\dfrac{\partial Q'}{\partial y} + Z' - \dfrac{\partial Q}{\partial x} - Q'\dfrac{\partial \log P}{\partial y}\right) z = 0 = A'_1(z), \end{cases}$$

et que l'on désigne par $A_1 A'(z)$ l'expression trouvée en introduisant dans le premier membre de (2) le résultat obtenu par la substitution d'une fonction *quelconque* z dans le premier membre de $A'(z) = 0$, les conditions cherchées se résument dans l'identité

$$A_1 A'(z) - A'_1 A(z) = 0.$$

Résultats analogues dans le cas où les deux équations ont quatre intégrales communes.

Kœnigs. — Sur les conditions d'holomorphisme des intégrales de l'équation itérative. (1137-1139).

Soit $\varphi(z)$ une fonction holomorphe dans le domaine d'un point limite x. La fonction

$$B(z) = \lim_{p=\infty} \frac{\varphi_p(z) - x}{[\varphi'(x)]^p}$$

est une fonction holomorphe en x, dont M. Kœnigs s'est déjà servi pour intégrer les équations d'Abel et de M. Schrœder. Il étend actuellement le rôle de la fonction $B(z)$ à l'intégration des équations fonctionnelles

$$(1)\qquad \Xi[\varphi(z)] = \varphi[\Xi(z)],$$

$$(2)\qquad \Xi_p(z) = \varphi(z),$$

$$(3)\qquad \Xi[\varphi(z)] = \psi[\Xi(z)].$$

Les solutions holomorphes de (1) dans le domaine de x se déduisent toutes de l'équation

$$B[Z(z, k)] = k\,B(z),$$

qui, dans le même domaine, définit une fonction holomorphe, prenant en x la valeur x.

Les substitutions $S(k) = |z, Z(z, k)|$ sont échangeables et elles forment un groupe. Une courbe d'égal module ou d'égal argument de la fonction $B(z)$ est transformée par la substitution $S(k)$ en une autre de même nature.

L'étude de l'équation (2) se ramène aussi à celle des fonctions $Z(z, k)$.

L'équation (3) n'est qu'une extension de l'équation (1).

N° 24; 14 décembre.

De Saint-Venant. — Mouvement des molécules de l'onde dite solitaire propagée à la surface d'un canal. (1215-1218).

Sylvester. — Sur une nouvelle théorie des formes algébriques. (1225-1229).

Hugoniot. — Sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini. (1229-1232).

Halphen. — Sur une nouvelle classe d'équations différentielles linéaires intégrables. (1238-1240).

Pour qu'une équation linéaire

$$(1)\qquad P_0\frac{d^n y}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_n y = 0$$

ait son intégrale générale de la forme

$$y = e^{ax}f(x) + e^{bx}\varphi(x) + e^{cx}\psi(x) + \ldots,$$

où $f, \varphi, \psi, \ldots$ sont des fonctions rationnelles, il faut et il suffit :

1° Que ses coefficients P soient des polynômes entiers dont le degré ne surpasse pas celui du premier P_0; 2° que son intégrale générale soit uniforme (ce que l'on saura reconnaître par la méthode de M. Fuchs).

Si l'on impose à l'équation (1) la condition d'avoir le point singulier unique $x = 0$, où les intégrales particulières doivent appartenir aux exposants 0, 1, 2, ..., $(n-2)$ et n, sa forme générale sera

$$\frac{d^n y}{dx^n} - \left(\frac{1}{x} + \alpha - A_1\right)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \left(\frac{1}{x} + A_1\alpha - A_2\right)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{A_{n-2}}{x} + A_{n-2}\alpha - A_{n-2}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{A_{n-1}}{x} + A_{n-1}\alpha\right)y = 0.$$

Elle a pour solutions les exponentielles e^{ax}, où a est racine de l'équation

$$f(a) = a^{n-1} + A_1 a^{n-2} + A_2 a^{n-3} + \ldots + A_{n-1} = 0,$$

et aussi cette solution complémentaire

$$y = e^{\alpha x}\left[x - \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right].$$

Fouret. — Sur un nouveau mode de génération des courbes algébriques unicursales. (1241-1243).

Étant donnés dans l'espace $n+1$ points affectés de masses différentes, le centre harmonique de ces $n+1$ points par rapport à un plan variable passant par une droite fixe Δ décrit une courbe unicursale du $n^{\text{ième}}$ ordre passant par les $n+1$ points. Cette courbe est gauche, à moins que les points donnés ne soient dans un même plan.

M. Fouret développe la réciproque de cette proposition, qui présente beaucoup plus d'intérêt que le théorème direct.

Lecornu. — Sur le mouvement d'un point dans un plan et sur le temps imaginaire. (1244-1246).

Trouver le mouvement d'un point dans un plan, sachant que les composantes X, Y de la force suivant deux axes rectangulaires satisfont aux relations

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x},$$

c'est-à-dire que $X + iY$ est une fonction analytique $\frac{1}{2}F'(z)$ de $x + iy = z$.

Les équations du mouvement donnent

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{2}F'(z), \qquad dt = \frac{dz}{\sqrt{F(z)+C}}.$$

La constante C caractérise le *régime*. On suppose $F(z)$ uniforme.

Lorsqu'une infinité de mobiles se meuvent suivant un régime donné, le lieu de leurs positions simultanées coupe sous un angle constant la trajectoire de chacun d'eux. Les circuits réels (fermés) renferment un nombre pair de points où la vitesse est nulle ou de points où la vitesse est infinie. Les circuits réels s'enveloppent sans se rencontrer; ils sont décrits d'un mouvement périodique, et pour un même régime la période conserve la même valeur tant que le mobile ne passe pas par un point singulier. Si un point d'équilibre est entouré de circuits réels, l'équilibre est stable et réciproquement.

Si l'on pose $\theta = t + it'$, à chaque valeur constante du temps t correspond une courbe orthogonale aux trajectoires réelles. Appelant v la vitesse, ρ le rayon de courbure de la trajectoire réelle, ρ' celui de la courbe orthogonale, on aura, grâce à l'introduction du temps imaginaire, deux expressions entièrement analogues pour les composantes de l'accélération

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{\partial v}{\partial t'}, \qquad \frac{v^2}{\rho'} = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

De Saint-Germain. — Sur certaines surfaces du troisième ordre qui ont une infinité d'ombilics. (1246-1248).

Une surface du troisième ordre peut admettre comme ombilics tous les points d'une ligne tracée sur la surface; cette ligne est ou une droite ou une parabole.

Dans le premier cas, la sphère osculatrice se confond avec le plan tangent; l'équation de la surface peut se ramener à la forme

$$y^2 + x\,F(x, y, z) = 0,$$

F étant un polynôme du second degré quelconque.

Dans le second cas, l'équation de la surface ne contient qu'un paramètre arbitraire λ

$$(2z+m)(y^2-2mz)+mx^2+\lambda x^3=0.$$

Par un des ombilics passent trois lignes de courbure proprement dites, la parabole donnée

$$x=0, \qquad y^2=2mz,$$

et deux autres paraboles appartenant aux deux systèmes de lignes de courbure qui divisent la surface en rectangles élémentaires.

N° 26; 28 décembre.

De Saint-Venant. — Mouvement des molécules de l'onde dite solitaire propagée à la surface d'un canal. (1445-1447).

Sylvester. — Sur une nouvelle théorie des formes algébriques. (1461-1464).

Callandreau. — Énergie potentielle de deux ellipsoïdes qui s'attirent. (1476-1478).

L'auteur donne pour cette énergie potentielle un développement en série qui met en évidence l'ordre de petitesse des termes successifs; le rapport d'un terme au précédent est comparable au produit du carré d'une parallaxe par une quantité de l'ordre des aplatissements des deux ellipsoïdes.

Appell. — Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce. (1478-1480).

L'auteur revient sur la décomposition en éléments simples des fonctions de troisième espèce dont il a développé la théorie dans les *Annales de l'École Normale*, 1884 et 1885.

Soient $\Phi(z)$ une fonction de troisième espèce contenant m fonctions Θ de plus au numérateur qu'au dénominateur; $a, b, \ldots, l$ les pôles supposés simples que cette fonction possède dans le parallélogramme des périodes aux sommets z_0, z_0+2K, $z_0+2K+2iK'$, z_0+2iK'; A, B, ..., Z les résidus correspondants. Si l'on pose

$$\chi_m(x,y)=\frac{\pi}{2K}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi y i}{K}} q^{mn(n-1)} \cot\frac{\pi}{2K}(x-y-2miK'),$$

on aura, pour formule de décomposition,

$$\Phi(z)=-A\chi_m(a,z)-B\chi_m(b,z)-\ldots-L\chi_m(z,l)+G(z),$$

où A, B, ..., L ne sont assujettis à aucune relation, et où $G(z)$ est une fonction linéaire homogène à coefficients constants de m fonctions entières par-

ticulières

$$G(z) = \lambda_0 g_0^{(m)}(z) + \lambda_1 g_1^{(m)}(z) + \ldots + \lambda_{m-1} g_{m-1}^{(m)}(z),$$

$$g_\nu^{(m)}(z) = e^{\frac{\nu\pi z i}{K}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi z i}{K}} q^{mn(n-1)+2n\nu}, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, m-1),$$

$$\lambda_0 = \frac{A_n + A_{-n}}{2}, \qquad \lambda_1 = A_1, \qquad \lambda_2 = A_2, \qquad \ldots, \qquad \lambda_{m-1} = A_{m-1}.$$

BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE; 53e année, 3e série, t. VII (janvier à juin 1884). Bruxelles, Hayez, 1884 (1).

Folie (*F.*), *De Tilly* et *Catalan* (*E.*). — Rapports sur un Mémoire de M. Neuberg intitulé : *Sur le tétraèdre*. (284-287).

Ce Mémoire de M. Neuberg a été publié dans les Mémoires in-8° de l'Académie.

Catalan (*E.*). — Quelques théorèmes d'Arithmétique. (448-449).

Extrait d'un Mémoire étendu publié dans les Mémoires in-4° de l'Académie.

Tome VIII, juillet à décembre 1884.

Catalan (*E.*). — Application d'un nouveau principe de probabilités. (72-74).

Ce principe est le suivant : « La probabilité d'un événement futur ne change pas lorsque les causes dont il dépend subissent des modifications inconnues. »

Ronkar (*E.*). — Sur un théorème de Mécanique applicable aux systèmes dont le mouvement est périodique. (121-134).

Van der Mensbrugghe. — Rapport sur ce Mémoire. (11-12).

Sur les variations simultanées de l'énergie potentielle moyenne et de l'énergie actuelle moyenne dans un système où l'énergie totale est constante.

---

(1) Voir *Bulletin* N°, 116.

Mansion (*P.*). — Sur la théorie des fonctions elliptiques. (180-182).

Démonstration algébrique directe du théorème de Richelot : « Toute expression imaginaire peut se mettre sous la forme $\operatorname{sn}(\alpha + \beta i)$.

Mansion (*P.*). — Sur le reste de la formule de Taylor. (183-185).

La forme du reste de Taylor, donnée par la théorie générale des fonctions d'une variable imaginaire, peut se transformer en une intégrale rectiligne, comme dans le cas où la variable est réelle, de manière que l'on puisse en déduire le développement de $(1+z)^m$, même si le module de z est égal à l'unité, chaque fois que ce développement existe.

Ronkar (*E.*). — Sur la conductibilité des corps gazeux pour la chaleur. (204-210).

Van der Mensbrugghe et *Melsens*. — Rapports sur ce Mémoire. (159-161).

Moyennant diverses hypothèses, l'auteur prouve que la conductibilité sous pression constante varie moins avec la température que ne l'indique la loi de Clausius, pourvu que le gaz soit fortement raréfié.

De Heen (*P.*). — Relations théoriques entre le coefficient de dilatation, la chaleur interne de vaporisation et les chaleurs spécifiques des corps pris à l'état liquide et à l'état de vapeur. (210-218).

Le Paige (*C.*). — Sur la génération de certaines surfaces par des faisceaux quadrilinéaires. (238-255).

Folie (*F.*). — Rapport sur ce Mémoire. (158).

Ces surfaces sont toutes celles du troisième ordre, puis des surfaces particulières du quatrième ordre.

Mansion (*P.*). — Rapport sur un Mémoire de M. C. Lagrange intitulé : *Démonstration élémentaire de la loi suprême de Wronski*. (165-172).

Résumé et simplification de la démonstration qui sera publiée dans les Mémoires couronnés de l'Académie.

Mansion (*P.*). — Rapport sur un Mémoire de M. C. Lagrange intitulé : *Développement des fonctions d'un nombre quel-*

conque de variables indépendantes à l'aide d'autres fonctions de ces mêmes variables. (317-322).

Résumé d'un travail faisant suite à celui qui est indiqué plus haut. Il sera publié avec le précédent.

Le Paige (*C.*). — Sur la forme quadrilinéaire et les surfaces du troisième ordre. (555-563).

Folie (*F.*). — Rapport sur ce Mémoire. (524).

Complément rectificatif d'un précédent travail.

MÉMOIRES couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Collection in-8°. t. XXXVI. Bruxelles, F. Hayez, 1884 (1).

De Heen (*P.*). — Physique comparée. (1-168).

Recherches sur les relations qui existent entre les propriétés physiques de corps analogues sous quelque rapport au point de vue chimique.

Sautreaux (*F.*). — Essai d'application de la Géométrie à coordonnées polygonales et polyédriques à la résolution des équations du troisième et du quatrième degré et à la démonstration d'un certain nombre de théorèmes d'Algèbre supérieure. (1-14).

Résoudre $u^3 + pu^2 + qu + r = 0$ revient à trouver l'intersection des lignes $xyz + r = 0$, $xy + yz + zx = q$, x, y, z étant des coordonnées trilinéaires telles que $x + y + z + p = 0$, ...

MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE. Bruxelles, F. Hayez. In-4° (2).

Tome XLV; 1884.

Folie (*F.*) et *Le Paige* (*C.*). — Mémoire sur les courbes du troisième ordre. Seconde Partie. (1-45).

---

(1) Voir *Bulletin*, 2e série, t. X_2, p. 131-132.
(2) Voir *Bulletin*, 2e série, X_2, 112.

Ce Mémoire est la suite de celui qui a été analysé antérieurement. La division est la même que dans le précédent Mémoire : Homographie, involution, rapport anharmonique; mais il y a de plus un Chapitre consacré aux constructions, lesquelles sont effectuées par le secours de propriétés relatives à l'involution. D'après les auteurs, leur méthode contient, comme cas particulier ou comme conséquences, les méthodes de Chasles, de Grassmann et de Schröter. Voici les derniers problèmes traités dans le Chapitre IV. Étant donnés neuf points d'une cubique, déterminer les intersections de cette courbe : 1° avec une droite Δ quelconque; 2° passant par un des neuf points; 3° passant par deux des neuf points. Étant donnés neuf points d'une cubique, construire un système de trilatères conjugués à la courbe. Construire une cubique dont on connaît neuf points.

Catalan (*E.*). — Sur l'addition des fonctions elliptiques de première espèce. (1-20).

Complément de deux Notes antérieures publiées dans les *Bulletins de l'Académie* et dans les *Comptes rendus*. I. Équation d'Euler. II. Sur l'équation $M\,dx + N\,dy = 0$. Nouvelles formes du théorème de l'addition. III. Sur le triangle sphérique de Lagrange. IV. Interprétation géométrique nouvelle de la transformation de Landen. V. Sur un quadrilatère sphérique.

Mansion (*P.*). — Sur un point de la théorie des séries de Fourier. (1-20).

Catalan (*E.*). — Rapport. (*Bulletins de l'Académie*, 1883, premier semestre, 468-475).

I. On a

$$\mathop{\mathrm{S}}_{-\infty}^{+\infty} f(x+n\pi) = \frac{1}{2}a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + \ldots,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ft\cos nt\,dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} ft\sin nt\,dt,$$

moyennant les conditions suivantes : 1° les coefficients a_n, b_n sont finis; 2° la fonction

$$\pi\lambda(\eta) = f(x+2r\pi+2r\eta) + f(x+2r\pi+2\pi-2\eta)$$

est positive et décroissante quand η varie de 0 à $\frac{1}{2}\pi$, pour toute valeur de x et de r, r étant un nombre entier, sauf si $x+2rq$ a une valeur comprise entre deux limites finies g et c. Dans l'intervalle de g à c, il suffit que fx vérifie les conditions de Dirichlet. 3° Les séries

$$\mathop{\mathrm{S}}_{r=c}^{r=\infty} \lambda(\eta), \qquad \mathop{\mathrm{S}}_{r=-\infty}^{r=g} \lambda(\eta)$$

sont continues aux environs de $\eta = 0$.

II. Les conditions précédentes sont vérifiées pour la fonction $e^{-a^2x^2}$. Par suite, on a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z+r\pi i^2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2 2} \cos 2rz,$$

formule importante dans la théorie des fonctions thêta.

Catalan (*E.*). — Notes sur la théorie des fractions continues et sur certaines séries. (1-82).

I. Théorème de Kramp. II. Fractions périodiques. III. Série de Lamé. IV. Série des inverses des réduites d'une fraction continue illimitée. V. Généralisation de la série de Lamé. VI. Fractions tournantes (la suite des quotients incomplets forme une permutation circulaire les uns des autres dans deux fractions périodiques tournantes). VII-XI, et *addition* (à la fin du Mémoire). Sur le développement de $\sqrt{A}$. XII. Quelques séries elliptiques. Complément d'un Mémoire de 1873. L'auteur fait remarquer que rien n'est plus facile que d'obtenir les nouvelles séries elliptiques de M. Faà de Bruno ou des séries plus convergentes encore.

MATHESIS, RECUEIL MATHÉMATIQUE A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE, publié par *P. Mansion*, professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg*, professeur à l'Université de Liège. Gand, Hoste; Paris, Gauthier-Villars [1].

Tome IV; 1884.

Mansion (*P.*). — Précis de la théorie des fonctions hyperboliques. (5-12, 28-37, 80-83, 101-105); publié aussi en une brochure de 32 pages. Paris, Gauthier-Villars.

Introduction. Définition du nombre *e*. Historique. I. *Propriétés fondamentales.* Définitions :

$$2\,\mathrm{Ch}\,t = e^t + e^{-t}, \qquad 2\,\mathrm{Sh}\,t = e^t - e^{-t}, \qquad \mathrm{Th}\,t\,\mathrm{Ch}\,t = \mathrm{Sh}\,t, \qquad \ldots.$$

Relations $\mathrm{Ch}^2 t - \mathrm{Sh}^2 t = 1$ et conséquences. Théorème d'addition et conséquences. Relations avec les fonctions trigonométriques et, en particulier, théorème de Laisant : $\mathrm{Th}\,\frac{1}{2}t = \tan\frac{1}{2}\theta$. Fonctions inverses. II. *Interprétation géo-*

[1] Voir *Bulletin*, t. X_2, p. 59. Ce recueil paraît en livraisons mensuelles de 24 pages, parfois avec suppléments; prix : $7^{fr},50$ pour la Belgique; 9^{fr} pour l'Union postale.

métrique, sans le secours du Calcul intégral, dans l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$. III. *Dérivées, intégrales, séries.* IV. *Applications.* Équations cubiques; théorèmes d'Apollonius dans l'hyperbole; chaînette; tractrice; pseudosphère; parabole et paraboloïde de révolution.

Barbarin. — Théorèmes sur l'ellipse. (13-16).

Catalan (*E.*). — Sur un théorème d'Abel. (25-28).

Sur la continuité d'une série ordonnée suivant les puissances de la variable.

Genocchi (*A.*). — Résumé de différentes recherches sur les ovales de Descartes et quelques autres courbes. (49-52).

Notice historique contenant le résumé d'une foule de résultats obtenus par Genocchi et d'autres géomètres.

De Rocquigny. — Questions d'arithmologie. (57-60).

Gelin (*E.*). — Questions d'Algèbre. (60-62, 165).

Mansion (*P.*). — Esquisse biographique : W. Snell. (64).

D'Ocagne (*M.*). — Sur les transformations centrales des courbes planes. (73-79, 97-100).

Étude des transformations où il existe entre les rayons vecteurs de $(n+1)$ courbes une relation de la forme

$$F(\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n) = 0,$$

$\rho, \rho_1, \ldots, \rho_n$ étant comptés sur une même direction, à partir d'un même point. Cas particuliers

$$\rho^n = \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n;$$

$$a_1\rho_1 + a_2\rho_2 + \ldots + a_n\rho_n + a\rho = 0; \qquad \frac{a_1}{\rho_1} + \frac{a_2}{\rho_2} + \cdots + \frac{a_n}{\rho_n} + \frac{a}{\rho} = 0.$$

Mister (*J.*). — Centre de gravité d'un tronc de pyramide triangulaire. (84-85).

Le centre de gravité d'un tronc de pyramide *quelconque* est situé sur la droite qui joint les centres de gravité des bases, en un point qui divise cette droite en deux segments proportionnels à $2M + b$, $2M + B$; b, B, M sont respectivement l'aire de la petite base, de la grande base, et d'une section parallèle équidistante.

Cesàro (*E.*). — Études de transversales. (85-86).

Genocchi (*A.*). — Sur un manuscrit de Fermat, récemment publié. (106-108).

Sur la descente infinie ou indéfinie de Fermat et sur divers théorèmes d'Arithmétique supérieure.

Mister (*J.*). — Centre de gravité du tronc de prisme triangulaire et du parallélépipède tronqué. (121-123).

I. Le centre de gravité du tronc de prisme triangulaire est situé sur la droite qui joint le centre des moyennes distances des milieux des arêtes parallèles au centre de gravité de ces arêtes et au quart de cette droite, à partir du premier point.

II. Le centre de gravité du tronc de parallélépipède est situé sur la droite qui joint le centre des moyennes distances des arêtes latérales au centre de gravité de ces arêtes et au tiers de cette droite à partir du premier point.

Brocard (*H.*). — Questions de licence. (124-127).

Intégration de diverses équations différentielles ou aux dérivées partielles.

Schoentyes (*H.*). — Sur un mode de génération des conchoïdes. (145-149, 237).

La conchoïde est regardée comme l'image, vue sur un cône de révolution, d'une courbe plane tracée dans son plan de base, par un observateur placé à l'infini sur l'axe du cône.

Cesàro (*E.*). — Probabilités de certains faits arithmétiques. (150-151).

Radicke (*A.*). — Sur les sommes des puissances semblables d'une suite de cosinus. (161-163).

Détermination des quantités P, Q, si

$$P = 1 + \cos^m \frac{\pi}{n} + \cos^m \frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos^m \frac{(n-1)\pi}{n},$$

$$Q = 1 - \cos^m \frac{\pi}{n} + \cos^m \frac{2\pi}{n} - \cdots + (-1)^{n-1} \cos^m \frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Mansion (*P.*). — Le deux-centième anniversaire de l'invention du Calcul différentiel. (163).

Mansion (*P.*). — Courbes avec points de dédoublement. (164).

Leibnitz et *Newton*. — Invention du Calcul différentiel. (177-189).

Traduction annotée du célèbre article publié par Leibnitz, le 30 septembre 1684, et du lemme II, du second Livre des *Principes*. Dans les Notes, le traducteur, M. P. Mansion, fait les remarques suivantes : 1° Leibnitz définit la

différentielle de y, absolument comme Cauchy, c'est-à-dire que si x est la variable indépendante $dy = y' dx$, dx étant quelconque. 2° Leibnitz se trompe en laissant des signes ambigus dans certaines différentielles. 3° Cela provient de ce qu'il n'a pas vu l'importance d'une remarque de Newton, savoir, que l'on peut désigner par une lettre une quantité positive ou négative indifféremment. 4° Leibnitz et Newton manient les infiniment petits d'une manière rigoureuse. 5° Dans les *Principes*, Newton trouve la différentielle d'un produit par un procédé qui peut paraître peu rigoureux.

Lemoine (*E.*). — Théorèmes divers sur les antiparallèles des côtés d'un triangle. (201-204, 237).

Théorèmes relatifs à la nouvelle géométrie du triangle.

Barbarin. — Problèmes sur les sphères. (217-218).

Weill. — Sur un biangle et un triangle formés par des arcs de cercle. (219).

Brocard (*H.*). — Propriété géométrique d'un certain groupe de deux systèmes de circonférences concentriques. (219-220).

Cesàro (*E.*). — Sur l'équation intrinsèque des courbes. (233-235).

La considération de l'équation $\rho = f(s)$, d'une courbe, entre le rayon de courbure ρ et l'arc s, prouve immédiatement que si cette courbe roule sur une droite, le centre de courbure décrit la courbe ayant pour équation, en coordonnées rectangulaires, $y = f(x)$.

Boije af Gennäs. — Problème d'Analyse indéterminée. (236).

Solution du problème suivant :

« Trouver quatre nombres tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté de l'unité, fasse un carré. »

Notes mathématiques. (37-38, 53-57, 166-167, 221-222, 236-237).

Bibliographie. (63, 106-108, 151-153, 168-172, 206, 224-225).

Questions résolues. (16-24, 39-48, 65-70, 86-93, 109-119, 128-142, 154-158, 173-175, 189-199, 204-215, 225-231, 238-246).

Questions proposées. (24, 48, 71, 94-95, 119-120, 142-143, 159, 175-176, 199-200, 215-216, 223, 231-232, 246-248).

QUESTIONS D'EXAMEN. (72, 95-96, 144, 160, 176, 200, 232, 248-249).

RECTIFICATIONS. (95, 119, 159, 215, 231, 236, 237).

TABLE DES MATIÈRES. (250-255); des auteurs. (256).

Suppléments.

Brocard (*H.*). — Nouvelles propriétés du triangle. (11 pages et 1 planche).

Extrait du *Recueil de l'Association française pour l'avancement des Sciences,* congrès de Rouen, 1883.

Jamet (*V.*). — Généralisation d'une propriété des surfaces du second ordre. (1-12).

Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique,* 1883, 3e série, t. VI.

Neuberg (*J.*). — Sur une suite de moyennes. (1-12).

Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège,* 2e série, t. XI.

Mansion (*P.*). — Sur l'approximation des intégrales définies et, en particulier, du périmètre de l'ellipse. (1-18).

Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* t. VIII, et des *Comptes rendus* de Paris, t. LXXXV.

Gilbert (*Ph.*). — Démonstration simplifiée des formules de Fourier. (1-15).

Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* t. VIII.

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES. — Bruxelles, F. Hayez. In-8° (1).

Tome VIII, 1883-1884.

Gilbert (*Ph.*). — Sur les accélérations de différents ordres. (A, 53-56).

Extension aux mouvements d'un solide libre des théorèmes concernant un solide fixé par un point. Démonstration d'une formule sur la composition des accélérations d'ordre quelconque dans les mouvements relatifs, équivalente à celle de Somoff et M. Lévy, mais plus simple.

Gilbert (*Ph.*). — Démonstration simplifiée des formules de Fourier. (B, 1-10).

Mansion (*P.*). — Rapport. (A, 49-51).

Les théorèmes fondamentaux, dans le mode d'exposition de M. Gilbert, sont les suivants :

« I. Si la fonction $f(t)$ ne peut croître au-dessus d'une valeur donnée dans un intervalle donné (a, b) et si elle est intégrable dans cet intervalle, on aura, pour des valeurs indéfiniment croissantes de k,

$$\lim \int_a^b f(t) \sin kt \, dt = 0. \tag{1}$$

» II. Si $F(t)$ vérifie les mêmes conditions et de plus ne s'annule pas entre a et b,

$$\lim \int_a^b \frac{f(t)}{F(t)} \sin kt \, dt = 0. \tag{2}$$

» Le mode de démonstration du théorème I est tel que l'on peut remplacer dans (1) $\sin kt$ par une fonction périodique de kt, par $\sin \operatorname{am} kt$, par exemple. Pour déduire des théorèmes (1), (2) les limites fondamentales relatives aux séries de Fourier, l'auteur les applique à une fonction $f(t)$ vérifiant les conditions de Dirichlet et alors il n'a plus qu'à étudier des intégrales de la forme (1) ou (2), où l'on a

$$a = -\varepsilon, \qquad b = +\varepsilon, \qquad k\varepsilon^2 = 1.$$

ε étant aussi petit qu'on le veut.

Mansion (*P.*). — Sur l'approximation des intégrales définies et, en particulier, du périmètre de l'ellipse. (B, 11-24).

(1) Voir *Bulletin*, IX, p. 104. A signifie *première Partie*; B, *seconde Partie*.

Le Paige (*C.*). — Rapport. (A, 51-52).

I. *Historique.* — Théorème spécial de Jean Bernoulli sur la valeur approchée de l'arc d'ellipse. Théorème de Prouhet sur l'approximation des longueurs des lignes courbes.

II. Soit donné un trapèze mixtiligne ABCD, limité par la base BC, les ordonnées perpendiculaires AB, CD, et la courbe AMD dont le point M se projette au milieu m de BC. Replions le demi-trapèze curviligne MmCD, autour de Mm, de manière à le faire tomber sur l'autre demi-trapèze curviligne MmBA, en MmBδ. L'aire ABCD sera égale au double de l'aire d'un trapèze en MmBα, obtenu en construisant la courbe αM ayant pour ordonnée la demi-somme des ordonnées de la courbe AM et de la courbe αM.

En appliquant r fois la transformation précédente, on parvient à prouver que l'aire considérée est comprise entre les expressions

$$\frac{b}{n}\left(\frac{1}{2}y_0+y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2}+\frac{1}{2}y_{2n}\right),\quad \frac{b}{n}(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1}),$$

b étant la base BC du trapèze primitive, $2n$ étant égal à 2^r, $y_0, y_1, \ldots, y_{2n}$ étant $(2n+1)$ ordonnées équidistantes. On suppose que la $r^{\text{ième}}$ transformée de AD a toutes ses ordonnées comprises entre la première et la dernière.

III. Application à la seconde intégrale elliptique (théorème de Bernoulli) et à la première (théorème nouveau analogue).

Delsaux (*J.*). — Sur la théorie des sons-résultants. (B, 25-44).

Gilbert (*Ph.*). — Rapport. (A, 52-53).

Helmholtz a donné une théorie analytique de la théorie des sons-résultants où quelques faits accessoires ne sont pas suffisamment expliqués. L'auteur, en se servant d'un principe dû à Verdet, parvient à modifier la théorie de Helmholtz de manière à retrouver dans les formules les faits négligés par le savant physicien allemand.

De Salvert. — Note sur la théorie de la surface indicatrice des courbures. (B, 67-86).

Pour étudier la courbure d'une surface donnée $\varphi(x, y, z) = 0$, en un quelconque de ses points $M(x, y, z)$, construisons avec des axes X, Y, Z, parallèles aux x, y, z, et ayant ce point M pour origine la surface du second ordre $F(X, Y, Z) = G$. $F(X, Y, Z)$ étant la forme quadratique

$$F(X, Y, Z) = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY,$$

où

$$A = \frac{1}{2}\frac{d^2\varphi}{dx^2},\qquad A' = \frac{1}{2}\frac{d^2\varphi}{dy^2},\qquad A'' = \frac{1}{2}\frac{d^2\varphi}{dz^2},$$

$$B = \frac{d^2\varphi}{dy\,dz},\qquad B' = \frac{d^2\varphi}{dz\,dx},\qquad B'' = \frac{d^2\varphi}{dx\,dy},$$

et

$$G = -\frac{\Delta}{\Delta'}, \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} A & B' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix},$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & \frac{1}{2}u \\ B'' & A' & B & \frac{1}{2}v \\ B' & B & A'' & \frac{1}{2}w \\ \frac{1}{2}u & \frac{1}{2}v & \frac{1}{2}w & 0 \end{vmatrix}; \qquad u = \frac{dz}{dx}, \qquad v = \frac{dz}{dy}, \qquad w = \frac{dz}{dz}.$$

Considérons les deux points M′, M″, extrémités du diamètre de la surface F, conjugué au plan tangent à la surface φ en M, et, en particulier, celui de ces points M′, par exemple, où F a sa convexité tournée comme celle de φ en M. Les rayons de courbure des deux surfaces φ et F relatifs aux points M et M′ sont égaux, parallèles et de même sens, pour une direction de sections normales quelconques. Par conséquent, la surface F offrira en M′ exactement la même disposition au point de vue de la courbure que la surface proposée φ au point considéré M. Ce mode de représentation ne sera en défaut que pour les points où l'on aura $\Delta' = 0$, sans que $\Delta_0 = 0$. L'ensemble de ces points exceptionnels, pour une surface réglée, comprendra la *ligne de striction* de la surface.

L'auteur arrive aux résultats précédents, en prouvant d'abord la proportionnalité des rayons de courbure de φ en M et de F en M′, quelle que soit la grandeur de G; puis il montre que, si $G\Delta' + \Delta_0 = 0$, la proportionnalité se change en égalité; enfin l'étude de la forme adjointe Δ_0 lui permet d'établir que la surface F est réelle et ne se réduit pas à un point. Des propriétés de la surface F on déduit immédiatement celle de la courbure en M à la surface φ et réciproquement. La courbe indicatrice de Dupin est l'intersection de F par le plan tangent à φ en M.

Le Paige (*C.*). — Sur quelques questions relatives aux quartiques planes. (B, 87-96).

Carnoy (*J.*). — Rapport. (A, 62-63).

Développement de deux Notes publiées dans les *Comptes rendus* de Paris du 4 et du 11 février 1884 (t. XCVIII, p. 285-354). L'auteur résout successivement les questions suivantes : 1° Deux quaternes de points donnés sur une cubique gauche définissent une involution quartique de premier rang; compléter un troisième quaterne dont on donne un point. 2° Trois quaternes de points définissent une involution quartique de second rang; compléter un quatrième quaterne dont on donne deux points. 3° Quatre quaternes définissent une involution quartique de troisième rang; compléter un quaterne dont on donne trois points. 4° Construire une quartique passant par quatorze points; trouver la polaire d'un point quelconque, sans construire la courbe.

De Sparre. — Sur la réduction aux fonctions elliptiques de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}}$. (B, 97-120).

Gilbert (*Ph.*). — Rapport. (A, 64-65).

Simplification de la méthode de Richelot. Voici la remarque sur laquelle est fondée la méthode de réduction. Considérons l'intégrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(\gamma-z)(z-\beta)(z-\alpha)}},$$

où α, β, γ sont réels. De plus, $\gamma > z > \beta > \alpha$. En posant $z = \gamma \operatorname{cn}^2 u + \beta \operatorname{sn}^2 u$, la réduction à la forme normale est immédiate. On ramène aisément à ces cas celui où le radical porte sur une expression du quatrième degré, pourvu que la variable soit comprise entre les deux racines médianes de ce radical égalé à zéro, puis dans tous les cas où ces racines sont réelles.

Stoffaes. — Sur la tendance au parallélisme des axes de rotation. (B, 121-186).

De Salvert. — Rapport. (A, 57-62).

Foucault énonce ainsi le principe qui l'a guidé dans ses recherches sur l'orientation et sur l'inclinaison des corps tournants : Quand un corps tourne autour d'un axe principal et qu'une force ou un système de forces tend à produire une rotation nouvelle non parallèle à la première, l'effet résultant est un déplacement de l'axe de rotation primitive, qui se dirige vers l'axe nouveau par le chemin favorable au parallélisme des deux rotations. Le Mémoire de M. Stoffaes est consacré à la démonstration de ce principe. Dans le premier Chapitre, il transforme les équations d'Euler relatives à la rotation des corps, en un système d'équations linéaires à coefficients constants et en déduit la démonstration du principe du parallélisme dans le cas de la toupie. Dans le second, il ne part pas des équations d'Euler, mais arrive directement au principe du parallélisme dont il établit l'exactitude approximative, c'est-à-dire, en supposant négligeables, dans les calculs, les termes qui correspondent à la notation.

Turquan (*L.-V.*). — Sur l'intégration de quelques classes d'équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. (B, 314-318).

Application des principes exposés t. VI, IIe Partie, p. 429 des *Annales de la Société scientifique* (1883). Les cas considérés sont les suivants :

1° $$f(r, s, t) = 0;$$

2° $$rt = s^2;$$

3° $$\begin{cases} f(x, r, s, t) = 0, \\ f(y, r, s, t) = \varphi(y, s, t) = 0, \\ r\varphi_x - s\psi_x + t\chi_y = mp + nq, \\ r\varphi_y - s\psi_y + t\chi_y = mp + nq, \end{cases}$$

m et n étant des constantes;

4° $$f(p, r, s, t) = 0,$$

f étant une fonction algébrique homogène en r, s, t;

5° $$f(q, r, t) + \varphi(p, s, t),$$

f, φ étant des polynômes algébriques homogènes de même degré, le premier en r et s, le second en s et t.

Baule (*A.*). — Note sur un théorème de Mécanique dû à sir W. Thomson. Application à l'étude de la houle. (B, 319-344).

I. L'énergie actuelle qu'acquiert, à partir du repos, un système matériel quelconque, sous l'action d'une impulsion donnée en grandeur et en direction, est plus grande que celle de tout autre mouvement auquel on pourrait astreindre le système, en l'assujettissant à de nouvelles liaisons compatibles avec ses liaisons naturelles.

II. Si certains points d'un système matériel sont astreints à prendre impulsivement et à partir du repos des vitesses telles qu'une composante spécifiée de celles-ci ait une valeur déterminée et si les autres points ne sont mis en mouvement qu'en vertu de leurs liaisons avec les premiers, l'énergie actuelle du mouvement naturel sera plus petite que celle de tout autre mouvement possible, dans lequel les mêmes points auraient les mêmes vitesses composantes spécifiées.

Application de ce second théorème à l'étude de la houle.

SITZUNGSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN ([1]).

T. II, 1883. 1er semestre.

Lipschitz. — Recherches sur la détermination de surfaces jouissant de certaines propriétés concernant leurs courbures. Deuxième Mémoire. (169-188).

Ce travail fait suite à celui qui a paru dans les *Sitzungsberichte* de 1882, p. 1077 (voir *Bulletin*, XI$_2$, 112). L'auteur y applique au cas de l'espace ordinaire les formules auxquelles il était parvenu pour un espace à n dimensions.

Considérons une surface quelconque : soient x, y, z les coordonnées d'un

([1]) Voir *Bulletin*, t. IX$_2$, 231.

point quelconque M de cette surface; désignons par

$$\xi = \cos\theta,$$
$$\eta = \sin\theta\cos\varphi,$$
$$\zeta = \sin\theta\sin\varphi$$

les coordonnées du point correspondant de la sphère de Gauss, par A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 les cosinus directeurs des tangentes aux lignes de courbure qui passent par le point M, par σ l'angle que fait la tangente à la première ligne de courbure avec la projection de l'axe des x sur le plan tangent en x, y, z, par ρ_1, ρ_2 les deux rayons de courbure principaux en ce point; les quantités $x, y, z, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, \sigma$ peuvent être regardées comme des fonctions de θ, φ et l'on obtient alors le groupe de formules

$$A_1 + iA_2 = -e^{-i\sigma}\cos\theta,$$
$$B_1 + iB_2 = e^{i\sigma}(\cos\theta\cos\varphi - i\sin\varphi),$$
$$C_1 + iC_2 = e^{i\sigma}(\cos\theta\sin\varphi + i\cos\varphi),$$
$$dx = \rho_1 A_1(A_1\,d\xi + B_1\,d\eta + C_1\,d\zeta) + \rho_2 A_2(A_2\,d\xi + B_2\,d\eta + C_2\,d\zeta),$$
$$dy = \rho_1 B_1(A_1\,d\xi + B_1\,d\eta + C_1\,d\zeta) + \rho_2 B_2(A_2\,d\xi + B_3\,d\eta + C_2\,d\zeta),$$
$$dz = \rho_1 C_1(A_1\,d\xi + B_1\,d\eta + C_1\,d\zeta) + \rho_2 C_2(A_2\,d\xi + B_2\,d\eta + C_2\,d\zeta),$$

qui, en vertu des relations précédentes, peuvent s'écrire

$$dx = \rho_1 A_1(\cos\sigma\,d\theta - \sin\sigma\sin\theta\,d\varphi) + \rho_2 A_2(\sin\sigma\,d\theta + \cos\sigma\sin\theta\,d\varphi),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

sur lesquelles apparaissent immédiatement les équations différentielles des lignes de courbure, et tout ce qui concerne le mouvement du trièdre trirectangle formé par la normale et les tangentes aux lignes de courbure. Ces dernières équations peuvent être regardées comme un système d'équations aux différentielles totales; pour qu'il existe une surface telle que ρ_1, ρ_2, σ soient des fonctions données de θ, φ, il faut que les conditions d'intégrabilité soient vérifiées; ces conditions, d'après la théorie générale, doivent se réduire à deux, et l'on peut les condenser dans la formule unique

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(M - Pi) + i(M - Pi)\cos\theta = i\frac{\partial}{\partial\theta}[(N + Pi)\sin\theta],$$

où l'on a posé

$$M = \rho_1 + \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)\cos 2\sigma,$$
$$N = \rho_1 + \rho_2 - (\rho_1 - \rho_2)\cos 2\sigma,$$
$$P = (\rho_1 - \rho_2)\sin 2\sigma,$$

et l'on peut alors écrire les équations différentielles sous la forme

$$2\,dx = -M\sin\theta\,d\theta + P\sin^2\theta\,d\varphi,$$
$$2\,dy = (M\cos\theta\cos\varphi + P\sin\varphi)\,d\theta + (-N\sin\varphi - P\cos\theta\cos\varphi)\sin\theta\,d\varphi,$$
$$2\,dz = (M\cos\theta\sin\varphi - P\cos\varphi)\,d\theta + (\quad N\cos\varphi - P\cos\theta\sin\varphi)\sin\theta\,d\varphi.$$

Les conditions d'intégrabilité sont linéaires en M, N, P; cette remarque essentielle conduit M. Lipschitz à la définition d'un mode de *composition* de surfaces.

Considérons des surfaces non développables $F^{(\gamma)}$ en nombre quelconque, et sur ces surfaces les points $x^{(\gamma)}$, $y^{(\gamma)}$, $z^{(\gamma)}$ qui correspondent à un même point θ, φ de la sphère de Gauss; affectons chacun de ces points d'un coefficient numérique $m^{(\gamma)}$, et conservons toutes les notations précédentes en donnant aux diverses quantités qui y figurent l'indice supérieur γ; soient enfin

$$\Sigma m^{(\gamma)} (\rho_1^{(\gamma)} + \rho_2^{(\gamma)}) = P_1 + P_2,$$
$$\Sigma m^{(\gamma)} (\rho_1^{(\gamma)} - \rho_2^{(\gamma)}) \cos 2\sigma^{(\gamma)} = (P_1 - P_2) \cos 2T,$$
$$\Sigma m^{(\gamma)} (\rho_1^{(\gamma)} - \rho_2^{(\gamma)}) \sin 2\sigma^{(\gamma)} = (P_1 - P_2) \sin 2T;$$

les conditions d'intégrabilité, en vertu de la remarque précédente, se trouvent vérifiées pour la surface dont les rayons de courbure principaux P_1, P_2, et l'angle T qui définit (comme plus haut σ) la direction de la tangente à l'une des lignes de courbure, seraient des fonctions de θ, φ définies par les équations précédentes; les coordonnées X, Y, Z du point de cette surface qui correspond au système de valeurs θ, φ sont données par les formules

$$X = \Sigma m^{(\gamma)} x^{(\gamma)},$$
$$Y = \Sigma m^{(\gamma)} y^{(\gamma)},$$
$$Z = \Sigma m^{(\gamma)} z^{(\gamma)};$$

et la normale en ce point à la surface est, comme les normales aux points correspondants des surfaces $F^{(\gamma)}$, parallèle au rayon de la sphère de Gauss qui aboutit au point θ, φ. Les surfaces parallèles à une surface donnée peuvent être obtenues par ce mode de composition qui s'applique d'ailleurs aux *lignes* comme aux surfaces, pourvu toutefois que ces lignes ne contiennent pas de portion rectiligne : il suffit de supposer, dans les formules précédentes, que les rayons de courbure $\rho_2^{(\gamma)}$ soient nuls.

Le dernier paragraphe est consacré à quelques applications. L'auteur s'occupe d'abord des surfaces minima et retrouve la proposition qui a servi de point de départ à M. Weierstrass dans son Mémoire sur ces surfaces (*Monatsberichte*, 1866). Il termine en montrant comment on peut chercher à déterminer une surface en connaissant ρ_1, ρ_2 en fonction de θ, φ. Si l'on élimine σ entre les conditions d'intégrabilité, on obtient une équation qui doit être vérifiée par les valeurs données de ρ_1, ρ_2; on retrouve ainsi, par exemple, cette proposition, démontrée géométriquement par M. Bertrand : il n'existe pas de surface pour laquelle les rayons de courbure principaux soient constants et inégaux.

Weierstrass. — Sur la théorie des fonctions elliptiques. (193-203).

Le dernier Mémoire du premier Volume des *Œuvres complètes de Jacobi*, dont Borchardt avait commencé la publication, contient un exposé de la théorie des fonctions elliptiques déduite des propriétés des séries ϑ. Il a été rédigé par Borchardt d'après un Cours professé par Jacobi.

M. Weierstrass, dans une Note publiée à la fin du Volume, fait observer que le Cours de Jacobi contient une lacune. Borchardt ne se croyait pas en droit de signaler dans son travail la manière dont on peut la combler. M. Weierstrass entreprend de le faire dans la Note que nous analysons ici.

Voici d'abord en quoi consiste cette lacune. On définit, dans le Cours de Jacobi, les fonctions sinam, cosam, Δam par les séries $\mathfrak{Z}$, en posant

$$\sqrt{k} = \frac{\mathfrak{Z}_2(0, q)}{\mathfrak{Z}_3(0, q)}, \qquad \sqrt[4]{1-k^2} = \frac{\mathfrak{Z}(0, q)}{\mathfrak{Z}_3(0, q)}, \qquad x = \frac{u}{\mathfrak{Z}_3^2(0, q)},$$

puis

$$\sqrt{k}\,\mathrm{sinam}(u, k) = \frac{\mathfrak{Z}_1(x, q)}{\mathfrak{Z}(x, q)},$$

$$\frac{\sqrt{k}}{\sqrt[4]{1-k^2}}\,\mathrm{cosam}(u, k) = \frac{\mathfrak{Z}_2(x, q)}{\mathfrak{Z}(x, q)},$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-k^2}}\,\Delta\mathrm{am}(u, k) = \frac{\mathfrak{Z}_3(x, q)}{\mathfrak{Z}(x, q)}.$$

Pour que ces égalités définissent les fonctions sinam, cosam, Δam, il faut évidemment pouvoir trouver, *pour toute valeur donnée de k*, une valeur de q vérifiant la relation

$$\sqrt{k} = \frac{\mathfrak{Z}_2(0, q)}{\mathfrak{Z}_3(0, q)}.$$

Jacobi a résolu ce problème, mais seulement pour des valeurs *réelles* de k comprises entre 0 et 1. De là une lacune, non seulement dans la théorie générale des fonctions elliptiques exposée en prenant les séries $\mathfrak{Z}$ comme point de départ, mais aussi dans certaines applications de cette théorie où l'on ne peut pas ramener le problème au cas où le module k est *réel* et compris entre 0 et 1.

Voilà maintenant la suite des propositions établies par M. Weierstrass pour combler cette lacune. Ces propositions sont démontrées en s'appuyant principalement sur une transformation du quatrième ordre donnée par Jacobi dans son Cours. La lacune est ainsi comblée sans procédés étrangers à l'esprit même de la méthode de Jacobi.

Soit d'abord q réel et $0 \leqq q < 1$.

La fonction $\frac{\mathfrak{Z}_2(0, q)}{\mathfrak{Z}_3(0, q)}$ est une fonction continue de q qui s'annule pour $q = 0$ et est comprise entre 0 et 1 pour toute autre valeur de q.

Si q varie d'une façon continue, toujours croissante, depuis 0 et tend vers la limite 1, la fonction

$$\frac{\mathfrak{Z}_2(0, q)}{\mathfrak{Z}_3(0, q)}$$

croît également et tend vers la même limite 1.

Nous désignerons par le symbole $\mathfrak{P}$ une série entière. Soit

$$\mathfrak{P}(q) = 16q + \ldots$$

le développement de

$$t = \frac{\mathfrak{Z}_2^4(0, q)}{\mathfrak{Z}_3^4(0, q)},$$

on sait que l'on peut toujours déterminer une suite de nombres rationnels $\alpha_0 = \frac{1}{16}$, α_1, α_2, ..., tels que, pour des valeurs suffisamment petites de q, on

déduise de l'égalité

$$t = \mathfrak{P}(q) = 16q + \ldots$$

cette autre égalité

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^{n-1},$$

donc aussi

$$\log(16q) = \log t + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n,$$

où $\beta_1, \beta_2, \ldots$ sont des nombres rationnels. Soit q_0 une quantité positive plus petite que l'unité, située dans le domaine de convergence de $\mathfrak{P}(q)$ et telle que la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left[\frac{\vartheta_2(0, q_0)}{\vartheta_3(0, q_0)}\right]^4$$

ait une valeur finie. En limitant q par l'inégalité

$$0 < q \leqq q_0,$$

et en faisant usage des formules de transformation du quatrième ordre données par Jacobi, on déduit de la dernière égalité la relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n = \log\left[\frac{8}{t}\,\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right] + \frac{1}{4}\sum_{n=1} \beta_n \left[\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right]^{4n}.$$

Cette relation a lieu, non seulement en considérant q comme une variable indépendante et t comme fonction de q, mais aussi si l'on considère t comme variable indépendante et que l'on fasse varier t de 0 à $t_0 = \left[\frac{\vartheta_2(0, q_0)}{\vartheta_3(0, q_0)}\right]^4$.

En se fondant sur les développements des deux termes du second membre de l'égalité précédente, suivant les puissances de t considérée comme variable indépendante, M. Weierstrass démontre que *tous les coefficients* β_n *de la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n$$

sont des nombres rationnels positifs, que l'on peut calculer à l'aide de développements en séries et de formules récurrentes, puis que la série elle-même $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n$ *converge uniformément pour toute valeur de* t, *réelle ou imaginaire, dont le module n'est pas plus grand que l'unité*. On a, en particulier

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \log 16.$$

Posons maintenant

$$\psi(t) = \frac{t}{16} e^{\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n}.$$

Il vient alors immédiatement

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^{n+1},$$

où les quantités α_n sont les mêmes que tout à l'heure; et le module de la série ainsi définie est plus petit que l'unité pour toute valeur de t dont le module n'est pas plus grand que l'unité, à l'exception de la valeur $t = 1$ pour laquelle on a

$$\psi(1) = 1.$$

Ainsi, d'une part, lorsque l'on pose

$$t = \left[\frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}\right]^4,$$

on a

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^{n+1} = \psi(t)$$

pour toute valeur réelle de q comprise entre o et q_0; en se reportant à la définition des séries ϑ, on a donc, pour ces valeurs de q, l'égalité

$$t[1 + 2\psi(t) + 2\psi^4(t) + \ldots]^4 = 16\,\psi(t)[1 + \psi^2(t) + \psi^4(t) + \ldots]^4.$$

D'autre part, si l'on considère t comme une variable indépendante quelconque dont le module n'est pas plus grand que l'unité, on a toujours

$$\operatorname{mod}\psi(t) < 1,$$

à l'exception de l'unique valeur $t = 1$; donc les deux membres de la dernière égalité sont des fonctions analytiques univoques et continues de t dans le domaine de t considéré. Mais alors, d'après un théorème connu, cette dernière égalité est vérifiée pour toutes les valeurs de t considérées. D'ailleurs $\vartheta_3(0, q)$ ne s'annule pas pour une valeur imaginaire de q. Donc *la série*

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^{n+1}$$

vérifie l'égalité

$$t = \left[\frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}\right]^4,$$

si t est une quantité quelconque, réelle ou imaginaire, dont le module est plus petit ou égal à l'unité, $t = 1$ exceptée.

Voici d'ailleurs comment on calculera les nombres α_n. Soit

$$\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{4}} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\varepsilon_\nu t^\nu$$

le développement en série entière de l'expression $\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{4}}$; ce développement définit et permet de calculer les nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$. Soient ensuite des nombres ε_m définis pour une quantité m quelconque par la for

mule récurrente

$$\varepsilon_{m,0} = \left(\frac{1}{8}\right)^m; \qquad \nu\varepsilon_{m,\nu} = m\sum_{\mu=1}^{\nu} \mu\varepsilon_\mu \varepsilon_{m,\nu-\mu}; \qquad (\nu > 0).$$

On a alors

$$\beta_1 = \varepsilon_1, \qquad \beta_2 = \varepsilon_2, \qquad \beta_3 = \varepsilon_3, \qquad \beta_{4r+\rho} = \varepsilon_{4r+\rho} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{r} \varepsilon_{4n,4r-4n+\rho}\beta_n,$$

$$\left(\begin{array}{l} r = 1, 2, \ldots, \infty \\ \rho = 0, 1, 2, 3 \end{array}\right),$$

et les nombres α_n sont ensuite faciles à calculer.

En substituant, dans le théorème précédent, k^2 à t, on peut énoncer le résultat suivant :

« Si le module k des fonctions elliptiques a un module plus petit que l'unité ou égal à l'unité, les deux valeurs $k = \pm 1$ exceptées, on peut écrire les formules citées qui dans le Cours de Jacobi définissent les fonctions sin am, cos am, Δ am, en prenant pour q

$$q = \sum_{n=0} \alpha_n k^{2n+2}. \text{ »}$$

On sait d'ailleurs que les fonctions elliptiques à module k quelconque peuvent être ramenées à des fonctions elliptiques dont le module vérifie les conditions précédentes. La lacune du Cours de Jacobi est ainsi comblée.

Weierstrass. — Sur la théorie des fonctions elliptiques. (Second Mémoire). (193-203).

Soit t une quantité imaginaire quelconque ou une quantité réelle qui ne soit pas comprise dans l'intervalle de $+1$ à $+\infty$. Posons, pour abréger,

$$u = \frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}},$$

les racines quatrièmes étant extraites de manière que le module de u soit plus petit que l'unité, ce qui est toujours possible.

L'équation

$$\vartheta_2^4(0, q) = t\,\vartheta_3^4(0, q)$$

est alors vérifiée si l'on prend pour q la fonction de t, que nous désignerons par $\psi(t)$,

$$q = \psi(t) = u\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n u^{4n},$$

où les nombres γ_n sont définis par la relation

$$e^{\frac{1}{4}\log 16 + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^n,$$

à l'aide des nombres β_n du Mémoire précédent.

C'est à la démonstration de ce théorème qu'est consacrée la première Partie du second Mémoire de M. Weierstrass sur les fonctions elliptiques. Dans la seconde Partie, M. Weierstrass aborde le problème suivant :

Pour une valeur donnée de t, trouver *toutes* les valeurs de q vérifiant l'équation

$$\vartheta_2^4(0, q) = t\vartheta_3^4(0, q).$$

Après avoir montré comment on trouve les valeurs de l'argument u pour lesquelles chacune des fonctions ϑ correspondant à une valeur donnée de q s'annule, il parvient au résultat suivant.

Il ne saurait y avoir d'autres valeurs de q répondant à la question que celles qui sont comprises dans la formule

$$q = e^{\frac{2\gamma\pi i + (2\delta+1)\log\psi(t)}{(2\alpha+1)\pi i + 2\beta\log\psi(t)}},$$

où α, β, γ, δ sont des nombres entiers liés par la relation

$$(2\alpha+1)(2\delta+1) - 4\beta\gamma = 1.$$

Kronecker. — Sur la théorie des fonctions elliptiques. (497-506).

Ce sont des développements de formules concernant les fonctions ϑ, donnés par M. Kronecker pour préparer à une suite de Communications qu'il se propose de faire successivement. Ces Communications auront pour objet des résultats auxquels il est parvenu d'une part dans ses recherches sur les invariants envisagés dans toute leur généralité, et d'autre part dans ses recherches sur la théorie des fonctions elliptiques à modules singuliers.

Nommons *équivalents* deux systèmes

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) \quad \text{et} \quad (\sigma', \tau', a'_0, b'_0, c'_0),$$

dont les éléments sont liés par les relations

$$\begin{aligned}
\sigma' &= \alpha\sigma + \alpha'\tau + \alpha'', \\
\tau' &= \beta\sigma + \beta'\tau + \beta'', \\
a'_0 &= a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2, \\
b'_0 &= 2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2c_0\alpha'\beta', \\
c'_0 &= a_0\beta^2 + b_0\beta\beta' + c_0\beta'^2,
\end{aligned}$$

dans lesquelles α, α', α'', β, β', β'' désignent des *nombres entiers,* tels que $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ soit égal à $+1$.

Désignons, d'autre part, par

$$\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)$$

la fonction

$$(4\pi^2)^{\frac{1}{3}} e^{\tau^2 w_1 + w_2 \pi i} \frac{\vartheta(\sigma + \tau w_1, w_1)\,\vartheta(\sigma - \tau w_2, w_2)}{|\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)|^{\frac{1}{3}}},$$

que l'on peut aussi mettre sous la forme

$$e^{\left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right)(w_1 + w_2)\pi i} \prod |1 - e^{-2\pi i w_1} - e^{2\pi i w_2} - e^{2\pi i \sigma}|.$$

où le produit est étendu aux valeurs de α,

$$\alpha = 1, 2;$$

aux valeurs de ε,

$$\varepsilon = +1, -1;$$

aux valeurs de n,

$$n = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{pour} \quad \varepsilon = +1;$$
$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots \quad \text{pour} \quad \varepsilon = -1,$$

et où la quantité $\pm \varepsilon\sigma$ est $+\varepsilon\sigma$ pour $\alpha = 1$ et $-\varepsilon\sigma$ pour $\alpha = 2$.

M. Kronecker démontre que, si w_1 et $-w_2$ sont les deux racines de l'équation

$$a_0 + b_0 w + c_0 w^2 = 0,$$

et si w'_1, $-w'_2$ sont les deux racines de l'équation

$$a'_0 + b'_0 w' + c'_0 w'^2 = 0,$$

où les coefficients sont liés par les relations $4a_0c_0 - b_0^2 = 1$, $4a'_0c'_0 - b'^2_0 = 1$, on a

$$\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \Lambda(\sigma', \tau', w'_1, w'_2).$$

A l'équivalence arithmétique des deux systèmes

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) \quad \textit{et} \quad (\sigma', \tau', a'_0, b'_0, c'_0),$$

où $4a_0c_0 - b_0^2 = 1$, $4a'_0c'_0 - b'^2_0 = 1$, *correspond donc un invariant analytique*

$$\Lambda\left(\sigma, \tau, \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \frac{b_0 + i}{2c_0}\right),$$

c'est-à-dire une fonction qui ne varie pas lorsqu'on y remplace les éléments σ, τ, b_0, c_0 par les éléments du système équivalent σ', τ', b'_0, c'_0.

M. Kronecker se propose ensuite de transformer l'expression analytique qui définit la fonction Λ, de manière que sous sa nouvelle forme cette propriété d'être un invariant soit bien mise en évidence.

Fuchs. — Sur les fonctions d'un nombre arbitraire de variables, qui s'obtiennent par l'inversion des intégrales d'un nombre égal de fonctions données. (507-516).

Dans les Mémoires de Göttingue (1881) et dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (1881), M. Fuchs a cherché sous quelles conditions les deux équations

$$\int_{\delta_1}^{z_1} f_1(z_1)\,dz_1 + \int_{\delta_2}^{z_2} f_1(z_2)\,dz_2 = u_1,$$
$$\int_{\delta_1}^{z_1} f_2(z_1)\,dz_1 + \int_{\delta_2}^{z_2} f_2(z_2)\,dz_2 = u_2$$

étaient résolubles d'une façon univoque. Le Mémoire actuel contient une généralisation de ce problème.

1. Soient $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ des fonctions telles que toute fonction symétrique des quantités $z_1, z_2, \ldots, z_n$ définies par les équations simultanées

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\delta_i}^{z_i} f_k(z_i)\, dz_i = u_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

soit une fonction univoque des variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Dans ces équations $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ désignent des constantes arbitrairement choisies et toutes les intégrales se rapportant à la même variable z_i sont supposées effectuées le long du même chemin d'intégration.

Soit $c_1, c_2, \ldots, c_n$ un système de valeurs données de $z_1, z_2, \ldots, z_n$ et $v_1, v_2, \ldots, v_n$ le système de valeurs correspondantes de $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Désignons par D le déterminant

$$\Sigma \pm f_1(c_1) f_2(c_2) \ldots f_n(c_n),$$

et supposons que les quantités $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ne soient point choisies parmi les valeurs singulières des fonctions $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$.

M. Fuchs démontre d'abord que la condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction symétrique de $z_1, z_2, \ldots, z_n$ soit univoque dans les environs de $u_k = v_k$ correspondant aux valeurs $z_i = c_i$, pour lesquelles $D = 0$ sans que tous les mineurs du premier ordre soient nuls, est que les intégrales, prises à partir des valeurs $z_i = c_i$, de $(n-1)$ des n équations différentielles

$$\sum_{i=1}^{n} f_k(z_i)\, dz_i = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

vérifient aussi la $n^{\text{ième}}$.

Si D est différent de zéro, les quantités $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont elles-mêmes fonctions univoques des quantités $u_1, u_2, \ldots, u_n$ dans les environs de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

2. Désignons maintenant par $\Delta(\alpha, \beta, \ldots, \nu)$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} f_1(z_\alpha) & f_1(z_\beta) & \ldots & f_1(z_\nu) \\ f_2(z_\alpha) & f_2(z_\beta) & \ldots & f_2(z_\nu) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ f_n(z_\alpha) & f_n(z_\beta) & \ldots & f_n(z_\nu) \end{vmatrix},$$

et par $A_{k\alpha}, A_{k\beta}, \ldots, A_{k\nu}$ les coefficients de $f_k(z_\alpha), f_k(z_\beta), \ldots, f_k(z_\nu)$ dans le développement du déterminant $\Delta(\alpha, \beta, \ldots, \nu)$ par rapport à la $k^{\text{ième}}$ ligne.

M. Fuchs montre que si $z_\alpha, z_\beta, \ldots, z_\nu$ désignent n variables quelconques liées par la relation

$$\Delta(\alpha, \beta, \ldots, \nu) = 0$$

et si les n équations

$$\sum_{(i)} \int_{\delta_i}^{z_i} f_k(z_i)\, dz_i = u_k, \qquad \begin{pmatrix} i = \alpha, \beta, \ldots, \nu \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

sont résolubles d'une façon univoque, on a nécessairement

$$A_{m\alpha} \frac{\partial \Delta(\alpha, \beta, \ldots, \nu)}{\partial z_\alpha} + \cdots + A_{m\nu} \frac{\partial \Delta(\alpha, \beta, \ldots, \nu)}{\partial z_\nu} = 0,$$

où m désigne l'un quelconque des nombres $1, 2, \ldots, n$.

3. Ceci posé, supposons que les équations

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\delta_i}^{z_i} f_k(z_i)\, dz_i = u_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

soient résolubles d'une façon univoque et que $(2n-2)$ quantités $z_1, z_2, \ldots, z_{2n-2}$ vérifient chacune l'équation

$$A_1 f_1(z) + \ldots + A_n f_n(z) = 0,$$

où $A_1, \ldots, A_n$ sont des quantités arbitrairement choisies. M. Fuchs montre qu'alors les n équations différentielles

$$\sum_{i=1}^{2n-2} f_k(z_i)\, dz_i, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

sont nécessairement vérifiées.

Un cas particulier de ce théorème est celui que l'on démontre pour les intégrales abéliennes dans la théorie des fonctions abéliennes à l'aide du théorème d'Abel. [*Comparez* Riemann, *Theorie der Abelschen Functionen* (*Journal de Crelle*, t. 54).]

4. Pour que les équations

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\delta_i}^{z_i} f_k(z_i)\, dz_i = u_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

soient résolubles d'une façon univoque, il faut que les fonctions $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ ne s'annulent pas simultanément pour une même valeur finie de z.

Ce théorème une fois démontré, on peut déduire des théorèmes précédents que l'équation

$$A_1 f_1(z) + A_2 f_2(z) + \ldots + A_n f_n(z) = 0$$

ne peut être vérifiée par plus de $(2n-2)$ systèmes de valeurs

$$[z_i, f_k(z_i)],$$

où z_i soit une quantité finie. On voit aussi que la même équation ne peut être vérifiée par une valeur constante finie de z, c'est-à-dire par une valeur de z, $z = b$, indépendante des variables $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$.

5. Soient maintenant $z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{2n-2}$ des variables indépendantes. Déterminons les quantités $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de manière que les systèmes de valeurs

$$[z_i, f_k(z_i)]$$

vérifient l'équation

$$A_1 f_1(z) + A_2 f_2(z) + \ldots + A_n f_n(z) = 0,$$

pour $i = n, n+1, \ldots, 2n-2$. Les systèmes de valeurs

$$[z_i, f_k(z_i)]$$

qui vérifient la même équation pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$ sont alors des fonctions de $z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{2n-2}$ et les quantités $z_1, \ldots, z_{2n-2}$ sont liées par les équations différentielles

$$\sum_{i=1}^{2n-2} f_k(z_i)\, dz_i = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

En particulier, si $z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots, z_{2n-2}$ sont des constantes, les quantités $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ sont des fonctions de z_n qui vérifient les équations différentielles

$$\sum_{i=1}^{n} f_k(z_i)\, dz_i = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Donc l'intégrale générale de ces dernières équations différentielles est représentée par les racines de l'équation

$$\Delta(0, n, n+1, \ldots, 2n-2) = 0,$$

dans laquelle z_n est l'inconnue et $z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots, z_{2n-2}$ sont des constantes arbitraires.

On déduit d'ailleurs du théorème du numéro précédent que l'équation

$$\Delta(0, n, n+1, \ldots, 2n-2) = 0$$

ne peut être vérifiée par plus de $(n-1)$ systèmes de valeurs

$$[z_n, f_k(z_n)],$$

fonctions de

$$[z_n, f_k(z_n)].$$

Kirchhoff. — Sur les courants électriques dans un cylindre circulaire. (518-524).

Cette Communication se relie à une autre Communication du même auteur faite en juillet 1880 et relative à un barreau rectangulaire. Cette fois, l'auteur considère un conducteur cylindrique à bases circulaires. Les électrodes sont placées aux centres des bases; les extrémités de la spirale d'un galvanomètre différentiel sont placées en deux points des circonférences de base : on peut ainsi mesurer par l'expérience la résistance ρ du conducteur; M. Kirchhoff, au moyen d'une analyse où interviennent les fonctions de Bessel, l'expression due à M. Stokes des racines de l'équation

$$J_1(x) = 0$$

et la formule sommatoire de Maclaurin, parvient à la relation approximative suivante, où r est le rayon de base, l la hauteur du cylindre, supposée grande par rapport à r, et k la conductibilité spécifique,

$$\rho = \frac{l + r.0,76938}{k\pi r^2}.$$

Kronecker. — Sur la théorie des fonctions elliptiques. (525-530).

Dans son premier article, M. Kronecker avait mis la fonction

$$\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)$$

sous la forme

$$(\mathrm{I}) \qquad \Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = -\frac{\sum\limits_{(m,n)} (-1)^{(m-1)(n-1)} e^{-\pi f(m,n)+2(m\sigma+n\tau)\pi i}}{\left[\sum\limits_{(m,n)} (-1)^{(m-1)(n-1)} f(m,n) e^{-\pi f(m,n)}\right]^{\frac{1}{3}}},$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

qui met bien en évidence la propriété de cette fonction d'être un invariant pour tous les systèmes équivalents

$$(\sigma, \tau, w_1, w_2).$$

Dans cette ormule $f(m, n)$ représente la forme quadratique

$$a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2,$$

où $4a_0c_0 - b_0^2 = 1$ et où la partie réelle de c_0 est positive.

La fonction

$$\log \Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2),$$

que l'on obtient tout d'abord sous la forme

$$\log \Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{h=\infty} \lim_{k=\infty} \sum_{(m,n)} \frac{e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i}}{f(m,n)},$$

où la somme est étendue à tous les entiers m de $-h$ à $+h$ et à tous les entiers n de $-k$ à $+k$, à l'exception du système $m = n = 0$, peut être mise maintenant sous la forme

$$(\mathrm{II}) \qquad \log \Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\rho=0} \sum_{(m,n)} \frac{e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i}}{f(m,n)^{1+\rho}},$$

qui met en évidence l'invariance dont nous venons de parler.

La somme est étendue à tous les systèmes entiers m, n, sauf $m = n = 0$.

Dans la première de ces deux formules, w_1 et w_2 sont des quantités complexes telles que la partie réelle de $w_1 i$ et celle de $w_2 i$ soient négatives; les quantités a_0, b_0, c_0 sont déterminées par la condition que w_1 et $-w_2$ soient les deux racines de l'équation

$$a_0 + b_0 w + c_0 w^2 = 0$$

et que l'on ait

$$4a_0c_0 - b_0^2 = 1;$$

enfin τ doit être réel et vérifier l'inégalité $0 \leq \tau < 1$, et si $\sigma^{(1)}$, $w_1^{(1)}$, $w_2^{(1)}$ désignent les parties purement imaginaires de σ, w_1, w_2, les quotients $\frac{\sigma^{(1)}}{w_1^{(1)}}$ et $-\frac{\sigma^{(1)}}{w_2^{(1)}}$ doivent être compris entre $-\tau$ et $1-\tau$; le système $(\sigma = 0, \tau = 0)$ est exclu.

Dans la seconde formule, a, b, c sont des quantités réelles quelconques

prises parmi celles pour lesquelles on a

$$a_0 > 0, \qquad c_0 > 0, \qquad 4a_0c_0 - b_0^2 = 1;$$

les quantités w_1, $-w_2$ sont les racines de l'équation

$$a_0 + b_0 w + c_0 w^2 = 0;$$

il n'est plus nécessaire de restreindre τ à l'intervalle $(0 \ldots 1)$, mais le système $(\sigma = 0, \tau = 0)$ reste exclu.

En combinant les deux formules (I) et (II) que nous venons d'écrire, l'une pour la fonction A, l'autre pour la fonction $\log A$, M. Kronecker parvient à une relation extrêmement remarquable et sur laquelle il convient d'attirer tout particulièrement l'attention. Voici cette relation

$$\frac{\Sigma(-)^{(m-1)(n-1)} e^{-\pi f(m,n)+2(m\sigma+n\tau)\pi i}}{[\Sigma(-1)^{(m-1)(n-1)} f(m,n) e^{-\pi f(m,n)}]^{\frac{1}{3}}} = -e^{-\lim\limits_{\rho=0} \Sigma[2\pi f(m,n)]^{-1-\rho} \cos 2(m\sigma+n\tau)\pi}.$$

Chacune des sommes est à étendre à tous les systèmes d'entiers (m, n), à l'exception du système $(m = 0, n = 0)$ dans la somme du second membre. Les quantités ρ, σ, τ, a_0, b_0, c_0 sont des quantités *réelles* soumises uniquement aux conditions

$$\rho > 0, \qquad a_0 > 0, \qquad c_0 > 0, \qquad 4a_0c_0 - b_0^2 = 1,$$

et $f(m, n)$ est la forme quadratique

$$a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2.$$

Il convient d'observer que les séries du second membre de l'équation (I) sont des séries thêta particulières (de Rosenhain) de deux variables. On peut d'ailleurs, comme le fait observer M. Kronecker, envisager l'équation (I) comme une formule de réduction de ces fonctions thêta particulières de deux variables à des fonctions thêta d'une seule variable.

Si, Δ désignant une quantité réelle positive, on pose dans la formule (II)

$$a = a_0\sqrt{\Delta}, \qquad b = b_0\sqrt{\Delta}, \qquad c = c_0\sqrt{\Delta},$$

on obtient une formule communiquée sans démonstration par M. Kronecker dans les *Monatsberichte*. (*Comparez* 1863, p. 46, et 1880, p. 161.)

Lipschitz. — Recherches sur la détermination des surfaces pour lesquelles on donne l'expression de l'élément linéaire. (541-560).

Dans ce Mémoire M. Lipschitz établit d'abord les trois *formules fondamentales* du Mémoire de Bour : *Théorie de la déformation des surfaces* en suivant la marche indiquée dans l'Analyse de ses deux Mémoires précédents.

En supposant les coordonnées x, y, z d'un point quelconque d'une surface non développable exprimées en fonction de deux variables indépendantes p, q, il obtient aussi des expressions des différentielles dx, dy, dz en fonction de

φ, θ; E, F, G; σ, ψ qui vérifient d'une manière générale l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2;$$

φ, θ et σ ont même signification que dans les Mémoires précédents; ψ est l'angle formé par les directions de la section principale correspondant à ρ_1 et de l'élément $\sqrt{\varepsilon}\,dp$ de la ligne $q = \text{const.}$ considéré à partir du point (p, q). On déduit facilement de ces expressions des différentielles dx, dy, dz les neuf relations de M. Beltrami [*Zur Theorie des Krümmungsmaasses* (*Math. Ann.*, t. I, p. 575)].

Dans les formules précédentes, on est amené à introduire trois quantités H, H_1, T définies par les relations

$$H = \frac{\sin^2\psi}{\rho_1} + \frac{\cos^2\psi}{\rho_2},$$

$$H_1 = \frac{\cos^2\psi}{\rho_1} + \frac{\sin^2\psi}{\rho_2},$$

$$-T = \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\cos\psi\sin\psi.$$

On exprime alors facilement la courbure de la surface, car on a

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = HH_1 - T^2.$$

M. Lipschitz démontre que toutes les surfaces correspondant à un système déterminé de fonctions H, H_1, T peuvent être déduites d'une seule d'entre elles par une suite de translations, de rotations et d'images prises par rapport à un miroir plan.

M. Lipschitz fait ensuite remarquer que, pour former deux fonctions x et y de p et q vérifiant l'équation

$$dx^2 + dy^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2,$$

on n'a besoin que d'intégrer des différentielles totales. Il forme ces deux fonctions x et y de p et q à l'aide d'une quantité réelle μ qui paraît lorsqu'on décompose de la manière la plus générale les deux membres de l'équation précédente $dx^2 + dy^2$ et $E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$ en leurs facteurs linéaires.

Dans un dernier paragraphe, M. Lipschitz démontre que, si l'on fait correspondre les éléments d'une sphère de rayon 1 à ceux d'une autre sphère de rayon 1, de manière qu'à tout élément infiniment petit de la première corresponde un élément infiniment petit égal de la seconde, on peut amener la seconde sphère à coïncider avec la première par une combinaison d'une translation d'une rotation et d'une image prise par rapport à un miroir plan. Il obtient aussi un théorème analogue pour deux espaces dont les éléments correspondent de manière qu'à tout élément infiniment petit de l'un corresponde un élément infiniment petit, égal ou symétrique de l'autre. La démonstration analytique est la même, quel que soit le nombre de dimensions. M. Lipschitz avait d'ailleurs déjà fait observer plus haut le théorème analogue pour le plan.

M. Lipschitz estime que ces théorèmes sont l'expression de caractères fondamentaux de notre conception du plan de la sphère et de l'espace.

En les exprimant analytiquement, on voit bien qu'il est nécessaire de les démontrer.

Si l'on cherche à faire abstraction de ces propriétés dans notre conception du plan, de la sphère et de l'espace, on rencontre une suite de difficultés qui mettent bien en évidence le caractère fondamental du théorème démontré.

J. M.

PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON.

Tome XXIV; 1875-1876 (1).

Adams (*W.-G.*). — Sur les formes des lignes et des surfaces équipotentielles et des lignes de flux. (1-32).

Haughton (*Samuel*). — Sur quelques principes élémentaires de mécanique animale. (42-46).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur les formules de vérification dans la partition des nombres. (250-259).

On doit à M. Sylvester l'élégante formule

$$\Sigma(1 - x + xy - xyz + \ldots) = 0,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les solutions en nombres entiers et positifs, quelques-uns pouvant être nuls, de l'équation $x + 2y + 3z + \ldots = n$. M. Glaisher indique quatorze formules plus ou moins compliquées, analogues à celle de M. Sylvester, qu'il déduit d'identités algébriques dues à Euler et à Jacobi. Voici une de ces formules :

$$\Sigma(1 + x + xy + xyz + \ldots) = \Sigma 2^r,$$

où r désigne le nombre des éléments distincts contenus dans chaque partition. L'auteur donne en terminant une curieuse démonstration, basée sur la numération binaire, de ce théorème d'Euler : le nombre des partitions d'un nombre en nombres impairs est égal au nombre des partitions sans répétition de ce nombre en nombres entiers quelconques.

Thomson (*James*). — Sur une machine à intégrer basée sur un nouveau principe cinématique. (262-266).

Thomson (*Sir W.*). — Sur un instrument pour calculer l'intégrale $\int \varphi(x)\psi(x)\,dx$. (266-268).

(1) Voir *Bulletin*, I, p. 101.

Thomson (*Sir W.*). — Intégration mécanique des équations différentielles linéaires à coefficients variables. (269-271).

Thomson (*Sir W.*). — Intégration mécanique de l'équation différentielle linéaire générale d'ordre quelconque à coefficients variables. (271-275).

Tous les articles précédents contiennent la description d'un intégrateur mécanique et un aperçu des différents usages auxquels il se prête.

Nanson (*E.-J.*). — Sur la théorie de l'intégration d'un système d'équations simultanées aux dérivées partielles non linéaires, et du premier ordre. (337-344).

Étant donné un système de n équations à $n+r$ variables, une intégrale complète devra contenir r constantes arbitraires. L'auteur s'est proposé de reconnaître dans quels cas il existe une pareille intégrale; il étend pour cela les méthodes données par Boole pour les équations linéaires.

Tome XXV : 1876-1877.

Allan Cunningham. — Sur les fonctions et les équations de Clairaut. (43-46).

L'auteur propose d'appeler *fonctions* de Clairaut les expressions de la forme suivante :

$$y^{(n)}, \quad ky^{(n-1)} - xy^{(n)}, \quad \frac{k(k+1)}{2} y^{(n-2)} - \frac{k}{1} xy^{(n-1)} + \frac{x^2}{2} y^{(n)}, \quad \ldots$$

Une fonction de Clairaut dépend ainsi de deux nombres entiers positifs n et r, qui en seront respectivement l'ordre et le rang, et d'une quantité quelconque k, qui représentera la classe. L'article renferme un certain nombre de relations algébriques et différentielles entre ces fonctions.

Brodie (*B.-C.*). — Le calcul des opérations chimiques. (83-85).

Haughton (*Samuel*). — Sur quelques principes élémentaires de mécanique animale. (131-136).

Russell (*W.-H.-L.*). — Sur quelques intégrales. (176, 507-509).

Tableau d'intégrales définies; je citerai la suivante, pour donner une idée de la nature de ces intégrales,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(\cos^2\theta)} \cos 3\theta \cos(e \cos^2\theta) \sin 3\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} \sqrt{e}.$$

Casey (*John*). — Sur une nouvelle forme de l'équation tangentielle. (564-565).

Cayley (*A.*). — Sur les quartiques bicirculaires. (565-566).

Extraits de Mémoires étendus publiés dans le t. CLXVII des *Philosophical Transactions*, et qui ont été analysés dans le *Bulletin*, 2e série, t. VII, p. 106 de la IIe Partie.

Tome XXVI; 1877-1878.

Haughton (*Samuel*). — Notes de géologie physique. (51-63, 534-546).

Calcul du déplacement de l'axe terrestre dû aux élévations et aux dépressions de la croûte terrestre; application au calcul de la durée de certaines périodes géologiques.

Spottiswoode (*William*). — Sur les courbes et surfaces hyperjacobiennes. (226-227).

Voir *Bulletin*, VII_2, IIe Partie, p. 106.

Niven (*D.*). — Sur le calcul de la trajectoire d'un projectile. (268-287).

Russell (*W.-H.-L.*). — Sur certaines intégrales définies. (359-363).

Tome XXVII; 1878-1879.

Sylvester (*J.-J.*). — Sur les limites de l'ordre et du degré des invariants fondamentaux des formes binaires. (11-12).

Énoncés d'un certain nombre de théorèmes relatifs à ces limites.

Adams (*J.-C.*). — Sur l'expression du produit de deux polynômes de Legendre au moyen d'une série de pareils polynômes. (63-71).

Si l'on pose

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n,$$

on a, pour l'expression du produit $P_m P_n (m \leq n)$,

$$P_m P_n = \sum_{r=0}^{r=m} \frac{\Lambda(m-r)\,\Lambda(r)\,\Lambda(n-r)}{\Lambda(n-m+r)} \left(\frac{2n+2m-4r+1}{2n-2m+2r+1} \right) P_{n+m-2r}.$$

où

$$A(m) = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{1.2\ldots m}, \qquad A(0) = 1,$$

$$A(-1) = A(-2) = \ldots = 0.$$

On peut se servir de cette formule pour calculer la valeur de l'intégrale définie

$$\int_{-1}^{+1} P_m P_n P_p \, dx.$$

Adams (*J.-C.*). — Note sur la valeur de la constante d'Euler, ainsi que sur les logarithmes népériens de 2, 3, 5, 7, 10 et le module des logarithmes vulgaires, avec 260 décimales.

Brioschi (*F.*). — Sur une équation différentielle du troisième ordre. (126-129).

Extrait d'un Mémoire étendu publié dans le Volume IX des *Annali di Matematica*. (Voir *Bulletin*, VI_2, p. 58, IIe Partie.)

Russell (*W.-H.-L.*). — Sur quelques intégrales définies. (129-132).

Cayley (*A.*). — Addition au Mémoire sur la transformation des fonctions elliptiques. (177-179).

Calcul de l'équation modulaire et des coefficients de la transformation pour la transformation du septième ordre.

Clifford (*W.-K.*). — La classification des lieux. (370-371).

Todhunter (*I.*). — Note sur les polynômes de Legendre. (381-383).

Dans une Note précédente (*voir* plus haut), M. Adams a déduit de la formule qui donne le produit de deux polynômes de Legendre la valeur de l'intégrale définie

$$\int_{-1}^{+1} P_m P_n P_p \, dx,$$

où $2s = m + n + p$. Inversement, si l'on suppose connue la valeur de cette intégrale, on en déduit immédiatement le développement du produit de deux polynômes. M. Todhunter indique dans cette Note la marche à suivre pour calculer directement cette intégrale.

Casey (*John*). — Sur les équations des circonférences. (417-419).

Cayley (*A.*). — Dixième Mémoire sur les formes. (452-453).

Extrait d'un Mémoire développé sur la forme binaire du cinquième ordre, publié dans le t. CLXIX des *Philosophical Transactions*.

Tome XXVIII; 1878-1879.

Thomson (*Sir W.*). — Sur une machine pour résoudre les équations linéaires simultanées. (111-113).

Darwin (*G.-H.*). — Sur la précession d'un sphéroïde visqueux, et sur l'histoire du globe terrestre. (184-194).

Darwin (*G.-H.*). — Problèmes relatifs aux marées d'un sphéroïde visqueux. (194-199).

Tome XXIX; 1879.

Niven (*D.*). — Sur une certaine intégrale définie qui se rencontre dans l'analyse sphérico-harmonique et sur le développement en séries des potentiels de l'ellipsoïde et de l'ellipse. (2-6).

Voir *Bulletin*, VII_2, p. 110 de la IIe Partie.

Niven (*C.*). — Sur la propagation de la chaleur dans un ellipsoïde de révolution. (98-102).

Hicks (*W.-M.*). — Sur le mouvement de deux sphères dans un fluide. (162-164).

Extraits de Mémoires étendus publiés dans le Volume CLXXI des *Philosophical Transactions*.

Darwin (*G.-H.*). — Détermination graphique des effets séculaires du frottement dû aux marées. (168-181).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Énumérations séparées des nombres premiers de la forme $4n+1$ et de la forme $4n+3$. (192-197).

Les énumérations vont jusqu'à dix millions.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur quelques intégrales définies contenant des fonctions elliptiques. (331-351).

Évaluation de certaines intégrales définies au moyen de procédés analogues

à ceux qu'on emploie pour le calcul des intégrales définies de même forme renfermant les fonctions circulaires.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Valeurs des fonctions thêta et zêta pour des valeurs particulières de l'argument. (351-361).

Tableau des valeurs des fonctions $\Theta(u)$, $H(u)$, $Z(u)$ pour les valeurs de l'argument de la forme $m\mathrm{K} + ni\mathrm{K}'$, m et n ayant les valeurs $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$.

Russell (*H.-W.-L.*). — Sur quelques intégrales définies. (361-363).

Mealister Donald. — La loi de la moyenne géométrique. (367-376).

Cayley. — Mémoire sur les fonctions Θ, simples et doubles. (397-398).

Voir *Bulletin*, VII_2, p. 111.

Tome XXX; 1880.

Darwin. — Sur les perturbations séculaires des éléments de l'orbite d'un satellite tournant autour d'une planète, causées par le phénomène des marées. (1-10).

Russell (*W.-H.-L.*). — Sur quelques intégrales définies. (100-104).

Niven (*C.*). — Sur l'induction des courants dans les plaques indéfinies et les surfaces sphériques. (113-117).

Voir *Bulletin*, IX_2, p. 77 de la IIe Partie.

Rowe. — Mémoire sur le théorème d'Abel. (515-519).

Voir *Bulletin*, IX_2, p. 78.

Tome XXXI; 1880-1881.

Spottiswoode. — Sur les quarante-huit coordonnées d'une cubique gauche. (301-302).

Darwin. — Sur le frottement dû aux marées pour une planète

attirée par divers satellites et sur l'évolution du système solaire. (322-325).

Pour les deux Mémoires précédents, voir *Bulletin*, IX_2, p. 77.

Russell (*H.-W.-L.*). — Sur quelques intégrales définies. (330-336).

Ellis (*Alexander*). — Sur l'emploi de la méthode du bimodule pour le calcul des logarithmes et antilogarithmes à douze et seize décimales, avec quelques tables. (381-413).

Hicks. — Sur les fonctions toroïdales. (504-505).

Voir *Bulletin*, IX_2, p. 78.

Tome XXXII; 1881.

Ellis (*Alexander*). — Addition au sommaire chronologique des différentes méthodes pour le calcul des logarithmes. (377-379).

Glaisher. — Sur l'équation de Riccati et ses transformations; sur certaines intégrales définies qui vérifient cette équation. (444-446).

Voir *Bulletin*, IX_2, p. 79.

Mannheim (*A.*). — Sur la surface de l'onde, et théorèmes relatifs aux lignes de courbure des surfaces du second ordre. (447-450).

« Si à un ellipsoïde donné on circonscrit des cônes dont une section principale est un angle droit, les sommets de ces cônes sont sur une surface de l'onde. »

De ce théorème, l'auteur déduit un certain nombre de conséquences intéressantes relatives aux lignes de courbure des surfaces du second ordre. Je citerai les suivantes :

« La surface de l'onde est coupée par un ellipsoïde (E) homofocal à celui qui entre dans la définition précédente suivant une ligne de courbure de cet ellipsoïde (E).

» Les hyperboloïdes homofocaux à l'ellipsoïde, qui entre dans la définition de la surface de l'onde, coupent cette surface suivant une ligne sphérique et une de leurs lignes de courbure. »

Russell. — Sur quelques intégrales définies. (450-454).

Tome XXXIII; 1881-1882.

Merrifield. — Sommation des séries formées par les inverses des nombres premiers et de leurs puissances. (4-10).

Forsyth. — Mémoires sur les fonctions Θ, en particulier sur les fonctions Θ de deux variables. (206-210).

Voir *Bulletin*, IX, p. 164.

Russell. — Sur quelques théorèmes de Géométrie. (211-215).

Démonstration de quelques théorèmes donnés par Salmon dans les *Sections coniques* et les *Courbes planes*. Recherche du lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés sont tangents à une cubique.

Malet. — Sur une classe d'invariants. (215).

Voir *Bulletin*, IX, p. 163.

Russell. — Sur quelques intégrales définies. (258-262).

Mannheim (*A.*). — Sur les surfaces homofocales du second ordre. (322-331).

Construction géométrique des rayons de courbure principaux des trois surfaces du second degré, homofocales à un ellipsoïde donné, qui passent par un même point de l'espace. Cette construction repose sur un théorème déjà énoncé par l'auteur dans une Note précédente (t. XXXII, p. 447).

Spottiswoode. — Note sur la Communication de M. Russell « Sur quelques intégrales définies ». (341-343).

Dans une Note antérieure, M. Russell a obtenu la condition pour qu'un polynôme du quatrième degré puisse être envisagé comme un polynôme du second degré par rapport à un trinôme $\rho x^2 + \mu x + \nu$. M. Spottiswoode retrouve cette condition et montre comment on peut généraliser le problème.

Mannheim (*A.*). — Sur les centres de courbure principaux des surfaces homofocales du second ordre. (421-425).

Nouveaux théorèmes de Géométrie sur les six centres de courbure principaux des trois surfaces homofocales du second ordre qui passent par un même point.

Glaisher (*Ernest*). — Formules pour $\operatorname{sn} 8u$, $\operatorname{cn} 8u$, $\operatorname{dn} 8u$ en fonction de $\operatorname{sn} u$. (480-489).

THE QUARTERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS [1].

Tome XXI; 1885.

Lachlan (*Robert*). — Sur les propriétés d'un triangle formé par des arcs de cercle dans un même plan. (1-59).

Cet article a pour but de développer les analogies d'un triangle formé par des arcs de cercle avec le triangle ordinaire. Les propriétés relatives aux cercles tangents aux trois côtés d'un triangle ordinaire, au cercle des neuf points et au cercle circonscrit, sont étendues à ces triangles d'arcs de cercle. L'auteur montre, en terminant, comment on pourrait déduire ces théorèmes de la considération de triangles sphériques.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur les coefficients des développements de $\frac{\pi}{2K}$ et $\frac{2G}{\pi}$ suivant les puissances de q. (60-76).

Suite des formules données dans le Volume précédent.

Cayley. — Une vérification relative à la transformation linéaire des fonctions Θ. (77-84).

Jenkins. — Sur quelques démonstrations géométriques des théorèmes relatifs à l'inscription d'un triangle de forme constante dans un triangle donné. (84-89).

Dallas (*John*). — Note sur la projection appliquée aux problèmes et à la géométrie dans l'espace. (89-91).

Cayley. — Sur la théorie des semi-invariants. (92-107).

Dans un Mémoire antérieur (*Journal de Crelle*, t. 30), l'auteur a étudié les relations linéaires qui existent entre les invariants du quatrième ordre d'une forme binaire donnée; les mêmes formules s'appliquent aux covariants cubiques d'une forme binaire donnée ou, ce qui revient au même, aux semi-invariants cubiques d'un poids donné. Considérant les formules à ce dernier point de vue, l'illustre géomètre s'est proposé, dans ce nouveau travail, de développer la théorie relativement aux solutions de ce système d'équations linéaires.

Chree (*C.*). — Deux ou plusieurs milieux solides élastiques distincts en contact, séparés par des plans parallèles, exposés à

[1] Voir *Bulletin*, t. X, p. 147.

des forces purement superficielles, en particulier à des forces normales. Solution complète dans le cas d'un solide dont l'élasticité varie d'une manière continue avec la profondeur, mais d'une rigidité constante. (107-129).

Jeffery (*Henry*). — Sur les foyers des courbes sphériques du quatrième ordre. (130-141).

Cayley. — Sur la transformation des fonctions Θ de deux variables. (142-178).

Remaniement du Mémoire de M. Hermite : *Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes* (*Comptes rendus*, t. XL) avec quelques changements de notation et quelques additions.

Routh (*E.-J.*). — Une Note d'optique géométrique. (179-183).

Coates (*C.-V.*). — Les fonctions de Bessel du second ordre (183-192).

Chree (*C.*). — Sphère solide d'élasticité variable soumise à des forces normales à la surface. (193-208).

Asutoh Mukohopadhyay. — Note sur les fonctions elliptiques. (212-217).

L'intégrale générale de l'équation d'Euler

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)}}+\frac{d\mu}{\sqrt{(a^2-\mu^2)(c^2-\mu^2)}}=0$$

s'obtient en écrivant que les deux coniques

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-c^2}=1$$

se coupent sur une tangente à la conique

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1,$$

qui est homofocale aux deux premières.

William Woolsey Johnson. — Sur une représentation géométrique des alternants du troisième ordre et des quotients obtenus en les divisant par A(0, 1, 2). (217-224).

L'alternant du troisième ordre $A(p, q, r)$ est le déterminant

$$\begin{vmatrix} a^p & a^q & a^r \\ b^p & b^q & b^r \\ c^p & c^q & c^r \end{vmatrix},$$

p, q, r désignant trois nombres entiers positifs. Tous ces alternants sont divisibles par $A(0, 1, 2)$ et le quotient $\frac{A(0, p, q)}{A(0, 1, r)}$ peut se mettre sous la forme

$$H_{p-1} H_{q-2} - H_{q-1} H_{p-2},$$

où les H sont des fonctions symétriques de a, b, c. L'auteur développe un procédé pour calculer rapidement ces fonctions, procédé qui repose sur une certaine représentation géométrique des alternants.

Watson (*H.-W.*). — Sur un théorème de Calcul intégral. (225-228).

Discussion de la formule

$$\iiint \nabla^2 \frac{1}{r}\, dx\, dy\, dz = -4\pi.$$

Gallop (*E.-G.*). — Distribution de l'électricité sur un disque circulaire et sur une calotte sphérique. (229-256).

Cayley. — Sur les invariants d'une équation différentielle linéaire. (257-261).

Une équation linéaire du second ordre ne possède pas d'invariant, mais seulement deux semi-invariants relatifs au changement de variable $x = \varphi(t)$ et au changement d'inconnue $y = Y f(x)$. Une équation du troisième ordre possède un invariant relatif aux deux transformations. M. Cayley, après avoir vérifié directement ce résultat, montre comment on peut identifier cet invariant avec l'invariant différentiel des coniques.

Forsyth (*A.-R.*). — Quelques séries convergentes à double entrée. (261-280).

Les séries dont il s'agit sont les séries

$$S_4 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m\omega + n\omega')^4},$$

$$S_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m\omega + n\omega')^n}$$

(combinaison $m = n = 0$ étant exceptée), qui jouent un rôle si important

dans la théorie des fonctions elliptiques de Weierstrass et les séries analogues S_{2m}. Au moyen des équations aux dérivées partielles que vérifie la fonction Θ, M. Forsyth établit aisément une formule de récurrence permettant de calculer ces sommes de proche en proche; ce qui lui permet aussi de démontrer le théorème suivant, qui est fondamental :

« Toutes les sommes S_{2m} sont des fonctions entières des deux premières de la forme

$$\Sigma A_{xy} S_4^x S_6^y,$$

où A_{xy} est un coefficient numérique, x et y des nombres entiers positifs vérifiant la relation $2x + 3y = m$. »

Routh (*E.-J.*). — Quelques théorèmes de Calcul intégral et leur représentation par la méthode des points équivalents. (281-287).

L'auteur envisage des intégrales définies de la forme

$$\int z^n \, d\sigma,$$

$d\sigma$ désignant l'élément d'aire d'un triangle ou d'un quadrilatère, ou l'élément de volume d'un tétraèdre ou du solide formé par deux tétraèdres ayant une base commune. Ces intégrales s'expriment simplement au moyen de l'aire totale ou du volume et des coordonnées d'un certain nombre de points. Par un changement de coordonnées, on en déduit l'expression des intégrales de la forme

$$\int x^p y^q z^r \, d\sigma,$$

ou plus généralement des intégrales de la forme

$$\int \Phi(x, y, z) \, d\sigma,$$

$\Phi(x, y, z)$ désignant une fonction entière. Ces formules conduisent M. Routh à un grand nombre de résultats intéressants, qui peuvent s'énoncer simplement par l'emploi des points équivalents.

Chree (*C.*). — Vibrations longitudinales d'un barreau circulaire. (287-298).

Muir (*Thomas*). — Liste supplémentaire de travaux sur les déterminants. (299-320).

Une première liste a été publiée dans le Volume XVIII, p. 110-149 du *Quarterly Journal*.

Cayley. — Sur les équations différentielles linéaires. (321-331).

Cayley. — Sur la décomposition des équations différentielles linéaires. (331-335).

Ces deux articles forment un résumé des principaux résultats dus à MM. Fuchs, Thomé, Floquet, etc., sur cette théorie.

Basset. — Sur le mouvement, dans un liquide indéfini, d'un cylindre dont la section droite est l'inverse d'une ellipse par rapport à son centre. (336-339).

L'auteur a déjà traité le même problème dans le Volume précédent. Il arrive aux mêmes formules par une méthode plus courte et plus directe.

Larmor (*Alexander*). — Sur la théorie géométrique de la perspective. (339-366).

Mac-Mahon (*P.-A.*). — Quelques partitions spéciales des nombres. (367-373).

Russell (*Robert*). — Sur un théorème d'Algèbre supérieure. (373-375).

Démonstration de ce théorème donné par Salmon dans son Ouvrage :

« Si u et v sont deux formes binaires de même degré et si l'on considère le discriminant de $u + kv$ comme une fonction de k, son discriminant est RS^3T^2, où R est l'éliminant de u et de v, $S = 0$ la condition pour que $u + \lambda v$ puisse contenir un facteur triple, $T = 0$ la condition pour que $u + \lambda v$ puisse contenir deux facteurs doubles. »

Forsyth (*A.-R.*). — Note sur une projection quasi-stéréographique due à Gauss. (376-384).

Gauss a montré comment on pouvait appliquer conformément un sphéroïde sur un plan, de façon qu'aux méridiens et aux parallèles correspondent des cercles concentriques et des rayons. M. Forsyth étudie dans cette Note la déformation subie par la surface dans ce mode de représentation.

MATHEMATISCHE ANNALEN, publiées par F. Klein et A. Mayer. Leipzig, 1885 (1).

Tome XXV.

Hess (*W.*). — Sur la flexion et la torsion d'un barreau infiniment mince ayant deux résistances égales, lorsque agissent à l'extrémité libre une force et un couple de rotation autour de l'axe principal d'inégale résistance. (1-38).

(1) Voir *Bulletin*, XI, p. 5.

Les conditions d'équilibre d'un barreau infiniment mince ont, comme l'a montré Kirchhoff, la même forme que les équations qui définissent le mouvement d'un corps autour d'un point fixe. Si un couple agit sur l'extrémité libre, les conditions deviennent les mêmes que dans la rotation du corps autour de son centre de gravité. L'auteur a examiné ce cas tout au long dans le XXIIIe Volume des *Math. Ann.* Si en outre une force agit, au nouveau problème correspond la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe situé sur l'un des trois axes principaux passant par le centre de gravité. Ce dernier problème n'a été complètement traité jusqu'ici que pour le gyroscope, c'est-à-dire dans le cas où les moments d'inertie autour des deux autres axes principaux sont égaux. Comme correspondant à ce cas, on suppose que le barreau présente entre la déformation deux résistances égales et, pour plus de simplification, que l'axe du couple coïncide avec l'axe d'une égale résistance.

L'auteur détermine alors la grandeur de la flexion et de la torsion aux différents points de la ligne centrale et construit les surfaces gauches qui répondent aux cônes de Poinsot; ces surfaces permettent de ramener l'une à l'autre les déformations du barreau par flexion. Ensuite, il établit les équations de la ligne centrale élastique et applique les résultats obtenus à quelques cas particuliers.

Dans ces recherches, il y a lieu de distinguer si les deux résistances égales se rapportent toutes deux à la flexion, ou bien si l'une d'elles est la résistance contre la torsion. Ce second cas n'a pas été pris en considération jusqu'ici et présente des résultats nouveaux. Alors la ligne centrale n'est pas, en général, périodique et ne possède pas de points d'inflexion. L'examen étendu du premier cas fournit aussi une série de types remarquables mis en évidence par des dessins.

Voss (*A.*). — Sur les polygones circonscrits à un lieu du second degré. (39-70).

Dans son *Traité des propriétés projectives*, t. I, p. 70, Poncelet a donné un théorème sur les polygones dont les côtés touchent ou bien une conique, ou bien une surface du second ordre; dans ce Mémoire, l'auteur s'occupe de cette question générale : déterminer les conditions sous lesquelles n points quelconques donnés sur une surface du second degré peuvent être les points de contact des côtés d'un polygone fermé. La même question est de plus étendue aux espaces quadratiques à $m-2$ dimensions détachés dans un espace projectif à $m-1$ dimensions. On voit alors que la détermination de polygones de cette nature dont les côtés ne soient pas des génératrices se ramène toujours à la solution d'équations linéaires; tandis que les polygones formés avec des génératrices dépendent des racines d'une équation réciproque. Dans la discussion de cette dernière équation se présentent deux invariants gauches du groupe de points. Les premiers polygones (polygones proprement dits) sont de deux espèces, suivant que le produit des rapports des distances est égal à $(-1)^n$ ou à $(-1)^{n-1}$.

Les résultats généraux sont les suivants : Si n est impair, il existe toujours deux polygones proprement dits; si n est pair et m impair, il y a un polygone proprement dit de première espèce; si n et m sont tous deux pairs, il n'y a pas en général de polygone proprement dit. Dans ce dernier cas, il n'y a de polygone que si l'un des invariants s'annule, et il y en a alors une infinité simple.

Ces théorèmes donnent une explication manifeste des différences qui parais-

sent s'offrir entre les coniques et les surfaces du second ordre ($m = 3$ et $m = 4$). Pour $m = 6$, on arrive à des théorèmes sur les configurations dans l'espace réglé. Pour les surfaces du second degré, les recherches se complètent de la façon la plus simple par l'application des coordonnées lignes.

Lie (*S.*). — Recherches générales sur les équations différentielles qui admettent un groupe fini et continu. (71-151).

§ 1. Résumé de la théorie de l'intégration d'un système complet à transformations infinitésimales connues, donnée précédemment par l'auteur (*Math. Ann.*, t. XI). § 2. Discussion de cette théorie. § 3. Tout groupe de transformations est semblablement composé avec un groupe linéaire. § 4. Critérium pour la similitude de deux groupes de transformations. § 5. Groupes simplement transitifs et réciproques. § 6. Équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque ayant un groupe fini connu. § 7. Détermination d'un groupe inconnu continu et fini ayant une forme canonique connue. § 8. Application de la théorie développée à une classe importante et étendue d'équations différentielles. § 9. Théorèmes généraux sur les groupes continus de transformations. § 10. Intégration de systèmes complets admettant des transformations finies connues qui forment un groupe continu. § 11. Emploi d'un groupe connu dont les transformations finies sont inconnues. § 12. Méthode générale pour la détermination d'un groupe fini continu.

Cayley (*A.*). — Sur la courbe quadriquadrique et sa connexion avec la théorie des fonctions elliptiques. (152-156).

Représentation au moyen de fonctions elliptiques de la courbe gauche du quatrième ordre et application du théorème d'Abel.

Hurwitz (*A.*). — Sur les relations entre les nombres de classes des formes binaires quadratiques à déterminant négatif. (157-196).

Dans ce Mémoire, l'auteur se propose de déduire de la théorie des fonctions modulaires de Klein la détermination des relations entre les nombres de classes. La première Section contient une déduction considérablement simplifiée pour les relations du premier échelon. Dans la seconde Section, l'auteur considère le cas général d'un échelon q et plus complètement celui de $q = 7$.

Tichomandritzky (*M.*). — Sur le problème de l'inversion des intégrales elliptiques. (197-202).

Morera (*G.*). — Sur quelques lois de formation dans la théorie de la division et de la transformation des fonctions elliptiques. (203-211).

Papperitz (*E.*). — Sur les fonctions s parentes (fonctions contiguës). (212-221).

A la place de la fonction hypergéométrique traitée par Gauss, $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, Riemann, dans son Mémoire sur cette fonction, en a introduit une plus générale qui est aussi définie comme intégrale d'une équation différentielle linéaire du second ordre. L'auteur introduit ici le quotient de deux intégrales particulières linéairement indépendantes comme fonction s la plus générale et examine ce que devient pour ces fonctions la notation de parenté entre les fonctions s parentes.

Rausenberger (*O.*). — Sur les fonctions univoques à plusieurs périodes non permutables. III. (222-235).

Dans cette partie de ses recherches générales, l'auteur traite le groupe de périodicité

$$y = px \quad (|p| = 1), \qquad y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

où les coefficients sont réels.

Sturm (*R.*). — Sur les surfaces du second degré qui sont leurs propres polaires. (236-240).

Comme suite à une Note de M. Tarry (*Nouv. Ann.*, III_3), l'auteur s'occupe du système des surfaces du second degré relativement auxquelles une surface donnée est sa propre polaire. Le système est triplement infini.

Harnack (*Ax.*). — Sur le contenu des masses ponctuelles. (241-250).

Une masse ponctuelle située à l'intérieur d'un intervalle linéaire de longueur finie est appelée *discrète de* (*contenu zéro*) lorsque tous les points peuvent être enfermés dans un nombre fini d'intervalles dont la somme s peut être rendue aussi petite que l'on veut, le nombre des intervalles pouvant d'ailleurs croître au delà de toute limite. L'auteur a montré dans de précédents travaux le rôle que joue cette notion dans la définition de Riemann de l'intégrale définie. Ici, on examine tout d'abord les relations de cette notion avec les notions de masses ponctuelles dérivées introduites par Cantor. Puis l'auteur montre comment à chaque masse ponctuelle située à l'intérieur d'un intervalle ou d'une portion de plan correspond un contenu fourni par un nombre déterminé. Ensuite, il arrive à la définition et à la détermination du contenu d'une région quelconque dans le plan ou dans l'espace, même dans les cas où les règles d'intégration cessent complètement d'être applicables.

Meissel. — Calcul de la masse des nombres premiers qui se trouvent dans le premier milliard des nombres naturels. (251-257).

Employant un procédé qu'il a indiqué dans le t. II des *Math. Ann.*, l'auteur trouve que le nombre de nombres premiers contenus dans le premier milliard est égal à

$$50847478.$$

H. Gram a trouvé par une formule d'approximation le nombre 50847455. L'auteur corrige en même temps plusieurs fautes des Tables de Burckhardt.

Voss (*A.*). — Sur les équations différentielles de la Mécanique. (258-286).

Les conditions du mouvement d'un système non libre sont, en Dynamique, exprimées exclusivement par des équations explicites et les dérivées partielles de ces fonctions entrent dans les équations qui contiennent les dérivées secondes avec les multiplicateurs de Lagrange. Au lieu de ces équations, l'auteur traite d'une façon générale le système

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \sum_{s=1}^{s=r} \mu_s p_{si},$$

où l'on ne fait plus sur les fonctions p_{ik} de supposition. Les conditions elles-mêmes sont alors de la forme

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_{si} x'_i = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, r).$$

L'auteur s'occupe ensuite des équations permettant de déterminer les facteurs μ, du principe des forces vives, de la question de stabilité dans le cas des petites oscillations et du principe du multiplicateur de Jacobi.

Le mode de mouvement est expliqué sur des exemples. Le point, au lieu d'être assujetti à demeurer sur une surface déterminée, est lié à un système déterminé de plans (lieu de points); à chaque point de sa trajectoire correspond aussi un plan déterminé. Le mouvement à l'intérieur d'un complexe linéaire présente un cas simple de cette espèce.

Hurwitz (*A.*). — Quelques théorèmes généraux sur les courbes gauches. (287-292).

Ces théorèmes ont pour base la proposition suivante : « A toute courbe fermée de l'espace correspond un faisceau déterminé de plans parallèles, tels que si l'on prend respectivement dans deux plans quelconques Σ_0 et Σ_1 du faisceau deux points P_0 et P_1, les cônes qui projettent la courbe gauche des points P_0 et P_1 enferment des espaces qui ont le même volume, quel que soit le point P_0 du plan Σ_0 et le point P_1 du plan Σ_1.

Schrœter (*H.*). — Propriétés métriques de la parabole cubique (courbe gauche du troisième ordre). (293-318).

Krause (*M.*). — Sur la transformation des fonctions thêta d'une variable. (319-322).

Krause (*M.*). — Sur la transformation des fonctions thêta de deux variables. (323-362).

« Dans ce Mémoire l'auteur applique les méthodes de la théorie des trans-

formations, méthodes dues à Göpel et Hermite, à la résolution d'une série de problèmes importants de la théorie des fonctions thêta.

» En premier lieu, il s'occupe d'exprimer les quotients différentiels des fonctions hyperelliptiques du premier ordre et certaines de leurs combinaisons simples au moyen de ces fonctions elles-mêmes. En employant des méthodes semblables à celles dont a fait usage Désiré André dans la théorie des fonctions elliptiques, on arrive à développer en séries de puissances les fonctions hyperelliptiques.

» En second lieu, l'auteur se propose le problème inverse du précédent : « Exprimer les puissances et une série de produits de fonctions hyperelliptiques » linéairement au moyen des fonctions, de certaines de leurs combinaisons » simples et de leurs quotients différentiels ».

» Il s'agit, en troisième lieu, du problème de la transformation proprement dit, et l'auteur le traite d'une manière plus générale que cela n'a été fait jusqu'ici. Il cherche les relations les plus générales qui existent entre les fonctions transformées et les fonctions primitives, relations non plus seulement entre une fonction primitive et sa transformée, mais entre un nombre quelconque de fonctions primitives et de fonctions transformées. De la sorte, on résout en même temps le problème du développement en séries de Fourier des puissances et de certains produits des fonctions thêta.

Staude (*O.*). — Sur les caractéristiques algébriques des fonctions thêta hyperelliptiques. (363-418).

Pringsheim (*A.*). — Sur la façon dont se comportent certaines séries de puissances sur le cercle de convergence. (419-426).

Exemple d'une série qui est convergente pour *tous* les points d'un cercle, la convergence en ces points n'étant toutefois pas absolue.

Markoff (*A.*). — Sur la méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales. (427-432).

Pick (*G.*). — Sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques. (433-447).

Démonstration du théorème fondamental d'Abel-Kronecker dans cette théorie par l'introduction de l'invariant absolu I au lieu du module $\varkappa^2$.

Babek (*K.*). — Sur la génération projective des courbes. (448-458).

Application du théorème de Brill-Nöther sur les systèmes de points d'intersection d'une courbe plane du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Gordan (*P.*). — Sur l'équation du septième degré admettant un groupe de 168 substitutions. II. (459-521).

Dans cette seconde Partie de ses recherches (la première Partie a paru dans

le tome XX des *Mat. Ann.*), l'auteur donne une théorie des équations en question, où il ne s'appuie que sur les procédés élémentaires de la théorie ordinaire des équations. L'équation du septième degré est supposée sans second terme

$$x^7 + (2)x^5 + (3)x^4 + (4)x^3 + (5)x^2 + (6)x + (7) = 0.$$

On représente les racines par $x_0, x_1, \ldots, x_6$ et le groupe des 168 substitutions est celui qui laisse invariable la fonction

$$P = x_0x_1x_2 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_5 + x_3x_4x_6 + x_4x_5x_0 + x_5x_6x_1 + x_6x_0x_2.$$

En même temps que l'équation donnée, on en considère aussi une seconde

$$\bar{x}^7 + (\bar{2})\bar{x}^5 + (\bar{3})\bar{x}^4 + (\bar{4})\bar{x}^3 + (\bar{5})\bar{x}^2 + (\bar{6})\bar{x} + (\bar{7}) = 0,$$

dont les racines sont liées aux précédentes par la relation

$$-\sqrt{2x_{1-\nu}} = x_\nu + x_{\nu+1} + x_{\nu+2}.$$

Dans la première Section, l'auteur démontre, par l'emploi des fonctions symétriques, ce théorème, que toute fonction entière des x qui demeure invariable pour les 168 substitutions est une fonction entière des (i) et des $(\bar{i})$. Mais on a $(2) = (\bar{2})$ et l'on détermine entre les coefficients (i) et $(\bar{i})$ cinq relations qui permettent d'exprimer rationnellement (6), $(\bar{6})$, (7), $(\bar{7})$ au moyen des autres coefficients et il reste entre ces derniers une relation qui est en (5), $(\bar{5})$ du sixième degré. Dans la seconde Section, l'auteur définit les formes normales de l'équation et les déduit des relations établies entre les coefficients (i) et $(\bar{i})$. De là résulte la forme canonique à laquelle l'équation a été ramenée par Klein, équation résoluble au moyen des fonctions elliptiques.

Dans la deuxième Section, l'auteur fait voir comment cette transformation sous forme canonique peut se ramener à une transformation de Tschirnhaus.

Scheefler (*L.*). — Les maxima et les minima des intégrales simples à limites invariables. (522-595).

Le présent Mémoire, travail remarquable d'un auteur enlevé trop tôt à la Science, contient une méthode nouvelle pour étudier la variation seconde des intégrales simples. L'auteur comblait ainsi une lacune essentielle qui subsistait dans tous les travaux antérieurs; de plus, il fournissait ainsi une base solide au procédé employé, à la suite de Jacobi, par Clebsch, Lipschitz, Mayer, etc., pour la transformation de la variation seconde.

Le principe de la méthode de l'auteur repose sur un théorème qui donne immédiatement la raison d'être de l'introduction des dérivées partielles prises par rapport aux $2n$ constantes des fonctions intégrales, introduction essentielle pour la transformation de Clebsch. Le théorème s'énonce simplement comme il suit : « Si l'intégrale I est minimum, on peut s'attendre à ce que l'intégrale I′ qui résulte de I par une variation suffisamment petite des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ soit en général aussi minimum, et comme la propriété de minimum doit aussi subsister pour une portion quelconque de l'intégrale I, on peut s'attendre aussi à ce qu'elle subsiste pour toute partie correspondante de I′. »

Après avoir montré d'une façon générale comment on peut déduire de l'application de ce principe les conditions nécessaires, analytiques, pour l'existence d'un minimum (ou d'un maximum), l'auteur traite complètement l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx.$$

Si l'on désigne l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

par $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ et que l'on pose $\frac{\partial \varphi}{\partial c_1} = u_1$, $\frac{\partial \varphi}{\partial c_2} = u_2$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\eta^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}\eta\eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\eta'^2 = \Omega(\eta, \eta'),$$

on a à considérer l'intégrale

$$\Delta^2 I = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \Omega(\eta, \eta')\, dx.$$

Si l'on substitue à η dans l'intervalle de x_2 à x la valeur $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, puis dans l'intervalle de x à x_3 la valeur $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$ et que l'on fasse $\eta = 0$ en dehors de ces intervalles, $\Delta^2 I$ sera seulement positive, à la condition, 1° que $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ (indépendamment de certaines positions particulières où il s'annule) soit constamment positif; 2° que $\Delta(x, x_0) = u_2^{(0)} u_1 - u_1^{(0)} u_2$ ne s'annule pas pour $x_0 < x < x_1$. Si $\Delta(x, x_0)$ ne s'annule pas non plus pour $x = x_1$, $\Delta^2 I$ est toujours positive pour le choix particulier fait de la fonction η; si, au contraire, $\Delta(x_1, x_0) = 0$, $\Delta^2 I$ ne peut pas encore devenir négative; mais elle peut s'annuler. Si maintenant on étudie la variation seconde pour des fonctions η quelconques (pourvu qu'elles soient continues en admettant des dérivées), il résulte de la comparaison avec les formes considérées précédemment que les conditions énoncées plus haut sont aussi suffisantes pour que la variation seconde reste toujours positive. Il n'y a que dans le cas où $\Delta(x, x_0)$, sans s'annuler entre x_0 et x_1, s'annule pour $x = x_1$ que la variation peut prendre la valeur zéro, sans devenir négative; alors le minimum n'est pas certain.

L'auteur développe le système analogue de conditions nécessaires et suffisantes pour le minimum de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \ldots, y_n, y'_n)\, dx,$$

en tenant compte du cas où l'on donne un système de conditions entre les x et les y_i, conditions qui peuvent contenir les premières dérivées des fonctions y_i. L'auteur donne une démonstration de la méthode des multiplicateurs de Lagrange seulement pour les problèmes des isopérimètres, c'est-à-dire pour les problèmes où les équations de condition sont données sous forme d'intégrales définies. (La démonstration générale a été depuis donnée par Mayer dans le t. XXVI des *Math. Ann.*). De plus, l'auteur exprime le critérium du minimum

par deux conditions qui sont complètement analogues à celles données dans le cas d'une seule fonction y. Il n'y a ici encore que dans le cas où le déterminant $\Delta(x_0, x)$ s'annule pour $x = x_1$ que la variation seconde peut prendre la valeur zéro sans devenir négative. Le minimum dépend alors des variations d'ordre supérieur.

Dans une remarque finale, l'auteur attire l'attention sur ce fait que le minimum ne peut être déterminé au moyen de la variation seconde que relativement à des courbes voisines, en entendant par courbes voisines non seulement celles qui se trouvent dans une petite portion de surfaces comprenant la courbe minima, mais aussi celles pour lesquelles les tangentes sont à peu près parallèles (η' ne dépasse pas certaines limites). S'il s'agit de minimum dans le sens le plus large, c'est-à-dire dans le cas où l'on considère toutes les courbes tracées sur la portion de surface, les critériums établis sont encore nécessaires; mais, comme l'a montré Weierstrass sur des exemples, ils ne sont plus suffisants.

Schur (*F.*). — Sur le théorème de Pohlke. (596-597).

Rohn (*K.*). — Une construction linéaire simple des courbes planes rationnelles du cinquième ordre. (598-602).

Tome XXVI; 1886.

Krause. — Sur quelques équations différentielles qui se présentent dans la théorie des fonctions thêta à deux variables. Ire et IIe Partie. (1-25).

La première Partie contient deux démonstrations des relations de Rosenhain entre les dérivées des fonctions thêta et ces fonctions elles-mêmes lorsque l'argument est égal à zéro, puis un système de neuf relations entre les multiplicateurs et les modules primitifs et transformés. Dans la seconde Partie, l'auteur établit les équations différentielles auxquelles satisfont le numérateur et le dénominateur des équations de transformation dans la théorie des fonctions hyperelliptiques du premier ordre.

Schubert (*H.*). — Les généralisations dans l'espace à n dimensions des nombres fondamentaux de notre espace. (26-51).

§ 1. Terminologie. § 2. Théorèmes généraux sur les espaces linéaires et leurs dimensions. § 3. Énumération et désignation des conditions fondamentales pour un espace linéaire à n dimensions $[n]$. § 4. Détermination de tous les nombres fondamentaux du rayon dans un $[n]$. § 5. Nombre des rayons d'un $[n]$ qui satisfont à la simple condition de couper un nombre quelconque de fois un $[n-2]$ donné et remplissent de plus une condition fondamentale quelconque. § 6. Nombre des rayons d'un $[n]$ qui satisfont à la double condition de couper un nombre quelconque de fois un $[n-3]$ donné et de plus remplissent une condition fondamentale quelconque.

Schubert (*H.*). — La généralisation dans l'espace à n dimensions des nombres relatifs aux tangentes à contact d'ordre supérieur d'une surface du $m^{\text{ième}}$ degré. (52-73).

Le but principal du présent Mémoire est la solution de la question suivante : Étant donné dans un espace linéaire à n dimensions un espace, lieu de points, à $n-1$ dimensions et du $m^{\text{ième}}$ degré R_{n-1}^{m}, exprimer en fonction des nombres n et m le nombre des droites qui touchent l'espace R_{n-1}^{m} en $i+1$ points infiniment voisins et satisfont elles-mêmes à une condition fondamentale, le point de contact pouvant en outre remplir aussi une telle condition.

Mayer (*A.*). — Fondement de la méthode des multiplicateurs de Lagrange dans le calcul des variations. (74-82).

Ce Mémoire contient pour la première fois une démonstration sérieuse du procédé de Lagrange qui consiste à introduire des multiplicateurs pour transformer les problèmes du calcul des variations dans le cas où existent des équations de condition contenant les dérivées en problèmes où n'existent plus d'équations de condition.

Stolz (*O.*). — La convergence régulière des fonctions de plusieurs variables vers les valeurs limites qui se présentent, en sorte que quelques-unes d'entre elles s'approchent de valeurs constantes.

L'auteur montre sur plusieurs problèmes, tirés pour la plupart de la théorie des intégrales simples et doubles, que la notion de convergence régulière est nécessaire; en partie pour pouvoir formuler exactement, en partie pour simplifier les résultats. Le théorème que l'intégration d'une intégrale double peut, dans le cas où la forme de la courbe limite est suffisamment simple, se ramener à deux intégrations successives, est démontré par l'auteur avec une restriction qui, d'après ce qu'a montré Harnack (même volume, p. 566), n'est pas nécessaire.

Papperitz (*E.*). — Sur les fonctions s parentes (seconde Communication). (97-105).

Cette Communication contient la discussion et l'exposé explicite des relations qui existent entre quatre fonctions s parentes et que l'auteur a établies d'une façon générale dans sa première Communication (*Math. Ann.*, t. XXV).

Brioschi (*F.*). — Sur quelques équations différentielles. (106-109).

Sur les propriétés relatives aux équations différentielles qui correspondent aux transformations des fonctions elliptiques.

Kœnigsberger (*L.*). — Sur l'abaissement de l'ordre d'une équation différentielle. (110-116).

L'auteur montre pourquoi les théorèmes sur la réduction des équations différentielles linéaires homogènes qui ont en commun avec une équation de même nature, mais d'ordre inférieur, une intégrale, ne peuvent être étendus aux équations différentielles algébriques quelconques.

Hurwitz (*A.*). — Sur quelques équations différentielles particulières linéaires et homogènes. (117-126).

L'auteur forme tout d'abord l'équation différentielle du troisième ordre qui se présente dans la transformation du septième ordre des fonctions elliptiques et qui a été établie par Halphen (*Math. Ann.*, t. XXIV) à la suite d'une remarque de Klein. L'intégrale générale de cette équation différentielle peut être donnée explicitement et offre un exemple intéressant de l'intégration donnée par Poincaré au moyen de fonctions univoques. L'auteur étend ensuite ses recherches aux transformations de degré quelconque, et il traite complètement le cas de $n = 8$.

Wiltheiss (*E.*). — Sur les fonctions thêta qui, après une transformation, se décomposent en un produit de fonctions thêta. (127-142).

Nœther (*M.*). — Note sur les courbes normales pour $p = 5, 6, 7$. (143-156).

Parmi les courbes normales d'une classe algébrique de genre p, celles qui se présentent le plus naturellement sont celles qui sont définies par toutes les relations qui existent entre les p fonctions. Cette représentation est possible pour toutes les classes, sauf pour les courbes hyperelliptiques. Si alors les $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ relations quadratiques linéairement indépendantes qui existent fournissent $p-2$ relations indépendantes l'une de l'autre, ce qui a lieu pour $p \geqq 5$ et pour des valeurs non particularisées des modules, ces relations définissent déjà la courbe et, par des transformations linéaires, il doit être possible de les mettre sous une forme où les $3p-3$ modules soient explicitement en évidence. L'auteur communique des formes canoniques de cette nature pour les cas principaux de $p = 5, 6, 7$.

Braunmühl (*A. v.*). — Notice sur les lignes géodésiques de la surface du second degré à trois axes inégaux qui se laissent représenter au moyen des fonctions elliptiques. (151-153).

Meyer (*F.*). — Sur la courbe elliptique du cinquième ordre dans l'espace à quatre dimensions. (154-156).

Pringsheim (*A.*). — Sur la multiplication des séries trigonométriques.

Il y a lieu de citer comme résultat de ces recherches le théorème suivant :

« Si l'on représente par a_ν, a'_ν, b_ν, b'_ν des quantités toutes de même signe ou bien alternativement de signes contraires et qui, lorsque ν augmente, décroissent constamment pour s'annuler avec $\nu = \infty$ en sorte que les séries $\Sigma a_\nu a'_\nu$, $\Sigma a_\nu b'_\nu$, $\Sigma b_\nu a'_\nu$, $\Sigma b_\nu b'_\nu$ convergent absolument, le produit des séries trigonométriques

$$a_0 + \Sigma(a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x) \quad \text{et} \quad a'_0 + \Sigma(a'_\nu \cos\nu x + b'_\nu \sin\nu x)$$

se forme par la règle de Cauchy. »

Pringsheim (*A.*). — Sur des expressions analytiques à discontinuités résolubles. (167-192).

La formation d'exemples de discontinuité résolubles avait été obtenue jusqu'ici au moyen d'expressions analytiques; l'auteur montre comment, en ayant recours à des séries à convergence non absolue, on peut former de la façon la plus simple des fonctions qui, en général, se comportent tout à fait régulièrement et présentent en certains points des discontinuités de cette nature.

Pringsheim (*A.*). — Représentation de la fonction numérique $E(x)$ (le plus grand entier contenu dans x) par une série infinie. (193-196).

Scheeffer (*L.*). — Sur la signification de la notion de maximum et de minimum dans le calcul des variations. (197-208).

Comme complément à son précédent travail sur le problème du calcul des variations, l'auteur traite complètement ici le cas le plus simple, celui d'une seule variable indépendante, la question de la détermination des conditions sous lesquelles on peut conclure l'existence d'un minimum (ou d'un maximum) de l'invariabilité du signe de la variation seconde, que l'on suppose ne pas devenir nulle. Il formule le résultat comme il suit : Soit, pour une fonction déterminée y, la première variation de l'intégrale $I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$ identiquement égal à zéro; supposons de plus que dans l'intervalle $x_0 x_1$ les dérivées partielles de $F(x, y, y')$ jusqu'au troisième ordre et le déterminant $\Delta(x, x_0)$ défini dans le travail précédent, ainsi que ses dérivées, sont finies et continues. Si, dans l'intervalle $x_0 x_1$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ a une valeur minima positive et si le déterminant $\Delta(x_0, x)$ ne s'annule ni dans l'intervalle $x_0 x_1$ ni au point x, non seulement la variation seconde est alors constamment positive, mais encore il y a aussi un minimum pour l'intégrale I, en ce sens que la différence

$$\Delta I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \Delta y, y' + \Delta y')\,dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

est positive pour toute fonction Δy, dont la valeur absolue reste toujours infé-

rieure à une certaine limite g, tandis que la valeur absolue de la dérivée $\Delta y'$ reste toujours au-dessous d'une certaine limite différente g'. Si, au contraire, $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ devient négatif dans l'intervalle $x_0 x_1$, ou bien si $\Delta(x_1 x_0)$ s'annule à l'intérieur du même intervalle, la variation seconde peut changer de signe et il résulte de là qu'il n'y a à proprement parler pas de minimum pour l'intégrale I.

Mehmke (*R.*). — Remarque sur les sous-déterminants des systèmes métriques. (209-210).

Pasch (*M.*). — Sur le quadrangle, le quadrilatère et la projectivité dans le plan. (211-218).

Pick (*G.*). — Sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques. IIe Partie. (219-230).

Le second Mémoire de l'auteur (le premier a paru dans le t. XXIV des *Math. Ann.*) contient une démonstration du théorème que les équations de la multiplication complexe sont irréductibles, même après l'adjonction de la racine carrée du déterminant qui correspond aux modules singuliers.

Voss (*A.*). — Sur les polygones de Poncelet-Zeuthen qui sont inscrits dans un lieu du second degré. (231-246).

Ce Mémoire contient une solution algébrique complète de cette question : construire un polygone fermé dont les sommets soient sur un lieu du second degré dans l'espace à n dimensions et dont les côtés passent respectivement par des point donnés. Pour $n = 3$, on retrouve les conditions algébriques relatives aux cycles, trouvées par Zeuthen sur les surfaces du second degré (*Math. Ann.*, t. XVIII).

Zeuthen (*H.-G.*). — Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre. Second article. (216-274).

§ 1. Propriété métrique des suites infinies de polygones inscrits à une surface quadrique et circonscrits à un polygone gauche. § 2. Sur les congruences engendrées par les figures projectives sur une quadrique. § 3. Extension de la propriété métrique des cycles.

Bacharach. — Sur le théorème de Cayley sur les points d'intersection. (275-299).

Le but de ce travail est de remplacer par des méthodes rigoureuses les démonstrations insuffisantes des théorèmes sur les systèmes de points d'intersection que l'on démontre d'ordinaire simplement par l'énumération des constantes. L'auteur s'appuie sur les théories algébriques de Nœther et de Brill (*Math. Ann.*, t. VI et VII). Le théorème de Cayley prend alors la forme plus précise

qui suit : une courbe du $r^{\text{ième}}$ ordre qui passe par

$$mn - \frac{1}{2}(\gamma - 1)(\gamma - 2) \qquad (\gamma = m + n - r)$$

points d'intersection de deux courbes d'ordre m et n

$$(r \geqq m \text{ et } r \geqq n, \quad r \leqq m + n - 3)$$

contient aussi, en général, les

$$\frac{1}{2}(\gamma - 1)(\gamma - 2)$$

autres points d'intersection. Mais, si ces

$$\delta = \frac{1}{2}(\gamma - 1)(\gamma - 2)$$

points se trouvent sur une courbe d'ordre $(\gamma - 3)$, une courbe arbitraire qui passe par les $mn - \delta$ premiers points ne passe pas nécessairement par les δ autres.

Dans les derniers paragraphes, l'auteur détermine la multiplicité des courbes du $r^{\text{ième}}$ ordre qui passent par les $mn - \delta$ points d'intersection aussi bien dans le cas général que dans les cas d'exception.

Brill (*A.*). — Sur les espaces pseudo-sphériques à trois dimensions. (300-303).

Sturm (*R.*). — Exemples de transformations de Cremona. (304-308).

Gierster (*I.*). — Sur le groupe de Galois des équations modulaires lorsque le degré de la transformation est la puissance d'un premier > 2. (309-368).

Section I. Propriétés de l'équation particulière de division. — § 1. Définition et propriétés des diviseurs de la fonction p. § 2. Réduction des diviseurs du $n^{\text{ième}}$ degré de la fonction p. § 3. Résolvantes de l'équation de division réduite.

Section II. Introduction de la quantité $f\left(\frac{\tilde{w}}{n}, \tilde{w}'\right)$ et sa signification dans la transformation des fonctions elliptiques. § 4. Sur les fonctions transformées

$$\sigma(u) = \sigma\left(u + \frac{\tilde{w}}{n}, \tilde{w}'\right) \qquad \text{et} \qquad p(u) = p\left(u + \frac{\tilde{w}}{n}, \tilde{w}'\right).$$

§ 5. Sur le nombre des transformations du $m^{\text{ième}}$ degré. § 6. Introduction de la quantité auxiliaire $f\left(\frac{\tilde{w}}{n}, \tilde{w}'\right) = (-1)^m \prod_{\alpha=1}^{\alpha=m} \sigma_{\alpha p, \alpha q}$ pour $n = 2m + 1$ et pour n

pair $f^2 = -\prod_{\alpha=1}^{\alpha=n-1} \sigma_{\alpha p, \alpha q}$, où $\sigma_{\alpha p, \alpha q} = e^{-2\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 \eta \tilde{w}} \sigma\left(\frac{2\alpha\tilde{w}}{n}\right)$. § 7. Différentes représentations de la quantité f. § 8. Déduction d'une équation aux dérivées partielles fondamentales. § 9. Formation des fonctions symétriques élémentaires des diviseurs de la fonction p en fonction rationnelle de f. § 10. Calcul des invariants $\overline{g_2}, \overline{g_3}$ de la fonction transformée $p(u)$.

Section IV. Étude de la quantité $Q(w, w') = \Delta^{\frac{1}{24}}(w, w')$, $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$ dans une transformation linéaire des périodes. § 11. Exposé du problème. § 12. Définition de la fonction $\Phi(u \mid w, w') = -\frac{1}{2} Q e^{-\frac{3\eta u^2}{2w}} p'(u) \sigma^3(u)$. § 13. Transformations linéaires de la fonction $\Phi(u)$. § 14. Réduction aux sommes de Gauss. § 15. Tableaux.

Section IV. — Théorie de l'équation f lorsque n est un nombre premier différent de 2 et de 3. § 16. Démonstration que dans le cas présent f^2 satisfait à une équation de degré $(n+1)$. § 17. Les $n+1$ racines de l'équation f. § 19. Exemples pour $n = 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$. Définition de l'équation $L = Q^{n-1} f$. § 20. Calcul des quantités G_1, G_2, G_3 pour $n = 5$ et $n = 7$. § 21. Calcul des invariants $\overline{g_2}, \overline{g_3}$ et $\overline{\gamma_2}, \overline{\gamma_3}$ de la fonction transformée pour $n = 5$ et $n = 7$.

Section V. Théorie de l'équation f lorsque n est un nombre composé de la forme $6l \pm 1$. § 22. Transformation répétée. § 23. Réduction de l'équation f lorsque n est un carré de la forme $6l + 1$. § 24. Les $a(a+1)$ racines de l'équation f, lorsque n est le carré d'un nombre premier a et a la forme $6l + 1$. § 25. Transformation du 25e degré.

Section VI. Théorie de l'équation f, lorsque n est un nombre composé de la forme $6l \pm 2$. § 27. La transformation du second degré. § 28. L'équation f. § 29. L'équation L pour $n = 4$ et $n = 8$.

Section VII. Théorie de l'équation f, lorsque n est divisible par 3. § 30. Transformation du troisième degré. § 31. Théorie de l'équation f. § 32. L'équation f pour $n = 9$. § 33. Théorie de l'équation f lorsque $n = 6l$.

Klein (*F.*). — Recherches nouvelles dans le domaine des fonctions elliptiques. (455-464).

Analyse par Klein des travaux faits sous sa direction dans le séminaire mathématique de Leipzig et publiés comme dissertations. Il s'agit des travaux de Fricke, Fiedler, Friedrich, Biedermann relatifs à la théorie des fonctions modulaires et de ceux de Nimsch, Molien et Engel où sont traités des problèmes par la méthode de Weierstrass. En outre, l'auteur analyse rapidement son travail : « Les courbes normales elliptiques du $n^{\text{ième}}$ ordre et les modules correspondants du $n^{\text{ième}}$ échelon », paru dans le tome XIV de la *Kön. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften.*

Sturm (*R.*). — Sur les collinéations et les corrélations qui trans-

forment en elles-mêmes les surfaces du second degré ou les cubiques gauches (465-508).

L'auteur expose une solution purement géométrique du problème qui, jusqu'ici, a été discuté pour les surfaces du deuxième degré surtout algébriquement au moyen de substitutions linéaires de formes quadratiques, mais n'avait pas encore été du tout étudié en ce qui concerne les cubiques gauches.

Meyer (*F.*). — Extension d'un procédé de Dirichlet à la transformation d'expressions différentielles telles que $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$, en coordonnées curvilignes générales. (509-515).

Weltzien (*C.*). — Théorie des points doubles et des tangentes doubles des courbes planes rationnelles. (516-533).

En introduisant la somme de paramètres du point double $t_1 + t_2 = \sigma$ et leur produit $t_1 t_2 = \tau$, on est conduit pour σ et aussi pour τ à une équation de degré $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$; de même, on peut obtenir une équation réduite pour le paramètre des points de contact des tangentes doubles. Cette Note donne la forme explicite des résultats pour $n = 4, 5, 6$.

Heymann (*W.*). — Sur l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{d^r y}{dx^r} + A_m \frac{d^m y}{[dl(x)]^m} + A_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{[dl(x)]^{m-1}} + \cdots + A_0 y = 0$$

et application à la théorie des équations trinômes.

L'auteur montre d'abord que les racines d'une équation trinôme

$$z^n - az - b = 0$$

que l'on peut toujours mettre sous la forme $y^n - ny - (n-1)x = 0$ ou bien $\eta^n - n\xi\eta - (n-1) = 0$, si l'on considère y comme fonction de x (ou η comme fonction de ξ), satisfont à une équation différentielle de la forme ci-dessus. L'intégrale générale de cette équation différentielle peut être, d'après une formule de Spitzer démontrée par l'auteur, exprimée par des intégrales multiples ou aussi développée en série; de la sorte, en spécialisant convenablement les constantes, on arrive à de nouvelles représentations des racines des équations trinômes.

Finsterwalder (*S.*). — Sur la construction de l'ellipsoïde au moyen de fils. (546-556).

Démonstration géométrique de la construction trouvée par Staude au moyen

d'intégrales hyperelliptiques, au moyen d'un fil tordu enroulé autour de deux surfaces du second degré homofocales.

Rodenberg (*C.*). — Déduction par la Géométrie descriptive des propriétés polaires des espaces algébriques. (557-565).

Harnack (*Ax.*). — Remarque sur la théorie des intégrales doubles. (566-568).

Objection contre les conclusions du Mémoire de Stolz cité précédemment.

Krause (*M.*). — Sur les fonctions thêta dont les caractéristiques sont des nombres fractionnaires. (569-589).

§ 1. Introduction des fonctions thêta générales. Leurs propriétés et leur représentation au moyen de paramètres. § 2. Cas de $n = 3$. § 3. Cas de $n = 5$. § 4. Méthode pour établir les relations entre les fonctions thêta générales. Séries de Fourier pour les puissances et les produits des fonctions thêta. § 5. Démonstration simple de la formule de Prym.

Gierster (*I.*). — Remarque sur le Mémoire : *Notice sur les équations modulaires pour un degré de transformation composé* (*Math. Ann.*, t, XIV). (590-592).

Possé (*C.*). — Quelques remarques sur une certaine question de minimum. (593-596).

Soit $f(x)$ une fonction de x toujours décroissante dans les limites zéro et 1 de x; supposons que la valeur de $f(1)$, ainsi que les valeurs des intégrales

$$a_2 = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx, \qquad a_4 = \int_0^1 x^4 f(x)\,dx, \qquad \ldots, \qquad a_{2n} = \int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx.$$

soient données. Il s'agit de trouver d'une façon précise la limite inférieure de la valeur $f(0)$.

Ax. H.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE [1]. — 3e série.

Tome V; 1886, 2e semestre.

Cesaro (*E.*). — Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler. (305-327).

L'auteur définit les nombres de Bernoulli par l'égalité symbolique

$$(B+1)^\nu - B^\nu = \nu,$$

et part immédiatement de là pour établir une formule générale, due à Maclaurin, et en déduire diverses applications fondées sur l'emploi du calcul symbolique. Il procède de même pour les nombres d'Euler, définis par l'égalité symbolique

$$(E+1)^\nu + (E-1)^\nu = 0.$$

Puis il étudie les nombres ultra-bernoulliens et ultra-eulériens, respectivement définis par les relations symboliques

$$(\mathcal{B}+1)^\nu - a\mathcal{B}^\nu = \nu, \qquad (\mathcal{E}+1)^\nu + a(\mathcal{E}-1)^\nu = 0,$$

et montre les relations qui les lient analytiquement les uns aux autres.

Le Mémoire se termine par des applications aux intégrales définies. Cette étude forme une suite, des plus intéressantes, aux précédents travaux de M. Cesaro sur le calcul symbolique et l'analyse en général, et nous fait désirer la publication, qu'il annonce comme prochaine, des applications de ces calculs nouveaux à la théorie des nombres.

Du Châtenet (*M.*). — Étude sur les paris de courses. (327-347, 380-395, 408-424).

Étude très complète de la question, déjà traitée jadis par M. E. Dormoy d'une façon très remarquable. Le présent Mémoire a peut-être un caractère plus nettement mathématique; nous regrettons de devoir nous borner à la reproduction des titres des divisions principales :

Préliminaires. Livre du preneur de chevaux. Livre du donneur de chevaux. Chevaux placés deuxièmes. Chevaux placés troisièmes. Chevaux placés dans les deux ou trois premiers. Paris sur le premier et le second. Paris sur les places relatives. Paris sur une partie des chevaux. Paris sur plusieurs courses. Poule. Paris mutuels. Arbitrages simples. Arbitrages complexes.

Pomey (*J.-B.*). — Sur la limite de $\sum_1^n \frac{1}{p} - \sum_1^m \frac{1}{q}$ lorsque p et q

[1] Voir *Bulletin*, t. XI, p. 77

parcourent toutes les valeurs entières positives jusqu'à n et m respectivement, et que n et m augmentent indéfiniment, tandis que leur rapport tend vers une limite déterminée. (348-352).

L'auteur, par deux démonstrations différentes, trouve pour cette limite $\log\left(\frac{n}{m}\right)$, $\left(\frac{n}{m}\right)$, représentant $\lim \frac{n}{m}$. A rapprocher d'une étude de M. C.-A. Laisant, *Sur certaines questions de limites* (Association française pour l'avancement des Sciences; Congrès d'Alger, 1881).

Thiré (*A.*). — Sur la théorie du planimètre d'Amsler. (353-364).

Description et théorie résumées de l'instrument si ingénieux et si pratique dû à M. Amsler. Des notices analogues avaient paru, il y a déjà un certain nombre d'années, dans le *Mémorial de l'officier du Génie*, dans les *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, et dans la *Nouvelle correspondance mathématique*. Celle de M. Thiré n'en est ni moins utile, ni moins intéressante.

Mollame (*V.*). — Sur les sommes des produits k à k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) des nombres naturels. (364-370).

Désignant par $S_{k,n}$ la somme des produits k à k des n premiers nombres entiers, et remarquant que $S_{k,n} = 0$ si $k > 0$, $S_{k,n} = n!$ si $k = n$, M. Mollame établit une formule, plus générale que celle du binôme, contenant les expressions S, et qui permet de les déduire successivement les unes des autres par voie de récurrence. La comparaison de deux formules différentes pour $S_{2,n}$ lui donne l'identité $1.2^2 + 2.3^2 + \ldots + (n-1)n^2 = \frac{1}{3.4}(n+1)n(n-1)(3n+2)$, facile d'ailleurs à établir directement.

D'Ocagne (*M.*). — De la déviation dans l'ellipse. (370-380).

M étant un point d'une ellipse, MT la tangente, M′ le point de même abscisse sur la circonférence construite sur le grand axe comme diamètre, M′T la tangente à cette circonférence, M. d'Ocagne appelle *déviation* l'angle MTM′ des deux tangentes. Il cherche la relation entre la déviation et l'anomalie excentrique, étudie les points de déviation maxima, et énonce à ce sujet plusieurs propriétés géométriques, parmi lesquelles nous citerons la suivante : « Le rayon de courbure en un point de déviation maxima d'une ellipse est égal à la moyenne géométrique des demi-axes. »

École Normale supérieure (Concours de 1885). — Énoncés des compositions : Mathématique, Physique. (396-397).

Correspondance. — Extrait d'une Lettre de M. *H. Brocard* : Sur les courbes pour lesquelles la projection du rayon de cour-

bure sur le rayon vecteur est avec lui dans un rapport constant. (397-398).

Publications récentes. — (398-400).

Un ancien élève de Mathématiques spéciales. — Composition mathématique pour l'admission à l'École Polytechnique en 1886. (401-408).

Solution géométrique fort élégante, accompagnée de nombreuses remarques. Le problème, relatif à un système de deux hyperboles équilatères, n'était pas exempt de difficultés, même par le calcul.

Rémond (*A.*). — Sur un système de coniques dont l'équation a ses coefficients fonctions linéaires de deux paramètres. (424-432).

L'auteur se propose de faire rentrer dans le cadre des Mathématiques spéciales cette étude qui, d'après Salmon, se rattache à celle des cubiques. Il se livre d'abord à une discussion très complète sur la nature de la conique représentée, suivant les cas, et examine ensuite le cas particulier où la conique se réduit à un système de deux droites.

Laurent (*H.*). — Mémoire sur les équivalences algébriques et l'élimination. (432-447, 456-460).

La théorie développée par l'auteur est fondée sur la considération des *polynômes réduits*. Après le développement de principes généraux sur les équivalences algébriques, il étudie celles relatives à un diviseur unique de la forme $i^k \pm 1$. L'application à la théorie de l'élimination le conduit à plusieurs propositions nouvelles. On notera également des conséquences géométriques fort curieuses.

Publications récentes. — (448).

Cesaro (*E.*). — Sur l'évaluation approchée de certaines séries. (449-456).

Application d'une formule contenue dans un précédent article du même auteur, *Sur la série de Lambert* (*Nouv. Ann.*, p. 106; 1886). Emploi de la fonction harmonique $H(x) = \int_0^1 \frac{1-\varphi^x}{1-\varphi} d\varphi$ que l'on rencontre fréquemment dans le calcul des éventualités arithmétiques, cultivé si brillamment par M. Cesaro.

Pirondini (*G.*). — Note géométrique. (460-480).

Étude sur les courbes planes et leurs développées successives; énoncés de plusieurs théorèmes, notamment sur la similitude des développées et des primitives. Extension à certaines questions de Géométrie dans l'espace, et notamment aux lignes sphériques.

Mangeot. — Note sur l'hyperboloïde. (480-483).

L'auteur déduit de la théorie des invariants quelques propriétés des génératrices de l'hyperboloïde à une nappe.

Pomey (*J.-B.*). — Sur un problème de potentiel. (483-488).

Application d'une question de Géométrie plane, relative à un système de deux cercles.

Cesaro (*E.*). — Transformations algébriques par le calcul des différences. (489-492).

Formule symbolique, représentant la fonction $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ au moyen des différences successives du premier terme d'une série arbitraire u_0, u_1, u_2, ... Application aux nombres de Bernoulli.

Correspondance. — Extrait d'une Lettre du professeur *Genese* : A propos d'une démonstration d'un théorème de Steiner, par M. *Tarry*. (493-494).

Nécrologie. — Annonce de la mort d'Édouard Laguerre, décédé le 13 août 1886; discours prononcés à ses obsèques par MM. *Bertrand* et *Halphen*. (494-496).

Collignon (*E.*). — Note sur les polygones fermés (applications de la Statique à la Géométrie). (497-510).

Comme point de départ, M. Collignon étudie le système de masses égales, alternativement positives et négatives, placées aux milieux des côtés d'un polygone fermé. Cela le conduit à des solutions simples de certains problèmes sur les polygones. Ces considérations, présentées avec beaucoup d'élégance et de clarté, ont un lien visible avec celles qui se déduisent de la méthode des équipollences, et qui donnent à peu près les mêmes résultats.

Cesaro (*E.*). — Les lignes barycentriques. (511-520).

L'auteur appelle *barycentrique* d'une courbe le lieu des barycentres des arcs comptés à partir d'une origine fixe. Cette étude forme une suite à deux articles précédents de M. Cesaro, *Sur les lignes de poursuite* et *Sur l'emploi des coordonnées intrinsèques*. Étude spéciale de la *clothoïde*, ligne plane dont la courbure varie proportionnellement à l'arc. Examen de la question pour les courbes gauches.

Pomey (*J.-B.*). — Enveloppes des côtés d'un carré invariable dont deux sommets décrivent deux droites rectangulaires. (520-530).

On suppose que les deux sommets sont A, B et l'on cherche les enveloppes de AB et de CD. L'auteur en donne les équations, en détermine la forme, et en démontre diverses propriétés. Ces deux enveloppes sont deux courbes parallèles.

Pomey (*J.-B.*). — Sur une fonction qui a une ligne d'infinis. (530-533).

Formation *a priori* d'une telle fonction, au moyen de la série double ayant pour terme général $\frac{1}{(x+\omega y)^{1+\alpha}}$.

Strékalof (*V. de*). — Note sur l'intégrale $\int \frac{dz}{(1+z^2)^2}$. (533-534).

Solution plus simple que celle précédemment indiquée par M. J.-B. Pomey pour la détermination de cette intégrale.

D'Ocagne (*M.*). — Note sur la déviation dans l'ellipse. (534-535).

Complément d'un article antérieur (*voir* plus haut). Indication d'un procédé tout élémentaire pour l'étude de la déviation dans l'ellipse.

Cahen (*E.*). — Note sur la théorie des séries. (535-538).

Examen du cas où $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 par valeurs inférieures à 1. Règle complémentaire de celle de Duhamel; application à deux exemples.

A. A. — Circonférence tangente à trois circonférences et sphère tangente à quatre sphères. (539-540).

Solutions très simples, donnant la construction de Gergonne, et pour les sphères une construction analogue.

Bibliographie. — *A. Mannheim :* Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique; 2e édition, gr. in-8°, 1886; avertissement de l'auteur. — *A. Tartinville :* Théorie des équations et des inéquations du premier et du second degré à une inconnue; gr. in-4°, 1886. — *J. de la Gournerie* et *E. Lebon :* Théorie et construction de l'appareil hélicoïdal des arches biaises; 1886. — *G.-F. Montecerde :* Elementi di Geometria projettiva, 1886. (540-544).

Publications récentes. — (544).

Desboves. — Résolution, en nombres entiers et sous sa forme la plus générale, de l'équation cubique, homogène, à trois inconnues. (545-579).

Cet article, dit l'auteur dans une Note placée dès le début, peut être considéré comme un complément du Mémoire de Cauchy sur la même question ; seulement, pour que le sujet fût complètement traité, j'ai reproduit deux systèmes de formules trouvées par l'illustre géomètre, mais en simplifiant les démonstrations. L'étude très complète et très rigoureuse de M. Desboves comprend un grand nombre de théorèmes, dont plusieurs sont nouveaux et paraissent avoir échappé à Cauchy. Il y a là en somme une contribution nouvelle et importante à cette branche difficile et peu avancée de la Science mathématique : l'analyse indéterminée d'ordre supérieur.

Agrégation des Sciences mathématiques (Concours de 1886). — Énoncés des compositions : Mathématiques élémentaires, Mathématiques spéciales, Analyse et ses applications géométriques, Mécanique, Calcul, Épure. (579-583).

Publications récentes. — (583). A. L.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XI.

294

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XI; 1887. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Acta mathematica; T. III, 1883-1884. — 137-149.

Annales de la Société scientifique de Bruxelles; t. VIII, 1883-1884. — 230-234.

Annales des Mines; T. IV, 8e série, 2e semestre, 1883; T. VI, 2e semestre, 1884; T. VIII, 2e semestre, 1885. — 121-124.

Annales des Ponts et Chaussées; 6e série, T. IV, 2e semestre, 1882; T. V, 1er semestre, 1883; T. VI, 2e semestre, 1883; T. VII, 1er semestre, 1884; T. VIII, 2e semestre, 1884; T. IX, 1er semestre, 1885; T. X, 2e semestre, 1885. — 17-35.

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino; T. XX, 1884-1885. — 183-186.

Bulletins de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique; 3e série, T. VII, janvier à juin, 1884. — 221-223.

Bulletin de la Société de Statistique des Sciences naturelles et des Arts industriels du département de l'Isère; 3e série, T. V, 1876; T. VII, 1878; T. VIII, 1879; T. IX, 1879; T. X, 1880; T. XI, 1882. — 127-132.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche; T. XVII, 1884. — 132-137.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences; T. C, 1885. — 149-169, 199-221.

Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas; T. VI, 1885. — 170-176.

Journal de l'École Polytechnique; LVe Cahier, 1885. — 124-127.

Journal des Actuaires français; T. VI, 1877; T. VII, 1878; T. VIII, 1879. — 15-17.

Journal für die reine und angewandte Mathematik; T. XCV, 1883; T. XCVI, 1884. — 58-76.

Mathematische Annalen; T. XXIV, 1884; T. XXV, 1885; T. XXVI, 1886. — 5-14, 261-277.

Mathésis, publié par P. Mansion et J. Neuberg; T. IV, 1884. — 225-229.

Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique; T. XXXVI, 1884, 223.

Mémoires de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique; T. XLV, 1884 — 223-225.

Memorie dell'Accademia dell'Istituto di Bologna; 3e série, T. X, 1879. — 180-183.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 3e série, T. IV, 1885. — 3e série, T. V, 1er semestre, 1886. — 3e série, T. V, 2e semestre, 1886. — 36-51, 77-84, 278-283.

Philosophical Transactions of the Royal Society of London: Vol. 174, 1883. — 197-198.

Proceedings of the Royal Society of London; T. XXIV à XXXIII, 1875-1882. — 249-256.

The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics: T. XXI, 1885. — 257-261.

Rendiconti della R. Accademia dei Leincei, 4e série, T. I, 1884-1885; 3e série, T. X, 1881; T. XI, 1881; T. XII, 1882; T. XIII, 1882; T. XIV, 1883; T. XV, 1883; T. XVI, 1883; T. XVII, 1884; T. XVIII, 1883-1884; T. XIX, 1884. — 176-180, 186-196.

Revue d'Artillerie; T. XXIII, octobre 1883 à mars 1884; T. XXIV, avril-septembre, 1884; T. XXV, octobre 1884 à mars 1885; T. XXVI, avril-septembre 1885; T. XXVII, octobre 1886 à mars 1886. — 51-57.

Sitzungsberichte der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin; T. I, 1882. — 85-121; T. II, 1883. — 234-249.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Adams (J.-C.). 251, 252.
Adams (W.-G.). 249.
Achard (M.-A.). 15, 16.
Allard (E.). 22, 25.
Andoyer. 169.
André (D.). 50.
Antomari (X.). 38, 41.
Appell. 220.
Aschieri (F.). 181, 182.
Asutoh Mukohopadhyay. 258.
Babek (K.). 266.
Bacharach. 273.
Baderneau (A.). 123.
Barbarin. 50, 226, 228.
Barbet. 31.
Barbier. 204, 208.
Barisien (E.). 46, 47, 48, 49.
Bassani (H.). 50.
Basset. 261.
Basso (G.). 185.
Batelli (A.). 185.
Battaglini (G.). 176, 187.
Baule (A.). 234.
Bayard (H.). 48.
Bazaine. 19.
Bazin. 14.
Beltrami (E.). 142, 180, 183.
Bendixson. 214, 216.
Bénézech (E.). 43.
Benoît. 77, 212.
Berger. 122.
Berthot. 164.
Bertrand (C.). 281.
Besso (D.). 186, 191, 192, 195, 196.
Bichler. 39.
Bloch (B.). 27.
Bocklen (O.), 73.
Boije af Gennas. 228.
Bombicci (L.). 193.
Boncompagni (B.). 84, 137.
Boschi (P.). 182.
Bossut (L.). 45.
Bougaieff. 164, 165.
Bourguet. 204.
Boussinesq (J.). 26, 161, 163.
Braccialini. 56.
Brambilla (A.). 185.
Braunmühl (A. v.). 271.
Breton (Ph.). 127, 129, 130.
Brill (A.). 274.
Brillouin. 209.
Brioschi (F.). 178, 252, 270.
Brisse (Ch.). 50.
Brocard (H.). 39, 50, 228, 229.
Brodie (B.-C.). 250.
Cadart (G.). 30.
Cahen (E.). 281.
Callandreau. 149, 152, 165, 166, 220.
Canevazzi (S.). 183.
Capelli (A.). 190, 191, 196.
Carnoy (J.). 232.
Casey (J.). 251, 252.
Caspary (F.). 59, 73, 76.
Catalan (E.). 50, 81, 221, 224, 225, 227.
Cavalli (E.). 183, 186.
Cayley (A.). 251, 252, 253, 254, 257, 258, 259, 260, 263.
Cesáro (E.). 36, 37, 41, 42, 44, 46, 48, 77, 78, 79, 81, 170, 177, 226, 227, 228, 278, 280, 281.
Cerruti (V.). 191.
Charlon (H.). 15, 16.
Charrier (A.). 185.
Chatenet (M. du). 79, 80, 82, 278.
Chizzoni (F.). 196.
Chree (C.). 257, 258, 260.
Chrétien (E.). 50.
Clifford (W.-K.). 252.

Coates (C.-V.). 258.
Cohen. 21.
Colas (A.). 49.
Collignon (E.). 30, 32, 281.
Cremona (L.). 45.
Cunningham (A.). 250.
Cunq (L.). 33.
Dallas. 257.
Darboux. 168, 199, 202, 204.
Darwin (G.-H.). 253, 254, 255.
Dehais (E.). 17.
Delsaux (J.). 231.
Desboves. 81, 283.
Desdouits. 124.
Despeyrous. 79.
Dewulf (E.). 37.
Dormoy (E.). 15, 16.
Dorna (A.). 184, 185, 186.
Drouhot (G.). 48.
Droz. 47.
Duguet. 51, 52, 54.
Duhem. 150.
Dumont (F.). 84.
Duponchel. 20.
Durand-Claye (L.). 22, 31, 35.
Ellis (A.). 255.
Escary. 38.
Estienne (J.-E.). 38.
Fais (A.). 182.
Fargue. 25, 26.
Fauquemberghe. 45, 47.
Favaro (A.). 133, 135, 137.
Ferreira dos Santos. 170.
Finstervalder (S.). 276.
Flamant. 17, 25, 29, 31.
Folie (F.). 221, 222, 223.
Fonseca Barros (H. da). 172.
Fontaneau (E.). 17.
Forsyth. 197, 256, 259, 261.
Fortet (D.). 19.
Fouret (G.). 16, 17, 44, 77, 218.
Fournier. 151.
Franke. 169.
Frattini (G.). 193, 194.
Frœbenius (G.). 66, 71, 72.
Fuchs. 99, 242.
Gallop (E.-G.). 259.
Garibaldi (P.-M.). 180.
Gautero (G.). 182.
Gebbia (M.). 191.
Gelin (E.). 226.
Genaille (H.). 50.
Geneix-Martin (A.). 49.
Genese. 281.
Genocchi. 39, 133, 134, 184, 196.
Gerono. 47.
Ghedeon (D.). 30.
Giat (P.). 42, 43.
Giester (I.). 274, 277.
Gilbert (Ph.). 200, 212, 214, 229, 230, 231, 233.
Gilliot. 26.
Glaisher (E.). 226.
Glaisher (J.-W.-L.). 249, 253, 257.
Gobin (A.). 23.
Godefroy (R.). 80, 82, 83.
Goffart (N.). 40, 45.
Gomes Teixeira (F.). 45, 77, 171, 172, 175.
Gordan (P.). 266.
Gournerie (J. de la). 49, 282.
Goursat (G.). 12, 153, 157, 167, 205.
Govi (G.). 194.
Gremigni (M.). 193.
Gruey. 161, 163.
Guccia. 210, 212.
Guibal. 21.
Guidi (C.). 185.
Guillaume. 33.
Guimaraes (R.). 172.
Gyldén. 203.
Halphen. 12, 36, 146, 163, 168, 208, 218, 281.
Harnack (Ax.). 8, 264, 277.
Hassidakis (J.-N.). 62.
Haton de la Goupillière. 122, 162, 199.
Hauck (G.). 58.
Haughton (S.). 249, 250, 251.
Hausser (A.-E.). 33.
Heen (P. de). 222, 223.
Helmholtz (H. v.). 85.
Henard. 203.
Henry. 135, 137, 158.
Hermes (J.). 63.
Hermite. 37, 172, 201.
Hess (W.). 261.
Hetier. 31.
Heymann (W.). 276.
Hicks (W.-M.). 253, 255,
Hjalmar Mellin. 140, 146.
Hofmann (F.). 81, 83.
Hogel (W.-C.). 53.
Hölder. 7.
Hugoniot, 209, 215, 218.
Hulewicz (M.). 27.
Humbert (E.). 39, 44.
Humbert (G.). 125.
Hurwitz (A.). 64, 263, 265, 271.
Jadanza (N.). 184, 185.
Jaggi (E.). 37, 44, 78.
Jamet (V.). 229.
Jarrige. 128.
Jeffery (H.). 228.
Jenkins. 257.

Jonquières (de) 207, 208, 210, 213.
Juhel-Renoy, 46, 48, 49, 50.
Jung (G.). 178.
Kantor (S.). 62, 150, 151, 154.
Kiepert (L.). 65.
Kirchhoff. 90, 245.
Klein (F.). 275.
Kleitz. 35.
Kœhler (J.). 78.
Kœnig (J.). 12.
Kœnigs (G.). 159, 160, 217.
Kœnigsberger (L.). 63, 72.
Kœnisberger (S.). 137, 270.
Krause (M.). 66, 140, 143, 265, 269, 277.
Krazer (A.). 145, 146.
Kretz. 205.
Kronecker (L.). 76, 102, 107, 120, 241, 245.
Kupper (K.). 5.
La Chesnais. (A.). 42.
Lachlan (R.). 257.
Lac de Bosredon (V.). 81.
Lagarde (de). 34.
Lagrené (H. de). 20.
Laguerre (E.). 36, 157
Lamb (H.). 198.
Lampe (E.). 71.
Langlade (de). 124.
Larmor (A.). 261.
Latars (G.). 131.
Laterrade. 29, 35.
Laurent (H.). 280.
Laurent (P.). 52, 55, 57.
Lavoinne. 27.
Léauté. 124.
Lebon (E.). 44, 47, 49, 282.
Leboulleux. 46.
Lebreton (F.). 123.
Le Chatelier. 28, 122.
Lecornu. 126, 166, 219.
Lefèvre (H.). 17.
Legoux (A.). 46, 131.
Leibnitz. 227.
Lemoine (E.). 41, 79, 228.
Le Paige (C). 136, 143, 222, 223, 230, 232.
Le Pont (M.-P.). 174.
Lévy (L.). 151.
Lévy (P.). 23.
Lewy (W.-Th.). 42.
Leygue (L.). 34.
Lez. 46.
Lie (S.). 14, 263.
Lindelöf (S.). 140.
Lindemann. 98.
Liouville (R.). 152, 154, 216.
Lipschitz (R.). 69, 112, 160, 234, 247.
Lonchamps (G. de). 51.
Loria (G.). 184.
Lucas (E.). 50.
Lucas (F.). 32.
Maas (E.). 15.
Mac-Mahon (P.-A.). 261.
Maisano (G.). 192, 193, 195.
Malet. 256.
Maleyx (L.). 77.
Mallard. 122.
Mangeot. 281.
Mannheim. 154, 162, 255, 256, 282.
Mansion. 222, 224, 225, 226, 227, 229, 230.
Marie (M.). 84.
Markoff (A.). 7, 266.
Martins da Silva (J.-A.). 174.
Masi (F.). 182.
Massé (L.). 16.
Mathieu (A.). 48, 39.
Maurice. 56.
Maximovitch. 211.
Mayer (A.). 270.
Mealister (D.). 254.
Meissel. 264.
Mehmke (R.). 273.
Melsens. 222.
Mensbrugghe (Van der). 221, 222
Merrifield. 256.
Meyer (F.). 271, 276.
Millosevich (E.). 180, 195.
Mirman (L.). 40, 45.
Mister (J.). 226, 227.
Mittag-Leffler (G.). 48.
Mollame (V.). 279.
Monteverde (G.-F.). 282.
Mony (L.-A.). 40.
Morera (G.). 183, 263.
Moret-Blanc. 46, 48, 50.
Moutier (J.). 51.
Muir (Th.). 260.
Naccari. 185.
Nanson (E.-J.). 250.
Narducci (H.). 132.
Netto (E.). 14, 65.
Neuberg. 229.
Newton. 227.
Niven (C.). 253, 254.
Niven (D.). 251, 253.
Nœther (M.). 271.
Oberbeck (A.). 85.
Ocagne (M. d'). 22, 28, 38, 45, 78, 83, 84, 170, 174, 226, 279, 282.
Ovidio (E. d'). 185.
Paolis. 178, 186, 188.
Papperitz (E.). 263, 270.
Pasch (M.). 273.

Penet (L.). 129.
Percin. 52.
Perrin (M.). 51, 56.
Perrodil (de). 18, 29, 32, 33.
Perrott (J.). 65, 76.
Peticol. 47.
Picard. 152, 156, 159, 209, 215.
Pick (G.). 14, 266, 273.
Picquet (H.). 40, 80, 83.
Pisani (F.) 48.
Pisati (G.). 194.
Pirondini (G.). 280.
Poincaré (H.). 138, 149, 155, 158, 163, 204, 213, 214, 216.
Porney (J.-B.). 40, 41, 46, 49, 278, 281, 282.
Possé (C.). 277.
Ponchelon (F.). 56.
Pringsheim (A.). 266, 271, 272.
Pruvost (E.). 51.
Prym (F.). 141, 145.
Pucci (E.). 194.
Putz (H.). 53, 54.
Radau. 163.
Radicke (A.). 227.
Rausenberger (O.). 264.
Razzaboni (A.). 181, 182.
Realis (S.). 45, 47, 79, 135.
Remond (A.). 280.
Resal (H.). 51, 80, 127, 154.
Resal (J.). 18, 20.
Respighi (L.). 188, 190.
Reye (Th.). 68.
Riccardi (P.). 180.
Richard (J.). 46.
Roblin (R.). 54.
Rocquigny (de). 226.
Rodenberg (C.). 277.
Rodriguez (J.-M.). 174.
Rohn (K.). 6, 269.
Romero (J.). 49.
Ronkar (E.). 221, 222.
Rosanes. 65.
Routh (E.-J.). 258, 260.
Rowe. 254.
Rudio (F.). 65.
Ruffini (F.-P.). 180, 182.
Russell (R.). 261.
Russell (W.-H.-L.). 250, 251, 252, 254, 255, 256.
Russo (G.). 49.
Saalschutz. 78.
Saint-Germain. 40, 44, 49, 80, 165, 219.
Saint-Venant (de). 215, 218, 220.
Salvert (de). 31, 33.
Sampité. 19.
Santreaux (F.). 222.
Saporetti (A.). 180, 182.
Scheeffer (L.). 267, 272.
Schiaparelli (G.-V.). 187.
Schiappa Monteiro (A.). 172.
Schœnfliess. 202.
Schols (C.-M.). 54.
Schoute (P.-H.). 61, 68, 209, 210.
Schrœter (H.). 75, 265.
Schubert (H.). 269, 270.
Schur (F.). 64.
Segre (C.). 7, 10, 184, 195.
Séjourné. 20.
Siacci (F.). 54. 55, 57, 184, 189.
Sigaut. 56.
Simony (O.). 9.
Sparre (de). 128, 140, 206, 233.
Spottiswoode (W.). 251, 254, 256.
Stahl (W.). 67.
Stande (O.). 9.
Steen (A.). 145.
Steinschneider. 137.
Stern. 61, 64.
Stieltjes. 155, 156, 202, 206.
Stoffaes. 233.
Stolz (C.). 7.
Strekalof (V. de). 282.
Sturm (R.). 70, 71, 264, 274, 275.
Susini (N.). 23.
Switkowski. 25.
Sylvester. 200, 202, 214, 215, 218, 220, 251.
Tacchini (P.). 179.
Tannery (J.). 78.
Tarry. 281.
Tartinville. 282.
Thevenet. 25.
Thiré (A.). 273.
Thomé (L.-W.). 59, 74.
Thomson (J.). 249.
Thomson (W.). 249, 250, 253.
Thoulet (J.). 123.
Tichomandritzky (M.). 263.
Tilly (de). 221.
Tisserand. 203, 207.
Todhunter (I.). 252.
Tonelli (A.). 179.
Tournaire. 122.
Tourtay. 24.
Turquan (L.-V.). 233.
Uchard. 52.
Vacquant (Ch.). 51.
Vallier (E.). 55.
Valyi (J.). 61.
Veronese (G.). 196.
Viant. 57.
Vicaire. 150.
Voigt. 90.

Voss. 5, 6, 262, 265, 273.
Watson (H.-W.). 259.
Weierstrass. 85, 90, 236, 240.
Weiler (A.). 62.
Weill. 41, 228.
Weingarten (J.). 68, 69.
Weltzien (C.). 276.
Weyr (Ed.). 158, 162.
Wiltheiss. 70, 271.
Woodhouse (L.). 174.
Woolsey Johnson (W.). 258.
Zeuthen (H.-G.). 273.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XI.

0

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

QA
1
B8
v. 22

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

Bulletin des sciences
mathématiques

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY